

1

费定晖 周学圣 编演  
郭大钧 邵品琮 主审

Б.П.吉米多维奇  
**数学分析**  
习题集题解

第四版



山东科学技术出版社  
[www.lkj.com.cn](http://www.lkj.com.cn)



责任编辑 宋 涛 邱 蕾

封面设计 庞 婕 孙 佳

## 新版推荐

# 经典 Б.П.吉米多维奇数学习题集系列

数学分析习题集题解（共六册）

1 分析引论

定价：19.00元

2 单变量函数的微分学

定价：19.00元

3 不定积分 定积分

定价：20.00元

4 级数

定价：19.00元

5 多变量函数的微分法 带参数的积分

定价：22.00元

6 重积分和曲线积分

定价：19.00元

数学分析习题集精选精解

定价：39.00元

数学分析习题集——提示·解题思路·答案

定价：39.00元

高等数学习题精选精解

定价：39.80元

ISBN 978-7-5331-5900-9



9 787533 159009 >

定价：19.00 元



# 1

费定晖 周学圣 编演  
郭大钧 邵品琮 主审

Б.П.吉米多维奇  
**数学分析**  
习题集题解

第四版



图书在版编目 (CIP) 数据

Б. П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 1/费定晖, 周学圣编演. —4 版. —济南: 山东科学技术出版社, 2012  
ISBN 978-7-5331-5900-9

I. ①吉... II. ①费... ②周... III. ①数学分析—高等学校—题解 IV. ①017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120147 号

Б. П. 吉米多维奇  
数学分析习题集题解 1

---

出版者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路16号  
邮编: 250002 电话: (0531) 82098088  
网址: [www.lkj.com.cn](http://www.lkj.com.cn)  
电子邮件: [sdkj@sdpress.com.cn](mailto:sdkj@sdpress.com.cn)

发行者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路16号  
邮编: 250002 电话: (0531) 82098071

印刷者: 山东新华印刷厂潍坊厂

地址: 潍坊市潍州路753号  
邮编: 261031 电话: (0536) 2116806

---

开本: 787 mm × 1092mm 1/16

印张: 14

版次: 2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

---

ISBN 978-7-5331-5900-9

定价: 19.00 元



# 第四版前言

DISIBANQIANYAN

本书自 1979 年出版发行以来,历经 30 多个春秋,一直畅销不衰,深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下,对全书我不断地修订和补充,不断地修正错误,不断地替换更为简洁的解法和证明,力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性,以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书,对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练,感到获益匪浅,赞誉其为学习数学分析“不可替代”之图书,对此我们倍感欣慰,鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请,并得到郭大钧教授的大力支持,仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作,以适应文化建设繁荣发展的需要,更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作:

第一,为全书 4462 题中的近三成的习题,根据题型的不同,在原题解的前面,分别或给出提示,或给出解题思路,或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题,怎样下手求解;启发读者怎样总结解题的规律;启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论,开拓视野,活跃思路;帮助读者逐步解决学习中的困难,为他们在学習过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二,根据当前的语言习惯,对全书的文字作了较多的润色,使其表述更加准确,更加简洁凝练。

第三,改正了第三版中的个别印刷错误,修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四,根据国家相关标准,规范了有关术语和数学式子的表达;并对全书使用的外国人名,按照现在的标准或通用译法重新翻译人名,以求统一标准。

第五,对全书的版面和开本重新进行了调整,使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者,懂得只有通过个人的独立思考,加上勤学苦练才能取得成功,“只看不练假把式”,数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的,我们编写本书,就是希望能



对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好是不要先看题解,更不要查抄解答和答案,而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考,必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题,然后再查看书中是怎样解答的,比较自己的解答和书中解答的异同,从中找出差距,找出自己的问题所在,甚至找出书中解答的错误和不足之处,进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能,任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力,责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血,在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订,面对如此庞大的图书,限于本人水平,书中难免有错误和不当之处,敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正,不胜感激,并在新版中改正。

费定晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学



# 出版说明

CHUBANSHUOMING

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自 50 年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书 4462 题的所有解答汇编成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有楼世拓、姚琦、陈兆宽同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

1979 年于济南



# 目录 MULLU

---

第一章 分析引论 .....	1
§ 1. 实数 .....	1
§ 2. 数列理论 .....	10
§ 3. 函数的概念 .....	42
§ 4. 函数的图像表示法 .....	55
§ 5. 函数的极限 .....	103
§ 6. 函数无穷小和无穷大的阶 .....	161
§ 7. 函数的连续性 .....	169
§ 8. 反函数. 用参数形式表示的函数 .....	192
§ 9. 函数的一致连续性 .....	199
§ 10. 函数方程 .....	207



# 第一章 分析引论

## § 1. 实数

1° **数学归纳法** 为了证明某定理对任意的正整数  $n$  为真, 只需证明下面两点即可: (1) 这定理对  $n=1$  为真, (2) 设这定理对任何的一个正整数  $n$  为真, 则它对下一个正整数  $n+1$  也为真.

2° **分割** 若分有理数为  $A$  和  $B$  两类, 使其满足下列条件: (1) 两类均非空集, (2) 每一个有理数必属于一类, 且仅属于一类, (3) 属于  $A$  类(下类)的任一数小于属于  $B$  类(上类)的任何数, 则这样的一个分类法称为分割. (i) 若或是下类  $A$  有最大的数, 或是上类  $B$  有最小的数, 则分割  $A/B$  确定一个有理数. (ii) 若  $A$  类无最大数, 而  $B$  类亦无最小数, 则分割  $A/B$  确定一个无理数. 有理数和无理数统称为实数\*.

3° **绝对值(或模)** 若  $x$  为实数, 则用下列条件所确定的非负数  $|x|$ , 称为  $x$  的绝对值(模):

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

对于任何的实数  $x$  和  $y$ , 以下的不等式成立:

$$|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|.$$

4° **上确界和下确界** 设  $X = \{x\}$  为实数的有界集合, 若:

(1) 每一个  $x \in X$ \*\* 满足不等式  $x \geq m$ ;

(2) 对于任何的  $\epsilon > 0$ , 存在  $x' \in X$ , 使  $x' < m + \epsilon$ , 则数  $m = \inf\{x\}$  称为集合  $X$  的下确界.

同样, 若:

(1) 每一个  $x \in X$  满足不等式  $x \leq M$ ;

(2) 对于任何的  $\epsilon > 0$ , 存在  $x'' \in X$ , 使  $x'' > M - \epsilon$ , 则数  $M = \sup\{x\}$  称为集合  $X$  的上确界.

若集合  $X$  下方无界, 则通常说  $\inf\{x\} = -\infty$ ;

若集合  $X$  上方无界, 则认为  $\sup\{x\} = +\infty$ .

5° **绝对误差和相对误差** 设  $a$  ( $a \neq 0$ ) 是被测量的精确数值, 而  $x$  是这个量的近似值, 则

$$\Delta = |x - a|$$

称为被测量的绝对误差, 而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测量的相对误差.

若数  $x$  的绝对误差不超过它的第  $n$  个有效数字所对应的位数的单位的一半, 则说  $x$  有  $n$  位精确的数字.

**利用数学归纳法求证下列等式对任何正整数  $n$  皆成立:**

$$\text{【 1 】 } 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**证** 当  $n=1$  时, 等式成立.

设对于  $n=k$  (正整数) 时, 等式成立, 即

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

\* 以后若没有相反的附带说明, 数这个字我们将理解为实数.

\*\* 符号  $x \in X$  表示  $x$  属于集合  $X$ .



则对于  $n=k+1$  时,有

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},$$

即对于  $n=k+1$  时等式也成立.

于是,由数学归纳法知,对于任何正整数  $n$ ,有  $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ .

**【2】**  $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

证 当  $n=1$  时,等式成立.

设  $n=k$  时,等式成立,即  $1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ ,则对于  $n=k+1$  时,有

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 \\&= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},\end{aligned}$$

即对于  $n=k+1$  时,等式也成立.

于是,对于任何正整数  $n$ ,有  $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

**【3】**  $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$

证 当  $n=1$  时,等式成立.

设  $n=k$  时,等式成立,即  $1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+\cdots+k)^2$ ,则对于  $n=k+1$  时,有

$$\begin{aligned}1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 &= (1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3 \\&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\left\{\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right\}^2=[1+2+\cdots+(k+1)]^2,\end{aligned}$$

即对于  $n=k+1$  时,等式也成立.

于是,对于任何正整数  $n$ ,有  $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$ .

**【4】**  $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$

证 当  $n=1$  时,等式成立.

设  $n=k$  时,等式成立,即  $1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$ ,则对于  $n=k+1$  时,有

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k=(2^k-1)+2^k=2^{k+1}-1,$$

即对于  $n=k+1$  时,等式也成立.

于是,对于任何正整数  $n$ ,有  $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ .

**【5】** 设  $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$  及  $a^{[0]}=1$ ,求证:

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^n C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]},$$

其中  $C_n^m$  是由  $n$  个元素中选取  $m$  个元素的组合数,由此推出牛顿二项式公式.

证 当  $n=1$  时,由于  $[a+b]^{[1]}=a+b$  及  $\sum_{m=0}^1 C_1^m a^{[1-m]} b^{[m]}=a+b$ ,所以等式成立.

设  $n=k$  时,等式成立,即

$$(a+b)^{[k]}=\sum_{m=0}^k C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}, \quad (1)$$

则对于  $n=k+1$  时,有

$$(a+b)^{[k+1]}=(a+b)^{[k]}(a+b-kh). \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式得

$$(a+b)^{[k+1]}=(a+b-kh)\sum_{m=0}^k C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}$$



$$\begin{aligned}
&= (a+b-kh) \{ C_k^0 a^{[k]} b^{[0]} + C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]} + \cdots + C_k^k a^{[0]} b^{[k]} \} \\
&= \{ (a-kh) + b \} C_k^0 a^{[k]} b^{[0]} + \{ [a-(k-1)h] + (b-h) \} C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]} + \cdots + \{ a + (b-kh) \} C_k^k a^{[0]} b^{[k]} \\
&= C_k^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + C_k^0 a^{[k]} b^{[1]} + C_k^1 a^{[k]} b^{[1]} + C_k^1 a^{[k-1]} b^{[2]} + \cdots + C_k^k a^{[1]} b^{[k]} + C_k^k a^{[0]} b^{[k+1]} \\
&= C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + (C_k^0 + C_k^1) a^{[k]} b^{[1]} + \cdots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a^{[1]} b^{[k]} + C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]} \\
&= C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + C_{k+1}^1 a^{[k]} b^{[1]} + \cdots + C_{k+1}^k a^{[1]} b^{[k]} + C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]} \\
&= \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]} b^{[m]},
\end{aligned}$$

故由  $(a+b)^{[k]} = \sum_{m=0}^k C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}$  可推得下式成立:

$$(a+b)^{[k+1]} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]} b^{[m]},$$

即对于  $n=k+1$  时, 等式也成立.

于是, 对于任何正整数  $n$ , 有

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]}. \quad (3)$$

在式子  $a^{[n]} = a(a-h) \cdots [a-(n-1)h]$  中, 令  $h=0$ , 即得

$$a^{[n]} = a^n. \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式, 得牛顿二项式公式  $(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m$ .

【6】证明伯努利不等式:

$$(1+x_1)(1+x_2) \cdots (1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  是符号相同且大于  $-1$  的数.

证 当  $n=1$  时, 此式取等号.

设  $n=k$  时, 不等式成立, 即

$$(1+x_1)(1+x_2) \cdots (1+x_k) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于  $n=k+1$  时, 由于  $x_i (i=1, 2, \cdots, n)$  大于  $-1$ , 所以,  $1+x_i > 0$ . 因而, 有

$$\begin{aligned}
&(1+x_1)(1+x_2) \cdots (1+x_k)(1+x_{k+1}) \\
&\geq (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1}) \\
&= (1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}) + (x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).
\end{aligned}$$

由于  $x_ix_j \geq 0$ , 所以,

$$(1+x_1)(1+x_2) \cdots (1+x_{k+1}) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},$$

即对于  $n=k+1$  时, 不等式也成立.

于是, 对于任何正整数  $n$ , 有

$$(1+x_1)(1+x_2) \cdots (1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

【7】证明: 若  $x > -1$ , 则不等式  $(1+x)^n \geq 1+nx$  ( $n > 1$ ) 为真, 且仅当  $x=0$  时, 等号成立.

证 只要在 6 题的伯努利不等式中, 设  $x_i = x (i=1, 2, \cdots, n)$ , 即得证

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

从 6 题的证明过程中看出, 仅当  $x=0$  时, 上式才取等号.

【8】证明不等式:  $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$  ( $n > 1$ ).

提示 注意不等式  $\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2$  ( $k=1, 2, \cdots$ ).

证 当  $n=2$  时, 因为  $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2 = 2!$ , 故不等式成立.

设  $n=k$  时, 不等式成立, 即  $k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k$ , 则对于  $n=k+1$  时, 有



$$(k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k (k+1) = 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2 \quad (k=1, 2, \dots),$$

从而有

$$(k+1)! < \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即对于  $n=k+1$  时, 不等式也成立.

于是, 对于任何正整数  $n$ , 有  $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ .

**【9】** 证明不等式:  $2! \cdot 4! \cdots (2n)! > [(n+1)!]^n \quad (n>1)$ .

证 当  $n=2$  时, 因为  $2! \cdot 4! = 48$ , 及  $[(2+1)!]^2 = 36$ , 所以  $2! \cdot 4! > [(2+1)!]^2$ , 故不等式成立.

设  $n=k$  时, 不等式成立, 即

$$2! \cdot 4! \cdots (2k)! > [(k+1)!]^k,$$

则对于  $n=k+1$  时, 有

$$\begin{aligned} 2! \cdot 4! \cdots (2k+2)! &> [(k+1)!]^k (2k+2)! = [(k+1)!]^{k+1} (k+2)(k+3) \cdots (2k+2) \\ &> [(k+1)!]^{k+1} (k+2)^{k+1} = [(k+2)!]^{k+1}, \end{aligned}$$

即对于  $n=k+1$  时, 不等式也成立. 于是, 由数学归纳法原理, 本题证毕.

**【10】** 证明不等式:  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ .

证 当  $n=1$  时, 因为  $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ , 不等式显然成立.

设  $n=k$  时, 不等式成立, 即  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ .

则对于  $n=k+1$  时, 由于

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证  $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$ , 即证  $(2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2$ , 而上述不等式由于

$$4k^2 + 8k + 3 < 4k^2 + 8k + 4,$$

因而是成立的. 于是, 最后得

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于  $n=k+1$  时, 不等式也成立. 于是, 由数学归纳法, 本题证毕.

**【11】** 设  $c$  为正整数, 而不为整数的平方, 且  $A/B$  为确定实数  $\sqrt{c}$  的分割, 其中  $B$  类包含所有满足  $b^2 > c$  的正有理数  $b$ , 而  $A$  类包含所有其余的有理数. 求证: 在  $A$  类中无最大数, 而在  $B$  类中无最小数.

证 设  $a \in A$ . 若  $a \leq 0$ , 则显然存在  $a' > a (a' > 0)$  且  $a' \in A$ . 故可设  $a > 0$ , 于是  $a^2 \leq c$ . 但不可能有  $a^2 = c$ .

因若  $a^2 = c$ , 设  $a = \frac{p}{q}$ ,  $p$  与  $q$  为互素的正整数, 则  $\frac{p^2}{q^2} = c$ . 由于  $c$  是正整数, 而  $p^2$  与  $q^2$  也是互素的, 故必  $q=1$ , 从而  $c = p^2$ , 此与假定矛盾, 故必  $a^2 < c$ . 下面我们证明, 存在正整数  $n$ , 使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < c,$$

于是  $a + \frac{1}{n}$  也属于  $A$ .

上述不等式相当于:  $a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < c$ ,  $\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < c - a^2$ , 若  $n$  满足不等式  $\frac{2a+1}{n} < c - a^2$ , 则上面的第二个不等式也自然能满足了.



为此,只要取  $n > \frac{2a+1}{c-a^2}$ ,而这是恒为可能的.因此,不论  $a$  为  $A$  类内怎样的数,在  $A$  类内总能找到大于它的数,故  $A$  类中无最大数.

同法可证  $B$  类中无最小数.实质上,此处分割  $A/B$  确定了一个无理数  $\sqrt{c}$ .

**【12】** 确定数  $\sqrt[3]{2}$  的分割  $A/B$  用下面的方法来建立: $A$  类包含所有满足  $a^3 < 2$  的有理数  $a$ ;  $B$  类包含所有其余的有理数.证明:在  $A$  类中无最大数,而在  $B$  类中无最小数.

证 设  $a \in A$ , 即  $a^3 < 2$ . 下证必可取正整数  $n$ , 使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^3 < 2.$$

事实上,上式相当于  $\frac{3a^2}{n} + \frac{3a}{n^2} + \frac{1}{n^3} < 2 - a^3$ . 若  $a \leq 0$ , 取  $n=1$  即可. 若  $a > 0$ , 注意到  $n \geq 1$ , 即知若取  $n$  充分大, 使  $n > \frac{3a^2+3a+1}{2-a^3}$ , 则上列各式均成立. 从而  $a + \frac{1}{n} \in A$ . 故  $A$  中无最大数.

下设  $b \in B$ , 则  $b^3 \geq 2$ . 下证不可能有  $b^3 = 2$ . 事实上, 若  $b^3 = 2$ , 设  $b = \frac{p}{q}$ ,  $p$  与  $q$  为互素的正整数, 则  $\frac{p^3}{q^3} = 2$ ,  $p^3 = 2q^3$ , 从而  $p^3$  为偶数, 因此  $p$  必为偶数:  $p = 2r$ ,  $r$  为正整数. 由于  $p$  与  $q$  是互素的, 故  $q$  必为奇数, 从而  $q^3$  也为奇数. 但  $q^3 = 4r^3$ , 故  $q^3$  又必是偶数, 因此矛盾. 由此可知必有  $b^3 > 2$ . 仿前面的证明, 可取正整数  $n$ , 使  $\left(b - \frac{1}{n}\right)^3 > 2$ , 从而  $b - \frac{1}{n} \in B$ . 由此可知  $B$  类中无最小数. 实质上, 此处分割  $A/B$  确定了一个无理数  $\sqrt[3]{2}$ .

**【13】** 作出适当的分割, 然后证明等式:

$$(1) \sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}; \quad (2) \sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

证 (1) 作确定  $\sqrt{2}$  的分割  $A/B$ : 一切有理数  $a \leq 0$  以及满足  $a^2 < 2$  的正有理数  $a$  都归于  $A$  类, 一切满足  $b^2 > 2$  的正有理数  $b$  归入  $B$  类. 又作确定  $\sqrt{8}$  的分割  $A'/B'$ : 一切有理数  $a' \leq 0$  以及满足  $a'^2 < 8$  的正有理数  $a'$  归入  $A'$  类, 一切满足  $b'^2 > 8$  的正有理数  $b'$  归入  $B'$  类. 我们知道, 根据实数加法的定义, 满足不等式:

$$a + a' < c < b + b' \quad (\text{对任何 } a \in A, b \in B, a' \in A', b' \in B')$$

的唯一实数  $c$  就是  $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ . 因此, 如果我们能证明恒有  $(a + a')^2 < 18$  (当  $a + a' > 0$  时),  $(b + b')^2 > 18$ , 则有  $a + a' < \sqrt{18} < b + b'$ . 于是得知  $\sqrt{18} = c = \sqrt{2} + \sqrt{8}$ .

若  $a + a' > 0$ , 则  $a$  与  $a'$  中至少有一个为正, 从而由  $a^2 a'^2 < 16$  知  $aa' < 4$ ,

$$(a + a')^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' < 2 + 8 + 8 = 18;$$

同样, 因  $b^2 > 2, b'^2 > 8, b > 0, b' > 0$ , 故  $b^2 b'^2 > 16, bb' > 4$ ,

$$(b + b')^2 = b^2 + b'^2 + 2bb' > 2 + 8 + 8 = 18.$$

于是证毕.

(2) 作确定  $\sqrt{2}$  的分割  $A/B$  如(1)中所示, 再作确定  $\sqrt{3}$  的分割  $A_1/B_1$ : 一切有理数  $a_1 \leq 0$  以及满足  $a_1^2 < 3$  的正有理数  $a_1$  归入  $A_1$  类, 一切满足  $b_1^2 > 3$  的正有理数  $b_1$  归入  $B_1$  类, 根据实数乘法的定义, 满足

$$aa_1 < c_1 < bb_1 \quad (\text{对任何 } a \in A, a > 0, a_1 \in A_1, a_1 > 0, b \in B, b_1 \in B_1)$$

的(正)实数  $c_1$  存在唯一, 它就是  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ . 但由于当  $a \in A, a > 0, a_1 \in A_1, a_1 > 0$  时  $(aa_1)^2 < 6$ , 而当  $b \in B, b_1 \in B_1$  时,  $(bb_1)^2 > 6$ , 故恒有  $aa_1 < \sqrt{6} < bb_1$ . 由此可知  $\sqrt{6} = c_1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ . 证毕.

**【14】** 建立确定数  $2^{\sqrt{2}}$  的分割.

解 先作分割  $A_1/B_1$ , 使之确定数  $\sqrt{2}$ .

其次, 作分割  $A/B$ , 其中  $A$  类包含全体负有理数、零以及满足下述条件的正有理数  $a$ :

如果有  $\frac{p}{q}$  ( $p, q$  互素) 属于  $A_1$ , 则有  $a^q < 2^p$ ; 而其余的正有理数归入  $B$  类.

这样的分割  $A/B$  就确定数  $2^{\sqrt{2}}$ .

**【15】** 求证: 任何非空且下方有界的数集有下确界, 而任何非空且上方有界的数集有上确界.



证 不失一般性,只证本题的后半部分,分两种情形:

(1)  $A$  中有最大数  $\bar{a}$ , 此时, 设  $a \in A$ , 则有  $a \leq \bar{a}$ , 说明  $\bar{a}$  为  $A$  的上界. 又由于  $\bar{a} \in A$ , 故对  $A$  的任何上界  $M$ , 均有  $\bar{a} \leq M$ , 故  $\bar{a}$  为  $A$  的上确界.

(2)  $A$  中无最大数. 此时, 作分割  $A_1/B_1$ : 取集  $A$  的一切上界归入  $B_1$  类, 而其余的数归入  $A_1$  类. 这样,  $A$  中一切数全部落在  $A_1$  内,  $A_1$  及  $A$  均非空, 且  $A_1$  中的数小于  $B_1$  中的数, 这确实是一个实数分割, 易知由此分割所产生的实数  $\beta$  是  $B_1$  类中的最小数, 即  $\beta$  是  $A$  的最小上界, 从而  $\beta$  是  $A$  的上确界.

【16】 证明: 一切有理真分数  $\frac{m}{n}$  (式中  $m$  及  $n$  为正整数, 且  $0 < m < n$ ) 的集合无最小及最大的元素. 并求这个集合的上确界及下确界.

证 令  $E$  表一切有理真分数  $\frac{m}{n}$  (式中正整数  $m, n$  满足  $0 < m < n$ ) 所成的集合, 对任何  $\frac{m}{n} \in E$ , 显然  $\frac{m+1}{n+1} \in E$  且  $\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$ , 又  $\frac{m^2}{n^2} \in E$ , 且  $\frac{m^2}{n^2} < \frac{m}{n}$ ; 故  $E$  中既无最大数, 也无最小数. 显然

$$\sup E = 1, \quad \inf E = 0.$$

【17】 有理数  $r$  满足不等式  $r^2 < 2$ . 求这些有理数  $r$  所成集合的下确界和上确界.

解 用  $E$  表所有满足  $r^2 < 2$  的有理数  $r$  所成的集合. 我们知道, 分割  $A/B$  确定无理数  $\sqrt{2}$ , 这里  $A$  表由一切非正有理数以及满足  $r^2 < 2$  的正有理数  $r$  所成的类,  $B$  表其余有理数构成的类, 并且已证  $A$  中无最大数, 于是

$$\sup E = \sup A = \sqrt{2}.$$

同样, 分割  $A'/B'$  确定无理数  $-\sqrt{2}$ , 这里  $B'$  表由所有非负有理数以及满足  $r^2 < 2$  的负有理数  $r$  构成的类,  $A'$  表其余有理数构成的类, 并且  $B'$  中无最小数. 于是, 显然有

$$\inf E = \inf B' = -\sqrt{2}.$$

【18】 设  $\{-x\}$  为数的集合, 这些数是与  $x \in \{x\}$  符号相反的数. 证明等式:

$$(1) \inf \{-x\} = -\sup \{x\}; \quad (2) \sup \{-x\} = -\inf \{x\}.$$

证 (1) 设  $\inf \{-x\} = m'$ , 则有:

(i) 当  $-x \in \{-x\}$  时,  $-x \geq m'$ ; (ii) 对于任何的正数  $\epsilon$ , 存在有  $-x' \in \{-x\}$ , 使  $-x' < m' + \epsilon$ .

由 (i) 及 (ii) 推得:

(iii) 当  $x \in \{x\}$  时,  $x \leq -m'$ ; (iv) 对于任何的正数  $\epsilon$ , 存在有  $x' \in \{x\}$ , 使  $x' > -m' - \epsilon$ .

由 (iii) 及 (iv) 知数  $-m' = \sup \{x\}$ , 即  $m' = -\sup \{x\}$ , 所以,  $\inf \{-x\} = -\sup \{x\}$ .

(2) 设  $\sup \{-x\} = M'$ , 则有:

(v) 当  $-x \in \{-x\}$  时,  $-x \leq M'$ ; (vi) 对于任何的正数  $\epsilon$ , 存在有  $-x' \in \{-x\}$ , 使  $-x' > M' - \epsilon$ .

由 (v) 及 (vi) 推得:

(vii) 当  $x \in \{x\}$  时,  $x \geq -M'$ ; (viii) 对于任何的正数  $\epsilon$ , 存在有  $x' \in \{x\}$ , 使  $x' < -M' + \epsilon$ .

由 (vii) 及 (viii) 知数  $-M' = \inf \{x\}$ , 即  $M' = -\inf \{x\}$ , 所以,  $\sup \{-x\} = -\inf \{x\}$ .

【19】 设  $\{x+y\}$  为所有  $x+y$  这些和的集合, 其中  $x \in \{x\}$  及  $y \in \{y\}$ . 证明等式:

$$(1) \inf \{x+y\} = \inf \{x\} + \inf \{y\}; \quad (2) \sup \{x+y\} = \sup \{x\} + \sup \{y\}.$$

证 (1) 设  $\inf \{x\} = m_1, \inf \{y\} = m_2$ , 则有:

(i) 当  $x \in \{x\}, y \in \{y\}$  时,  $x \geq m_1, y \geq m_2$ ;

(ii) 对于任何的正数  $\epsilon$ , 存在有数  $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$ , 使  $x' < m_1 + \frac{\epsilon}{2}, y' < m_2 + \frac{\epsilon}{2}$ .

由 (i) 及 (ii) 推得:

(iii) 当  $x+y \in \{x+y\}$  时 (其中  $x \in \{x\}, y \in \{y\}$ ),  $x+y \geq m_1 + m_2$ ;

(iv) 对于任何的正数  $\epsilon$ , 存在有  $x'+y' \in \{x+y\}$  (其中  $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$ ), 使  $x'+y' < (m_1 + m_2) + \epsilon$ .

由 (iii) 及 (iv) 知数  $m_1 + m_2 = \inf \{x+y\}$ , 即  $\inf \{x+y\} = \inf \{x\} + \inf \{y\}$ .



(2)同法可证  $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$ .

**【20】** 设  $\{xy\}$  为所有  $xy$  乘积的集合,其中  $x\in\{x\}$  及  $y\in\{y\}$ ,且  $x\geq 0$  及  $y\geq 0$ . 证明等式:

(1) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$ ; (2) $\sup\{x\}\sup\{y\}=\sup\{xy\}$ .

证 (1)设  $\inf\{x\}=m_1$ ,  $\inf\{y\}=m_2$ , 由于恒有  $x\geq 0, y\geq 0$ . 故必  $m_1\geq 0, m_2\geq 0$ . 于是,

(i) 当  $x\in\{x\}, y\in\{y\}$  时,  $x\geq m_1\geq 0, y\geq m_2\geq 0$ ;

(ii) 对任何的正数  $\epsilon$ , 存在有数  $x'\in\{x\}, y'\in\{y\}$ , 使  $0\leq x'<m_1+\epsilon, 0\leq y'<m_2+\epsilon$ .

由(i)及(ii)推得:

(iii) 当  $xy\in\{xy\}$ , 其中  $x\in\{x\}, y\in\{y\}, xy\geq m_1m_2$ ;

(iv) 对于任何的正数  $\epsilon$ , 存在有  $x'y'\in\{xy\}$  (其中  $x'\in\{x\}, y'\in\{y\}$ ), 使

$$0\leq x'y'<(m_1+\epsilon)(m_2+\epsilon)=m_1m_2+\epsilon',$$

其中  $\epsilon'=(m_1+m_2)\epsilon+\epsilon^2$ .

由(iii)及(iv)知数  $m_1m_2=\inf\{xy\}$ , 即  $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$ .

(2)同法可证  $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\sup\{y\}$ .

**【21】** 求证不等式:

(1)  $|x-y|\geq ||x|-|y||$ ; (2)  $|x+x_1+\cdots+x_n|\geq |x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$ .

证 (1)由  $|x-y|=|x+(-y)|\geq |x|-|-y|=|x|-|y|$ ,

及  $|x-y|=|y-x|\geq |y|-|x|=-(|x|-|y|)$ ,

即得

$$|x-y|\geq ||x|-|y||.$$

也可如下证明:由  $|xy|\geq xy$  知  $x^2-2xy+y^2\geq x^2-2|xy|+y^2$ , 则  $(x-y)^2\geq (|x|-|y|)^2$ , 开方即得

$$|x-y|\geq ||x|-|y||.$$

(2)  $|x+x_1+\cdots+x_n|\geq |x|-|x_1+\cdots+x_n|$ ,

而  $|x_1+\cdots+x_n|\leq |x_1|+|x_2+\cdots+x_n|\leq \cdots\leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$ ,

所以,  $|x+x_1+\cdots+x_n|\geq |x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$ .

解不等式:

**【22】**  $|x+1|<0.01$ .

解 由  $|x+1|<0.01$  推得  $-0.01<x+1<0.01$ , 所以,  $-1.01<x<-0.99$ .

**【23】**  $|x-2|\geq 10$ .

解 由  $|x-2|\geq 10$  推得  $x-2\geq 10$  或  $x-2\leq -10$ , 所以,  $x\geq 12$  或  $x\leq -8$ .

**【24】**  $|x|>|x+1|$ .

解 两边平方, 即得  $x^2>(x+1)^2$  或  $2x+1<0$ , 于是, 有  $x<-\frac{1}{2}$ .

**【25】**  $|2x-1|<|x-1|$ .

解 两边平方, 即得  $(2x-1)^2<(x-1)^2$  或  $3x^2-2x<0$ , 解之, 得  $0<x<\frac{2}{3}$ .

**【26】**  $|x+2|+|x-2|\leq 12$ .

提示 令  $x-2=t$ , 易得  $-8\leq t\leq 4$ , 从而有  $|x|\leq 6$ .

解 令  $x-2=t$ , 则得  $|t+4|+|t|\leq 12$  或  $|t+4|\leq 12-|t|$ .

两边平方, 即有  $t^2+8t+16\leq 144-24|t|+t^2$ , 或  $3|t|\leq 16-t$ .

将上式两端再平方, 化简整理得  $t^2+4t-32\leq 0$ , 于是, 有  $-8\leq t\leq 4$ . 从而得  $-8\leq x-2\leq 4$ , 即

$$-6\leq x\leq 6 \quad \text{或} \quad |x|\leq 6.$$

**【27】**  $|x+2|-|x|>1$ .



解  $1+|x|<|x+2|$ , 将此式两端平方, 化简得  $2|x|<4x+3$ . 再平方之, 化简得  $4x^2+8x+3>0$ .

于是, 有  $x>-\frac{1}{2}$  或  $x<-\frac{3}{2}$ .

后者不适合, 所以,  $x>-\frac{1}{2}$ .

【28】  $||x+1|-|x-1||<1$ .

提示 两端平方, 化简即得  $|x|<\frac{1}{2}$ .

解 两端平方, 化简得  $x^2+\frac{1}{2}<|x^2-1|$ , 即

$$x^2-1>x^2+\frac{1}{2} \quad \text{或} \quad x^2-1<-(x^2+\frac{1}{2}).$$

前者不可能, 所以,  $x^2-1<-(x^2+\frac{1}{2})$ , 即  $x^2<\frac{1}{4}$ , 解之得  $|x|<\frac{1}{2}$ .

【29】  $|x(1-x)|<0.05$ .

解 由  $|x-x^2|<\frac{1}{20}$  得  $x^2-x+\frac{1}{20}>0$  或  $x^2-x-\frac{1}{20}<0$ , 解之得

$$\begin{cases} \frac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\frac{5+\sqrt{30}}{10} \\ \frac{5+\sqrt{20}}{10}<x \quad \text{或} \quad x<\frac{5-\sqrt{20}}{10}, \end{cases}$$

即  $\frac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\frac{5-\sqrt{20}}{10}$  或  $\frac{5+\sqrt{20}}{10}<x<\frac{5+\sqrt{30}}{10}$ .

【30】 证明恒等式:  $(\frac{x+|x|}{2})^2+(\frac{x-|x|}{2})^2=x^2$ .

证  $(\frac{x+|x|}{2})^2+(\frac{x-|x|}{2})^2=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x|x|+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x|x|=x^2$ .

【31】 当测量长度 10cm 时, 绝对误差为 0.5mm; 当测量距离 500km 时, 绝对误差等于 200m. 哪种测量较为精确?

解 用相对误差  $\delta=\frac{\Delta}{|a|}$  进行比较, 其中  $a$  为被测量的精确值, 而  $\Delta$  是绝对误差.

对于前者,  $\delta=\frac{0.5\times 0.1}{10}=0.5\%$ ; 对于后者,  $\delta=\frac{200}{500\times 1000}=0.04\%$ .

所以, 后者测量较为精确.

【32】 设数  $x=2.3752$  的相对误差为 1%, 试求此数包含若干位精确数字?

解 因为  $\frac{\Delta}{2.3752}=0.01$ , 所以  $\Delta=0.023752$ .

因而, 此数包含两位精确数字.

【33】 数  $x=12.125$  包含三位精确数字. 试求此数的相对误差?

解 因为  $x$  包含三位精确数字, 所以  $\Delta<0.05$ . 于是得相对误差

$$\delta=\frac{\Delta}{|x|}<\frac{0.05}{12.125}<0.42\%$$

即  $\delta<0.42\%$ .

【34】 矩形的边长等于:

$$x=2.50\text{cm}\pm 0.01\text{cm}, \quad y=4.00\text{cm}\pm 0.02\text{cm}.$$

这个矩形的面积  $S$  界于什么范围内? 当其边长取平均值时, 矩形面积的绝对误差  $\Delta$  和相对误差  $\delta$  是多少?

解  $S_{\min}=(2.50-0.01)(4.00-0.02)=9.9102(\text{cm}^2)$ ,

$$S_{\max}=(2.50+0.01)(4.00+0.02)=10.0902(\text{cm}^2),$$



$$S_{\min} \leq S \leq S_{\max}, \quad S_{\text{平均}} = 2.50 \times 4.00 = 10(\text{cm}^2),$$

$$\Delta_1 = 10.0902 - 10 = 0.0902(\text{cm}^2), \quad \Delta_2 = 10 - 9.9102 = 0.0898(\text{cm}^2);$$

$$\Delta \leq \max(\Delta_1, \Delta_2) = 0.0902(\text{cm}^2), \quad \delta = \frac{\Delta}{10} \leq \frac{0.0902}{10} < 0.91\%.$$

【35】 物体的质量  $P = 12.59\text{g} \pm 0.01\text{g}$ , 其体积  $V = 3.2\text{cm}^3 \pm 0.2\text{cm}^3$ . 若对物体的质量和体积都取其平均值, 试求物体的密度, 并估计密度的绝对误差和相对误差.

解 密度  $C = \frac{12.59}{3.2} \text{g/cm}^3 = 3.93\text{g/cm}^3$ .

$$C_{\max} = \frac{12.60}{3.0} \text{g/cm}^3 = 4.20\text{g/cm}^3, \quad C_{\min} = \frac{12.58}{3.4} \text{g/cm}^3 = 3.70\text{g/cm}^3, \quad C_{\min} \leq C \leq C_{\max},$$

$$\Delta_1 = C_{\max} - C = 0.27\text{g/cm}^3, \quad \Delta_2 = C - C_{\min} = 0.23\text{g/cm}^3; \quad \Delta \leq \max(\Delta_1, \Delta_2) = 0.27\text{g/cm}^3;$$

一般地, 密度为  $(3.93 \pm 0.27)\text{g/cm}^3$ ;  $\delta \leq \frac{0.27}{3.70} < 7.3\%$ .

【36】<sup>+</sup> 圆半径  $r = 7.2\text{m} \pm 0.1\text{m}$ . 若取  $\pi = 3.14$ , 则求出的圆面积和最小相对误差是多少?

解 圆面积  $A = \pi \times 7.2^2 \approx 51.84\pi(\text{m}^2)$

$$\Delta_1 = \pi(7.2 + 0.1)^2 - \pi \cdot 7.2^2 = 1.45\pi.$$

$$\Delta_2 = |\pi(7.2 - 0.1)^2 - \pi \cdot 7.2^2| = 1.43\pi.$$

$$\Delta \leq \max(\Delta_1, \Delta_2) = 1.45\pi(\text{m}^2)$$

即一般的圆面积  $A$  为  $(51.84 \pm 1.45)\pi(\text{m}^2)$ , 故

$$\delta \leq \frac{1.45\pi}{51.84\pi} < 2.80\%.$$

【37】 已测得长方体各边长为

$$x = 24.7\text{m} \pm 0.2\text{m}; \quad y = 6.5\text{m} \pm 0.1\text{m}; \quad z = 1.2\text{m} \pm 0.1\text{m}.$$

此长方体的体积  $V$  居于什么范围内? 若测量的各结果都取其平均值, 则所求出的体积可能有的绝对误差和相对误差是多少?

解  $24.5 \times 6.4 \times 1.1 \leq V \leq 24.9 \times 6.6 \times 1.3$  即  $172.480\text{m}^3 \leq V \leq 213.642\text{m}^3$ .

当  $x, y, z$  均取平均值时,

$$V = 24.7 \times 6.5 \times 1.2 = 192.660(\text{m}^3).$$

$$\Delta_1 = 213.642 - 192.660 = 20.982(\text{m}^3),$$

$$\Delta_2 = 192.660 - 172.480 = 20.180(\text{m}^3).$$

于是,  $\Delta \leq 20.982(\text{m}^3)$ ;  $\delta \leq \frac{20.982}{172.480} \approx 12.2\%$ .

【38】 测量正方形的边长  $x$ , 此处  $2\text{m} < x < 3\text{m}$ , 应有多小的绝对误差, 才能使此正方形面积有可能精确到  $0.001\text{m}^2$ ?

解 按题设我们有  $0 < x^2 - 4 < 0.001$  或  $0 < 9 - x^2 < 0.001$ , 解之得

$$2.99983 < x < 3 \quad \text{或} \quad 2 < x < 2.00024.$$

因此,  $\Delta$  取二者中误差较小者, 即

$$\Delta \leq 0.00017(\text{m}) = 0.17(\text{mm}),$$

故当边长  $x$  的绝对误差不超过  $0.17\text{mm}$  时, 就能使此正方形的面积精确到  $0.001\text{m}^2$ .

【39】 假定矩形每边的长皆不超过  $10\text{m}$ , 为了使根据测量所计算出来的面积与原面积之差不超过  $0.01\text{m}^2$ , 问测量矩形的边  $x$  与  $y$  时, 许可的绝对误差  $\Delta$  的值多大?

解 按题设我们有  $(x + \Delta)(y + \Delta) - xy \leq 0.01$ , 即  $\Delta^2 + (x + y)\Delta \leq 0.01$ ,

\* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致, 以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.



由于  $x \leq 10$  及  $y \leq 10$ , 所以只要  $\Delta^2 + 20\Delta \leq 0.01$  或  $\Delta^2 + 20\Delta - 0.01 \leq 0$  即可. 解之, 得

$$\Delta \leq \frac{-20 + \sqrt{20^2 + 0.04}}{2} = -10 + \frac{20.00099}{2} = 0.000499 < 0.0005(\text{m}).$$

\* ) 此题假设  $x, y$  有相等的绝对误差. 又原著上为“0.01m<sup>2</sup>”, 而误译为“0.01cm<sup>2</sup>”.

【40】 设  $\delta(x)$  及  $\delta(y)$  为数  $x$  和  $y$  的相对误差,  $\delta(xy)$  为数  $xy$  的相对误差. 求证:

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).$$

提示 由绝对误差与相对误差的定义, 命题即获证.

证 设  $x = a + \Delta_x, y = b + \Delta_y$ , 其中  $a$  及  $b$  分别是  $x$  及  $y$  的精确值,  $\Delta_x$  及  $\Delta_y$  是绝对误差, 则有

$$xy - ab = b\Delta_x + a\Delta_y + \Delta_x \cdot \Delta_y.$$

于是,

$$\Delta = |xy - ab| \leq |b| \cdot \Delta_x + |a| \cdot \Delta_y + \Delta_x \cdot \Delta_y.$$

最后得

$$\delta(xy) = \frac{\Delta}{|ab|} \leq \frac{\Delta_x}{|a|} + \frac{\Delta_y}{|b|} + \frac{\Delta_x}{|a|} \cdot \frac{\Delta_y}{|b|},$$

此即

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).$$

## § 2. 数列理论

1° 数列极限的概念 若对于任何的  $\epsilon > 0$ , 存在数  $N = N(\epsilon)$ , 使当  $n > N$  时,

$$|x_n - a| < \epsilon,$$

则称数列  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  有极限  $a$  (或者说, 收敛于  $a$ ), 亦即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

特别地, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , 则称  $x_n$  为无穷小量.

没有极限的数列, 称为发散的.

2° 极限存在的准则

(1) 若  $y_n \leq x_n \leq z_n$  及  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ ,

(2) 单调而且有界的数列有极限.

(3) 柯西准则 数列  $\{x_n\}$  的极限存在的充分必要条件是: 对于任何的  $\epsilon > 0$ , 存在数  $N = N(\epsilon)$ , 使当  $n > N$  和  $p > 0$  时,  $|x_n - x_{n+p}| < \epsilon$ .

3° 关于数列极限的基本定理 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  存在, 则有:

(1) 若  $x_n \leq y_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ;

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ;

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ;

(4) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$ .

4° 数  $e$  数列

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

具有有限的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818284 \dots$$

5° 无穷极限 符号



$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

表示:对于任何的  $E > 0$ , 存在数  $N = N(E)$ , 使当  $n > N$  时,  $|x_n| > E$ .

6° 聚点 若已知数列  $x_n (n=1, 2, \dots)$  有子数列

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}, \dots \quad (1 \leq p_1 < p_2 < \dots)$$

满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \xi,$$

则称数  $\xi$  (或符号  $\infty$ ) 为已知数列  $x_n (n=1, 2, \dots)$  的聚点 (聚点也称为极限点).

一切有界的数列至少有一个有限的聚点 (波尔查诺——魏尔斯特拉斯原理). 若这个聚点是唯一的, 则它即为已知数列的有限极限.

数列  $x_n$  的最小聚点 (有限的或无穷的)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n$  称为此数列的下极限, 而它的最大聚点  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x}_n$  称为此数列的上极限.

等式  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x}_n$  为数列  $x_n$  的 (有限或无穷) 极限存在的充分必要条件.

【41】 设  $x_n = \frac{n}{n+1} (n=1, 2, \dots)$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ , 即: 对于任一个给定的  $\epsilon > 0$ , 求出数  $N = N(\epsilon)$ , 使得当  $n > N$  时,  $|x_n - 1| < \epsilon$ .

填下表:

$\epsilon$	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$N$					

证  $|x_n - 1| = \frac{1}{n+1}$ . 任给  $\epsilon > 0$ , 要  $|x_n - 1| < \epsilon$ , 只要  $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ . 即只要  $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$ .

可取  $N = N(\epsilon) = \left[ \frac{1}{\epsilon} \right]$ , 则当  $n > N$  时,  $|x_n - 1| < \epsilon$ , 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

$\epsilon$	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$N$	10	100	1000	10000	...

【42】 设:

$$(1) x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}; \quad (2) x_n = \frac{2n}{n^3 + 1}; \quad (3) x_n = \frac{1}{n!}; \quad (4) x_n = (-1)^n \cdot 0.999^n.$$

对于任何的  $\epsilon > 0$ , 求出数  $N = N(\epsilon)$ , 使得当  $n > N$  时,  $|x_n| < \epsilon$ ; 从而证明:  $x_n (n=1, 2, \dots)$  为无穷小量 (就是说, 它的极限值为 0).

对应着上面四种情形, 填下表:

$\epsilon$	0.1	0.01	0.001	...
$N$				

证 (1)  $|x_n| = \frac{1}{n}$ . 任给  $\epsilon > 0$ , 要  $|x_n| < \epsilon$ , 只要  $\frac{1}{n} < \epsilon$ , 即只要  $n > \frac{1}{\epsilon}$ . 取  $N = \left[ \frac{1}{\epsilon} \right] + 1$ , 则当  $n > N$  时,  $|x_n| < \epsilon$ , 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

(2)  $|x_n| = \frac{2n}{n^3 + 1} < \frac{2}{n^2}$ . 任给  $\epsilon > 0$ , 要  $|x_n| < \epsilon$ , 只要  $\frac{2}{n^2} < \epsilon$ , 即只要  $n > \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}$ . 取  $N = \left[ \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \right] + 1$ , 则当  $n > N$  时,  $|x_n| < \epsilon$ , 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

(3)  $|x_n| = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ . 任给  $\epsilon > 0$ , 要  $|x_n| < \epsilon$ , 只要  $\frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$ , 即只要  $n > 1 + \log_2 \frac{1}{\epsilon}$ . 取  $N = \left[ \log_2 \frac{1}{\epsilon} \right] + 1$ , 则当  $n > N$  时,  $|x_n| < \epsilon$ , 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .



(4)  $|x_n| = 0.999^n$ . 任给  $\epsilon > 0$ , 要  $|x_n| < \epsilon$ , 只要  $n \lg 0.999 < \lg \epsilon$ . 由于  $\lg 0.999 < 0$ , 故只要  $n > \frac{\lg \epsilon}{\lg 0.999} \approx 2500 \lg \frac{1}{\epsilon}$ . 取  $N = \left[ 2500 \lg \frac{1}{\epsilon} \right]$ , 则当  $n > N$  时,  $|x_n| < \epsilon$ , 所以:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

填下表:

$\epsilon$		0.1	0.01	0.001	...
(1)	$N$	10	100	1000	...
(2)	$N$	4	14	44	...
(3)	$N$	4	7	10	...
(4)	$N$	2500	5000	7500	...

\* ) 或取  $N \geq \frac{1}{\epsilon}$ . 以下各题类似, 不再一一说明.

\*\* ) 查四位数学用表所得的数据.

### 【43】证明: 数列

(1)  $x_n = (-1)^n n$ , (2)  $x_n = 2^{\sqrt{n}}$ , (3)  $x_n = \lg(\lg n)$  ( $n \geq 2$ )

当  $n \rightarrow \infty$  时, 有无穷极限 (即成为无穷大), 即: 对任意的  $E > 0$ , 求数  $N = N(E)$ , 使得当  $n > N$  时,  $|x_n| > E$ .

对应着上面的每一种情形, 填下表:

$E$	10	100	1000	10000	...
$N$					

证 (1)  $|x_n| = n$ , 任给  $E > 0$ , 要  $|x_n| > E$ , 只要  $n > E$ . 取  $N = [E]$ , 则当  $n > N$  时,  $|x_n| > E$ , 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

(2)  $|x_n| = 2^{\sqrt{n}}$ , 任给  $E > 0$ , 要  $|x_n| > E$ , 只要  $2^{\sqrt{n}} > E$ . 即只要  $n > \left( \frac{\lg E}{\lg 2} \right)^2$ . 取  $N = \left[ \left( \frac{\lg E}{\lg 2} \right)^2 \right]$ , 则当  $n > N$  时,  $|x_n| > E$ , 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

(3) 当  $n > 10$  时,  $\lg n > 1$  及  $\lg(\lg n) > 0$ . 任给  $E > 0$ , 要  $|x_n| > E$ , 只要  $\lg(\lg n) > E$ , 即只要  $n > 10^{(10^E)}$ . 取  $N = [10^{(10^E)}]$ , 则当  $n > N$  时,  $|x_n| > E$ , 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

填下表:

$E$		10	100	1000	10000	...
(1)	$N$	10	100	1000	10000	...
(2)	$N$	11	44	99	176	...
(3)	$N$	$10^{(10^{10})}$	$10^{(10^{100})}$	$10^{(10^{1000})}$	$10^{(10^{10000})}$	...

### 【44】求证: $x_n = n^{(-1)^n}$ ( $n = 1, 2, \dots$ ) 无界, 但当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它并不成为无穷大.

提示 只要注意到当  $k$  为正整数时, 有  $x_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} 2k, & n = 2k, \\ \frac{1}{2k-1}, & n = 2k-1, \end{cases}$

命题即获证.

证 因为  $x_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} 2k, & n = 2k, k \text{ 为正整数}, \\ \frac{1}{2k-1}, & n = 2k-1, \end{cases}$

所以,  $x_{2k} \rightarrow \infty, x_{2k-1} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). 由于  $x_{2k} \rightarrow \infty$ , 故  $x_n$  无界; 但因  $x_{2k-1} \rightarrow 0$ , 故  $x_n$  并不趋于无穷大.



【45】用不等式表述下列命题:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

解 (1) 对于任给的正数  $E$ , 存在正整数  $N = N(E)$ , 使当  $n > N$  时,  $|x_n| > E$ , 此即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

(2) 对于任给的正数  $E$ , 存在正整数  $N = N(E)$ , 使当  $n > N$  时,  $x_n < -E$ , 此即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

(3) 对于任给的正数  $E$ , 存在正整数  $N = N(E)$ , 使当  $n > N$  时,  $x_n > E$ , 此即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

设  $n$  遍历正整数列, 求下列各式之值:

【46】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000n}{n^2 + 1}.$

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000}{n + \frac{1}{n}} = 0.$

【47】 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$

【48】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}.$

解 因为  $\sin n!$  有界:  $|\sin n!| \leq 1$  及  $\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1} = 0.$

【49】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}.$

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{3}.$

【50】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} \quad (|a| < 1, |b| < 1).$

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \frac{1-b}{1-a}.$

【51】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right).$

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$

【52】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right].$

提示 分别令  $n=2k$  及  $n=2k+1$  ( $k$  为正整数), 易知极限不存在.

解 当  $n=2k$  时 ( $k$  为正整数),

$$\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} = \frac{1}{2k} - \frac{2}{2k} + \frac{3}{2k} - \cdots - \frac{2k}{2k} = \frac{-k}{2k} = -\frac{1}{2};$$

当  $n=2k+1$ ,

$$\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} = \frac{1}{2k+1} - \frac{2}{2k+1} + \frac{3}{2k+1} - \cdots + \frac{2k+1}{2k+1} = \frac{k+1}{2k+1} \rightarrow \frac{1}{2};$$

由于取不同方式时, 所得的极限值不同, 所以, 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right]$  不存在.

【53】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right].$

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right] = \frac{1}{3}.$



【54】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right]$ .

提示 令  $f(n) = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3}$ , 先证  $\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} = 8f(2n) - 4f(n)$ .

利用 53 题的结果即获解.

解 设  $f(n) = \frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3}$ , 由 53 题即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} [8f(2n) - 4f(n)] = \frac{4}{3}.$$

【55】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right)$ .

提示 令  $f(n) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$  及  $g(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ ,

易证  $f(n) = g(n) + 1 - \frac{2n+1}{2^n}$ . 利用 58 题的结果即获解.

解 设  $f(n) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$ ,  $g(n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ ,

则有  $2f(n+1) - g(n) = f(n) + 1$ , 又由  $2f(n+1) - f(n) = f(n) + \frac{2n+1}{2^n} = g(n) + 1$ , 故

$$f(n) = g(n) + 1 - \frac{2n+1}{2^n}.$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} [g(n) + 1] = 3$  及  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2^n} = 0$ , 故得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right) = 3$ .

\* ) 参看 58 题.

【56】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$ .

解  $\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ,  $\cdots$ ,  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ,

相加之, 得  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

【57】  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2})$ .

解 由于  $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2} = 2^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)} = 2^{\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right]}$ ,

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right]} = 2$ .

证明下列等式:

【58】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ .

提示  $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$  ( $n > 2$ ).

证 因为  $2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \cdots + 1 > \frac{n(n-1)}{2}$  ( $n > 2$ ),

故  $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$ ; 又因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0$ , 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ .

【59】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ .



提示  $0 < \frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n} \quad (n \geq 3).$

证 因为  $0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdots \frac{2}{n} \leq \frac{4}{n}$  及  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} = 0$ , 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ .

【60】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1).$

提示  $a^n > \frac{n^2(a-1)^2}{4} \quad (n > 2)$ . 分别就  $k \leq 0, k=1$  及  $k > 0$  加以证明.

证 令  $a = 1 + \lambda \quad (\lambda > 0)$ ,

则  $a^n = (1 + \lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \cdots + \lambda^n > \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 \quad (n > 2).$

当  $n > 2$  时,  $n-1 > \frac{n}{2}$ , 此时,  $a^n > \frac{n^2}{4}\lambda^2 = \frac{n^2(a-1)^2}{4}$ .

分三种情况:

(1) 当  $k \leq 0$  时, 这时显然有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n \cdot n^{-k}} = 0$ .

(2) 当  $k=1$  时,  $0 < \frac{n^k}{a^n} = \frac{n}{a^n} < \frac{4n}{n^2(a-1)^2}$ , 而  $\frac{4n}{n^2(a-1)^2} \rightarrow 0$ , 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$ ;

(3) 当  $k > 0$  时,  $\frac{n^k}{a^n} = \left[ \frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n} \right]^k$ , 而  $a^{\frac{1}{k}} > 1$ , 于是由(2)知,  $\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n} \rightarrow 0$ , 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ .

总之, 当  $a > 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ .

【61】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ .

提示 令  $k$  代表任一大于  $2|a|$  的正整数, 则当  $n > k$  时, 有  $0 < \left| \frac{a^n}{n!} \right| < \frac{(2|a|)^k}{2^n}$ .

证 令  $k$  代表任何一个大于  $2|a|$  的正整数, 则当  $n > k$  时, 有

$$0 < \left| \frac{a^n}{n!} \right| = \left( \frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdots \frac{|a|}{k} \right) \left( \frac{|a|}{k+1} \cdot \frac{|a|}{k+2} \cdots \frac{|a|}{n} \right) < |a|^k \left( \frac{1}{2} \right)^{n-k} = \frac{(2|a|)^k}{2^n}.$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2|a|)^k}{2^n} = 0$ , 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ .

【62】  $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$ , 若  $|q| < 1$ .

提示 分别就  $0 < q < 1$ ,  $-1 < q < 0$  及  $q=0$  加以证明.

证 (1) 当  $0 < q < 1$  时, 可令  $q = \frac{1}{a}$ , 其中  $a > 1$ , 所以, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $nq^n = \frac{n}{a^n} \rightarrow 0^{*})$ ;

(2) 当  $-1 < q < 0$  时, 可令  $q = -q'$ , 其中  $0 < q' < 1$ , 所以, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $nq^n = (-1)^n nq'^n \rightarrow 0$ ;

(3) 当  $q=0$  时,  $nq^n = 0$ .

总之, 当  $|q| < 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$ .

\* ) 利用 60 题的结果.

【63】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0).$

提示 分别就  $a=1, a>1$  及  $0 < a < 1$  三种情形加以证明.

证 (1) 当  $a=1$  时, 等式显然成立;

(2) 当  $a > 1$  时, 因为  $(1+\epsilon)^n > 1+n\epsilon \quad (n > 1, \epsilon > 0)$ , 则当  $n$  充分大后, 可使  $1+n\epsilon > a$ , 即  $(1+\epsilon)^n > a$ . 事实上, 只要取  $N = \left[ \frac{a-1}{\epsilon} \right]$ , 当  $n > N$  时, 就可保证这点. 所以,  $1 < \sqrt[n]{a} < 1+\epsilon$ , 于是, 当  $n > N$  时,  $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$ , 此即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ;

(3) 当  $0 < a < 1$  时, 则令  $a = \frac{1}{a'}$ , 其中  $a' > 1$ . 于是, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a'}} \rightarrow 1$ .



总之, 当  $a > 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .

【64】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 1)$

提示 利用 60 题的不等式, 先证  $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}$ .

证 先证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . 事实上, 令  $a_n = \sqrt[n]{n}$ , 则  $a_n > 1$ . 由 60 题前半部分的推导知

$$a_n^n > \frac{n^2}{4} (a_n - 1)^2, \quad \text{即} \quad n > \frac{n^2}{4} (\sqrt[n]{n} - 1)^2,$$

由此可知  $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  成立.

现任给  $\varepsilon > 0$ . 因  $a^\varepsilon > 1$  ( $a > 1$ ), 故存在  $N = N(\varepsilon)$ , 使当  $n > N$  时, 恒有  $\sqrt[n]{n} < a^\varepsilon$ , 由此可知 ( $n > N$ ),

$$0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon.$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ .

【65】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

证 在 64 题的证明过程中已证.

【66】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ .

证 由数学归纳法易证  $n! \geq \frac{1}{2} n^{\frac{n}{2}}$ , 从而,  $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq 2^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , 又因  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ , 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ .

【67】 当  $n$  充分大时, 下列各组表达式中哪个更大些?

(1)  $100n + 200$  或  $0.01n^2$ ; (2)  $2^n$  或  $n^{1000}$ ; (3)  $1000^n$  或  $n!$ .

证 (1) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n + 200}{0.01n^2} = 0$ , 所以, 当  $n$  充分大时,  $0.01n^2$  较  $100n + 200$  大些.

(2) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1000}}{2^n} = 0^{**}$ , 所以, 当  $n$  充分大时,  $2^n$  较  $n^{1000}$  大些.

(3) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000^n}{n!} = 0^{**}$ , 所以, 当  $n$  充分大时,  $n!$  较  $1000^n$  大些.

\* ) 利用 60 题的结果.

\*\* ) 利用 61 题的结果.

【68】 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0$ .

提示 利用 10 题的结果及夹逼准则.

证 因为  $0 < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}^{**}$ , 又因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$ , 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0$ .

\* ) 利用 10 题的结果.

【69】 证明: 数列  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 是单调增加的, 且上方有界. 而数列  $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

( $n = 1, 2, \dots$ ) 是单调减少的, 且下方有界. 由此推出这些数列有公共的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

证明思路 首先, 将  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  展开, 可得

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots$$



$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

当  $n$  增加时, 上式的项数增多, 而且每个括弧内的数值也增大, 故知数列  $x_n (n=1, 2, \cdots)$  单调增加. 由上式, 利用  $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}} (k > 2)$ , 可得  $x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$ , 即数列  $x_n$  上方有界.

其次, 由

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n},$$

即易推出  $y_{n-1} > y_n$ , 故知数列  $y_n (n=1, 2, \cdots)$  单调减少. 又显然可知  $y_n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 + \frac{n}{n} = 2$ , 即数列  $y_n$  下方有界.

$$\begin{aligned} \text{证 } x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + C_n^2 \frac{1}{n^2} + C_n^3 \frac{1}{n^3} + \cdots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

其中每一项都为正, 当  $n$  增加时, 不但对应的项数增多, 而且每一个括弧内的数值也增大, 所以, 数列  $x_n (n=1, 2, \cdots)$  单调增加.

又当  $k > 2$  时,  $\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1$ ,  $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$ , 所以,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3,$$

此即数列  $x_n (n=1, 2, \cdots)$  上方有界.

由此, 我们知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  存在, 以  $e$  表之.

其次, 由于

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n},$$

即  $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \frac{n+1}{n}$ , 也即  $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ , 所以,  $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ , 此即  $y_{n-1} > y_n$ ,

因而, 数列  $y_n (n=1, 2, \cdots)$  单调减少. 又因

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2,$$

所以, 数列  $y_n (n=1, 2, \cdots)$  下方有界.

由此, 我们知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  存在, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e.$$

于是,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ .

**【70】** 证明:  $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} (n=1, 2, \cdots)$ . 当指数  $n$  是什么样的数值时, 表达式  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  与数  $e$  之差小于 0.001?

**证明思路** 利用 69 题的结果知  $0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ , 由此即得不等式

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}.$$

当  $n \geq 3000$  时,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  与  $e$  之差小于 0.001.



证 利用 69 题的结果知  $0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ,

即  $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,

而  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right] = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$ ,

因而  $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$ .

其次, 要  $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 0.001$ , 只要  $\frac{3}{n} \leq 0.001$ , 即只要  $n \geq 3000$ , 所以, 当指数  $n$  是代表任一不小于 3000 的正整数, 表示式  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  与数  $e$  之差就小于 0.001.

【71】 设  $p_n (n=1, 2, \dots)$  为趋于  $+\infty$  的任意数列, 而  $q_n (n=1, 2, \dots)$  为趋于  $-\infty$  的任意数列 ( $p_n, q_n \notin [-1, 0]$ ). 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

证明思路 首先, 令  $k_n = [p_n]$ , 利用 69 题的结果可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} = e$ .

又由  $\frac{1}{k_n} \geq \frac{1}{p_n} > \frac{1}{k_n+1}$ , 可证得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$ .

其次, 令  $q_n = -p_n$ , 即得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e$ .

证 令  $k_n = [p_n]$ , 即  $k_n$  表  $p_n$  的整数部分, 则  $k_n \leq p_n < k_n + 1$ .

由于  $p_n \rightarrow +\infty$ , 故  $k_n \rightarrow +\infty$ , 从而, 显然  $\left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \rightarrow e$ . (参看 69 题题解). 由于

$$\frac{1}{k_n} \geq \frac{1}{p_n} > \frac{1}{k_n+1}, \quad \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} > \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} > \left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n},$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} = e$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} \left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{-1} = e$ ,

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$ .

其次, 若  $q_n \rightarrow -\infty$ , 令  $q_n = -p_n$ , 其中  $p_n \rightarrow +\infty$ . 于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p_n}{p_n-1}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n-1}\right)^{p_n-1} \left(1 + \frac{1}{p_n-1}\right) = e,$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e$ .

【72】 已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e$ . 由此推出公式

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n},$$

其中  $0 < \theta_n < 1$ , 并计算数  $e$  精确到  $10^{-5}$ .

证明思路 首先, 令  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , 由 69 题证明中  $x_n$  的展式知: 任意固定  $k$ , 当  $n > k$  时, 有

$$x_n > 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

两端令  $n \rightarrow \infty$  取极限, 得  $e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!}$ . 由于此式对任何  $k$  均成立, 故得

$$e \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!}\right).$$

另一方面, 由 69 题证明中  $x_n$  的展式又知: 对任何  $n$ , 有  $x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ , 两端令  $n \rightarrow \infty$  取极



限,得

$$e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right).$$

于是,  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right)$ .

其次,令  $\omega_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ ,则有

$$0 < \omega_{n+m} - \omega_n < \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}} \right] < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

固定  $n$ ,并让  $m \rightarrow \infty$  取极限,得  $0 < e - \omega_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$ .

由  $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$  得  $0 < e - \omega_n < \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}$ ,从而可得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n! \cdot n}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

又经计算可得  $e = 2.71828 \pm 0.00001$ .

证 由 69 题证明中  $x_n$  的展式知:

$$\begin{aligned} x_n &= \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{3!} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 1 - \frac{2}{n} \right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left( 1 - \frac{k-1}{n} \right) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left( 1 - \frac{n-1}{n} \right). \end{aligned}$$

若固定  $k$ ,且  $n > k$ ,则有

$$x_n > 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{3!} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 1 - \frac{2}{n} \right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left( 1 - \frac{k-1}{n} \right),$$

今使  $n$  趋于无穷,在上式两端取极限,得  $e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!}$ . 由于此不等式对任何正整数  $k$  皆成立,因此,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} \right) \leq e.$$

另一方面,由 69 题证明中  $x_n$  的展式又知:对任何正整数  $n$ ,有  $x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ ,及  $x_n \rightarrow e$ ,两端令  $n \rightarrow \infty$  取极限,得

$$e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right).$$

于是,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = e$ .

其次,设  $\omega_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ ,则

$$\begin{aligned} 0 < \omega_{n+m} - \omega_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} = \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)} \right\} \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}} \right\} < \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}, \end{aligned}$$

今让  $n$  固定不变,并让  $m$  趋于无穷,取极限,得

$$0 \leq e - \omega_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

由于  $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$ ,所以,  $0 < e - \omega_n < \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}$ ,即  $0 < e - \omega_n = \frac{\theta_n}{n! \cdot n}$ ,其中  $0 < \theta_n < 1$ ,因而,



$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}. \quad (1)$$

下面将用公式(1)计算  $e$ , 使之精确到  $10^{-5}$ . 首先须确定怎样选取  $n$ , 才能实现这一精确度. 取  $n=8$ , 在公式(1)中的余项已是小于

$$\frac{1}{8!8} < 0.0000032,$$

所以弃去它时, 由公式所造成的误差远远地小于所规定的限度. 因此, 取  $n=8$  计算之. 其次, 还须考虑计算每一项时的舍入误差, 为保证  $e$  精确到  $10^{-5}$ , 我们在计算每一项时, 计算到第六位小数上四舍五入凑成整数, 则舍入误差总的不超过  $\frac{1}{2 \cdot 10^6} \times 6 = \frac{3}{10^6}$ . 于是, 总误差不超过  $6.2 \times 10^{-6} < 10^{-5}$ .

列表:

$$\begin{array}{r} 2.000000 \\ \frac{1}{2!} = 0.500000 \\ \frac{1}{3!} = 0.166667 \quad (-) \\ \frac{1}{4!} = 0.041667 \quad (-) \\ \frac{1}{5!} = 0.008333 \quad (+) \\ \frac{1}{6!} = 0.001389 \quad (-) \\ \frac{1}{7!} = 0.000198 \quad (+) \\ \frac{1}{8!} = 0.000025 \quad (-) \\ \hline 2.718279 \end{array}$$

考虑到修正数的符号, 则总误差介于  $-\frac{4}{10^6}$  和  $\frac{2}{10^6}$  之间, 因而, 数  $e$  介于 2.718275 及 2.718281 之间, 所以,

$$e = 2.71828 \pm 0.00001.$$

**【73】** 证明: 数  $e$  为无理数.

提示 用反证法.

证 假设  $e$  为有理数  $\frac{m}{n}$ , 则对于这个  $n$  有公式

$$\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

在等式两端同乘以  $n!$ , 我们即得出左端是整数, 而右端是整数加一真分数  $\frac{\theta_n}{n}$ , 但这是矛盾的. 所以, 数  $e$  为无理数.

**【74】** 证明不等式:  $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$ .

证明思路 由  $\sqrt{k(n-k)} \leq \frac{n}{2}$ , 两边取对数, 并就  $k$  从 1 到  $n-1$  相加, 得

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln k \leq (n-1) \ln \frac{n}{2}, \quad \text{从而可得 } n! \leq 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n < e \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

再令  $x_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , 可得  $\frac{x_n}{x_{n-1}} < n$ . 注意到  $x_1 = \frac{1}{e} < 1$ , 即知  $x_n = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}} < n!$ .

证 由  $\sqrt{k(n-k)} \leq \frac{n}{2}$ , 则  $\frac{1}{2} [\ln k + \ln(n-k)] \leq \ln \frac{n}{2}$ , 从而,



$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln k \leq (n-1) \ln \frac{n}{2}, (n-1)! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}.$$

两边同乘以  $\frac{n}{2}$ , 得  $\frac{1}{2}n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$ . 于是  $n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$ , 即  $n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$ .

再证  $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$ . 设  $x_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , 则有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}e} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}n}{e} < n.$$

所以 (注意到  $x_1 = \frac{1}{e} < 1$ ),  $x_n = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}} < n!$ . 从而, 证得  $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$ .

【75】证明不等式:

(1)  $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ , 其中  $n$  为任意的正整数; (2)  $1+a < e^a$ , 其中  $a$  为异于零的实数.

证 (1) 因为  $1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ , 两边取对数, 得  $0 < n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$ , 故  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ ;

又因为  $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ , 两边取对数, 得  $1 < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ , 故  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$ .

因而  $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ .

(2)  $(1+x)^n \geq 1+nx$  ( $x>0, n$  为正整数).

设  $a$  为正有理数:  $a = \frac{p}{q}$ ,  $p, q$  是正整数, 则由于  $e > \left(1 + \frac{1}{q}\right)^q$ , 故

$$e^a > \left(1 + \frac{1}{q}\right)^{aq} = \left(1 + \frac{1}{q}\right)^p \geq 1 + \frac{p}{q} = 1+a.$$

至于  $a$  为任意实数 ( $\neq 0$ ) 时的证明见 1289 题(1).

【76】求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a$  ( $a>0$ ), 式中  $\ln a$  是取  $e=2.718\cdots$  作底时, 数  $a$  的对数.

证 先设  $a>1$ . 令  $b_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$ , 则  $b_n > 0$ , 且  $\frac{\ln a}{n} = \ln(1+b_n)$ , 故

$$n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a \frac{b_n}{\ln(1+b_n)}.$$

由于  $b_n \rightarrow 0$ , 故存在正整数  $N$ , 使当  $n>N$  时,  $0 < b_n < 1$ . 于是, 对每个  $n>N$ , 存在唯一正整数  $k_n$ , 使  $\frac{1}{k_n+1} \leq b_n < \frac{1}{k_n}$ . 由于  $b_n \rightarrow 0$ , 故  $k_n \rightarrow +\infty$ . 由 75 题(1)知

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \cdots),$$

故  $\frac{1}{k_n+2} < \ln\left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right) \leq \ln(1+b_n) < \ln\left(1 + \frac{1}{k_n}\right) < \frac{1}{k_n}$ .

从而,  $1 - \frac{1}{k_n+1} = \frac{k_n}{k_n+1} < \frac{b_n}{\ln(1+b_n)} < \frac{k_n+2}{k_n} = 1 + \frac{2}{k_n}$ ,

由于  $k_n \rightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 故  $\frac{b_n}{\ln(1+b_n)} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 由此得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a.$$

现设  $0 < a < 1$ . 则  $\frac{1}{a} > 1$ . 于是, 由上结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (-a^{\frac{1}{n}}) \cdot n \left( \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \right] = -\ln \frac{1}{a} = \ln a.$$

当  $a=1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a$  显然成立, 故此式对任何  $a>0$  成立. 证毕.



利用关于单调有界数列极限存在的定理,证明以下各数列的收敛性:

【77】  $x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \cdots + \frac{p_n}{10^n}$  ( $n=1, 2, \cdots$ ). 式中  $p_i$  ( $i=0, 1, 2, \cdots$ ) 是非负整数, 并且从  $p_1$  起不大于

9.

证  $x_{n+1} = x_n + \frac{p_{n+1}}{10^{n+1}}$ , 由于  $p_{n+1} > 0$ , 所以,  $x_{n+1} > x_n$ , 因而, 数列  $x_n$  ( $n=1, 2, \cdots$ ) 是单调增加的. 其次由于  $p_0 + \frac{1}{10} < x_n \leq 9\left(\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^n}\right) + p_0 < 1 + p_0$ , 所以, 数列  $x_n$  ( $n=1, 2, \cdots$ ) 是有界的.

因而, 根据单调有界数列极限存在的定理, 可知数列  $\{x_n\}$  是收敛的.

【78】  $x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{n+9}{2n-1}$ .

解 当  $n \leq 10$  时, 虽然  $\{x_n\}$  单调增加; 但当  $n > 10$  时, 由  $\frac{n+9}{2n-1} < 1$  知数列  $\{x_n\}$  单调减少. 注意有下界  $x_n > 0$  ( $n=1, 2, \cdots$ ). 因而, 数列  $\{x_n\}$  收敛.

【79】  $x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ .

证 因为  $x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < x_n$ , 所以, 数列  $\{x_n\}$  是单调减少的.

又因  $0 < x_n < 1$ , 所以, 数列  $\{x_n\}$  是有界的. 因而, 数列  $\{x_n\}$  收敛.

【80】  $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ .

证 因为  $x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > x_n$ , 所以, 数列  $\{x_n\}$  是单调增加的.

又因  $1 + a < e^a$ , 所以,

$$0 < x_n < e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{4}} \cdot \cdots \cdot e^{\frac{1}{2^n}} = e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}} < e,$$

即数列是有界的. 因而, 数列  $\{x_n\}$  收敛.

【81】  $x_1 = \sqrt{2}$ ,  $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ,  $\cdots$ ,  $x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ 重根号}}, \cdots$ ,

证 数列  $\{x_n\}$  显然是单调增加的.

其次, 利用数学归纳法可以证明:  $x_n < \sqrt{2} + 1$ . 事实上, 对于  $n=1$  是成立的. 假设  $x_k < \sqrt{2} + 1$ , 则

$$x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + \sqrt{2} + 1} < \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1,$$

因而, 不等式对一切正整数均成立.

由此知数列  $\{x_n\}$  是有界的. 因而, 数列  $\{x_n\}$  收敛.

利用柯西准则, 证明以下各数列的收敛性:

【82】  $x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n$ , 其中  $|a_k| < M$  ( $k=0, 1, 2, \cdots$ ) 且  $|q| < 1$ .

证  $|x_m - x_n| = |a_{n+1} q^{n+1} + \cdots + a_m q^m| \leq |a_{n+1}| \cdot |q|^{n+1} + \cdots + |a_m| \cdot |q|^m$

$$< M \cdot |q|^{n+1} (1 + |q| + \cdots + |q|^{m-n-1}) < M \cdot |q|^{n+1} \cdot \frac{1}{1 - |q|} \quad (m > n).$$

任给  $\epsilon > 0$ , 由于  $|q|^{n+1} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 故存在正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时, 有

$$|q|^{n+1} < \frac{(1 - |q|)\epsilon}{M}.$$

于是, 当  $m > n > N$  时, 恒有  $|x_m - x_n| < \epsilon$ . 由此可知, 数列  $\{x_n\}$  收敛.

【83】  $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$ .

证  $|x_m - x_n| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin m}{2^m} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}} \right) < \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \quad (m > n).$



任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \right\rceil$ , 则当  $m > n > N$  时, 必有  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ , 从而  $|x_m - x_n| < \varepsilon$ , 所以, 数列  $\{x_n\}$  收敛.

【84】  $x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}.$

提示 利用不等式  $\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (k=2, 3, \cdots).$

证  $|x_m - x_n| = \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\cos m!}{m(m+1)} \right| < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}$   
 $< \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \quad (m > n).$

任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ , 则当  $m > n > N$  时, 必有  $|x_m - x_n| < \varepsilon$ , 所以, 数列  $\{x_n\}$  收敛.

【85】  $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$

证  $|x_m - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}, \quad (m > n).$

以下与 84 题证法步骤相同, 故知数列  $\{x_n\}$  收敛.

【86】 对于数列  $x_n (n=1, 2, \cdots)$ , 若存在数  $c$ , 使得

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < c \quad (n=2, 3, \cdots),$$

则称数列  $x_n (n=1, 2, \cdots)$  有有界变差.

证明: 凡有有界变差的数列是收敛的. 举出一个收敛数列而无有界变差的例子.

证 设  $y_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| \quad (n=2, 3, \cdots)$ , 则数列  $\{y_n\}$  单调增加且有界, 所以, 它是收敛的.

根据柯西收敛准则, 对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在数  $N$ , 使当  $m > n > N$  时,  $|y_m - y_n| < \varepsilon$ , 即

$$|x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

而对于数列  $\{x_n\}$  有

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon, \end{aligned}$$

所以, 数列  $\{x_n\}$  是收敛的.

数列:  $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, (-1)\frac{1}{n}, \cdots$ , 它是以零为极限的收敛数列. 但它不是有有界变差的. 事实上,

$$\begin{aligned} &|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + |x_4 - x_3| + \cdots + |x_{2n} - x_{2n-1}| \\ &> |x_2 - x_1| + |x_4 - x_3| + \cdots + |x_{2n} - x_{2n-1}| \\ &= 2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \right), \end{aligned}$$

而数列  $\omega_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$  是发散的\*, 又是递增的, 故  $\omega_n \rightarrow +\infty$ . 于是,

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{2n} - x_{2n-1}|$$

不是有界的, 因而, 收敛数列  $\{x_n\}: 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \cdots$  无有界变差.

\* ) 详见 88 题的证明.

【87】 试叙述“某数列不满足柯西准则”的含义.

解 即存在一个  $\varepsilon_0 > 0$ , 不论对于怎样的数  $N$ , 总有  $n_0 > N, m_0 > N$ , 使得  $|x_{n_0} - x_{m_0}| \geq \varepsilon_0$ .



【88】利用柯西准则,证明:数列  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$  的发散性.

提示 取  $m = 2n$ .

证 取  $m = 2n$ , 则

$$|x_m - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

所以,数列  $\{x_n\}$  发散.

【89】证明:若数列  $x_n (n=1, 2, \cdots)$  收敛,则它的任何子数列  $x_{p_n}$  也收敛,且有同一极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

证 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则对于任给的  $\epsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时,  $|x_n - a| < \epsilon$ .

今因正整数列  $\{p_k\}$  以  $+\infty$  为其极限, 所以, 对于  $N$ , 存在正整数  $k_0$ , 使当  $k > k_0$  时,  $p_k > N$ ,

此时  $|x_{p_k} - a| < \epsilon (k > k_0)$ , 所以, 子数列  $\{x_{p_k}\}$  收敛, 且  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

【90】证明:若单调数列的某一子数列收敛,则此单调数列本身是收敛的.

证 不失一般性,假设数列  $\{x_n\}$  单调增加,其一子数列  $\{x_{p_n}\}$  收敛于  $a$ . 则对于任给的  $\epsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使当  $k > N$  时,  $|x_{p_k} - a| < \epsilon$ , 令  $N' = p_{N+1}$ . 设  $n > N'$ , 由于  $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots \rightarrow +\infty$ , 故必有  $p_k (k > N)$  使  $p_k \leq n < p_{k+1}$ . 由上知

$$|x_{p_k} - a| < \epsilon, \quad |x_{p_{k+1}} - a| < \epsilon.$$

而  $x_{p_k} \leq x_n \leq x_{p_{k+1}}$  (因  $x_n$  递增), 故必  $|x_n - a| < \epsilon$ . 由此可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 即  $\{x_n\}$  是收敛的.

【91】证明:若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ .

提示 利用极限定义及  $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$ .

证 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则对于任给的  $\epsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时,  $|x_n - a| < \epsilon$ .

又因  $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$ , 故当  $n > N$  时,  $||x_n| - |a|| < \epsilon$ , 于是,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ .

【92】设  $x_n \rightarrow a$ , 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$  是什么?

解 按题意, 应设  $x_n \neq 0 (n=1, 2, \cdots)$ .

若  $a \neq 0$ , 则显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{a}{a} = 1$ .

若  $a = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$  可能不存在, 例如, 若  $\{x_n\}$  为:

$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^3}, \cdots$$

则  $x_n \rightarrow 0$ , 但显然  $\frac{x_{2m}}{x_{2m-1}} \rightarrow 1, \frac{x_{2m+1}}{x_{2m}} \rightarrow \frac{1}{2}$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$  不存在. 下面我们证明, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$  存在, 设为  $b$ , 则必有  $-1 \leq b \leq 1$ .

用反证法. 若  $|b| > 1$ . 取  $r$ , 使  $|b| > r > 1$ . 利用 91 题结果, 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = |b|$ . 于是, 存在正整数  $N$ ,

使当  $n \geq N$  时, 恒有  $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > r$ . 从而, 当  $n > N$  时,

$$|x_n| = |x_N| \cdot \left| \frac{x_{N+1}}{x_N} \right| \cdot \left| \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}} \right| \cdots \left| \frac{x_n}{x_{n-1}} \right| > |x_N| \cdot r^{n-N},$$

由此可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , 此与  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  矛盾, 故必有  $-1 \leq b \leq 1$ .

总结起来, 若  $a \neq 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ ; 若  $a = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$  可能存在也可能不存在, 当存在时, 它必属于

$[-1, 1]$ .

【93】证明:收敛的数列是有界的.



证 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . 要证  $\{x_n\}$  有界. 对于正数  $\epsilon = 1$ , 存在正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时, 必有  $|x_n - a| < 1$ , 从而  $|x_n| < |a| + 1 (n > N)$ . 于是, 令

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |a| + 1\}.$$

则  $|x_n| \leq M (n = 1, 2, \dots)$ . 由此可知  $\{x_n\}$  有界.

**【94】** 证明: 收敛的数列或达到其上确界, 或达到其下确界, 或两者都达到. 举出这三类数列的例子.

证 (1) 对于各项恒为常数的数列, 显然上、下确界均达到.

(2) 对于不恒为常数的收敛数列, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 则或存在某  $x_i > A$ , 或存在某  $x_j > A$ , 或这种  $x_i, x_j$  都存在. 作  $A$  的充分小的邻域使它不包含  $x_i$  或  $x_j$ , 或  $x_i, x_j$  都不包含在此邻域内. 由于  $x_n \rightarrow A$ , 故在这三种情况的任一种下, 这个邻域外部都只有  $\{x_n\}$  中的有限个元素. 因此分别为必达到上确界、必达到下确界或上、下确界均必达到. 在第一种情形下确界可能达到, 也可能达不到; 在第二种情形, 上确界可能达到, 也可能达不到.

**【95】** 证明: 趋近于  $+\infty$  的数列  $x_n (n = 1, 2, \dots)$  必定达到其下确界.

证 由题设可知存在正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时恒有  $x_n > x_1$ , 于是, 显然,  $x_1, x_2, \dots, x_N$  中的最小者即为  $\{x_n\}$  的下确界.

求数列  $x_n (n = 1, 2, \dots)$  的最大项, 设:

**【96】**  $x_n = \frac{n^2}{2^n}.$

提示 当  $n = 3$  时,  $n^2 > 2^n$ ; 当  $n \neq 3$  时,  $n^2 \leq 2^n$ .

解 当  $n = 3$  时;  $n^2 > 2^n$ ; 当  $n \neq 3$  时,  $n^2 \leq 2^n$ ; 所以, 最大项为  $x_3 = \frac{9}{8}$ .

**【97】**  $x_n = \frac{\sqrt{n}}{100 + n}.$

提示  $x_n = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{n} - \frac{10}{\sqrt[4]{n}}\right)^2 + 20}, x_{100} = \frac{1}{20}.$

解  $x_n = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{n} - \frac{10}{\sqrt[4]{n}}\right)^2 + 20} \leq \frac{1}{20}$ , 其中  $x_{100} = \frac{1}{20}$ , 所以, 最大项为  $x_{100} = \frac{1}{20}$ .

**【98】**  $x_n = \frac{1000^n}{n!}.$

提示  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1000}{n+1}.$

解  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1000}{n+1}$ . 当  $n+1 < 1000$  时,  $x_{n+1} > x_n$ ; 当  $n+1 > 1000$  时,  $x_{n+1} < x_n$ .

所以, 最大项为  $x_{999} = x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!}.$

求数列  $x_n (n = 1, 2, \dots)$  的最小项, 设:

**【99】**  $x_n = n^2 - 9n - 100.$

解 若  $n^2 - 9n \geq 0$ , 则  $n \geq 9$ ; 若  $n^2 - 9n < 0$ , 则  $0 < n < 9$ .

所以, 最小项从  $x_1$  到  $x_8$  中去寻找, 比较之, 得  $x_n$  的最小项为  $x_4 = x_5 = -120$ .

**【100】**  $x_n = n + \frac{100}{n}.$

提示  $x_n = \left(\sqrt{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}\right)^2 + 20$  及  $x_{10} = 20$ .

解  $x_n = \left(\sqrt{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}\right)^2 + 20 \geq 20$ , 其中  $x_{10} = 20$ , 所以, 最小项为  $x_{10} = 20$ .



求数列  $x_n (n=1, 2, \dots)$  的  $\inf\{x_n\}$ ,  $\sup\{x_n\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  及  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ , 设:

**【101】**  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ .

解  $\inf\{x_n\} = 0$ ;  $\sup\{x_n\} = 1$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$   $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

**【102】**  $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$ .

解  $\inf\{x_n\} = -1$ ;  $\sup\{x_n\} = \frac{3}{2}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ;  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

**【103】**  $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$ .

解  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1 - \frac{2}{3}$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 1 + \frac{4}{5}$ ,  $\dots$ .

$\inf\{x_n\} = 0$ ;  $\sup\{x_n\} = 2$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ;  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ .

**【104】**  $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ .

解  $x_{4k} = 1 - 2 + 3$ ,  $x_{4k+1} = 1 + 2 + 3$ ,  $x_{4k+2} = 1 - 2 - 3$ ,  $x_{4k+3} = 1 + 2 - 3 (k=1, 2, \dots)$ .

$\inf\{x_n\} = -4$ ;  $\sup\{x_n\} = 6$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -4$ ;  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 6$ .

**【105】**  $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}$ .

解  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})$ ,  $x_3 = \frac{1}{2}$ ,  $x_4 = \frac{3}{5}(-\frac{1}{2})$ ,  $x_5 = \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})$ ,  $x_6 = \frac{5}{7}$ ,

$x_7 = \frac{3}{4}(-\frac{1}{2})$ ,  $x_8 = \frac{7}{9}(-\frac{1}{2})$ ,  $x_9 = \frac{4}{5}$ ,  $\dots$ .

$\inf\{x_n\} = -\frac{1}{2}$ ;  $\sup\{x_n\} = 1$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{1}{2}$ ;  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

**【106】**  $x_n = (-1)^n n$ .

解  $\inf\{x_n\} = -\infty$ ;  $\sup\{x_n\} = +\infty$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ;  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

**【107】**  $x_n = -n[2 + (-1)^n]$ .

解  $\inf\{x_n\} = -\infty$ ;  $\sup\{x_n\} = -1$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ;  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

**【108】**  $x_n = n(-1)^n$ .

解  $\inf\{x_n\} = 0$ ;  $\sup\{x_n\} = +\infty$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ;  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

**【109】**  $x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}$ .

解  $x_1 = 1 + 1$ ,  $x_2 = 1 + 0$ ,  $x_3 = 1 - 3$ ,  $x_4 = 1 + 0$ ,  $x_5 = 1 + 5$ ,  $\dots$ .

$\inf\{x_n\} = -\infty$ ;  $\sup\{x_n\} = +\infty$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ;  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

**【110】**  $x_n = \frac{1}{n-10.2}$ .

解 当  $n$  由 1 到 10 时,  $x_n$  由负数往下降; 当  $n$  由 11 到  $+\infty$  时,  $x_n$  由正数往下降, 所以,

$\inf\{x_n\} = x_{10} = -5$ ;  $\sup\{x_n\} = x_{11} = 1.25$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  及  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ . 设:

**【111】**  $x_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2n\pi}{3}$ .

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{1}{2}$ ;  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .



【112】  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}$ .

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ;  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = e + 1$ .

【113】  $x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}$ .

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ;  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

【114】  $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^n \cdot (-1)^n}$ .

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ;  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$  (因  $(2^{2k} + 1)^{\frac{1}{2k}} = 2 \left(1 + \frac{1}{2^{2k}}\right)^{\frac{1}{2k}} \rightarrow 2$ ).

【115】  $x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3}$ .

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ;  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

求以下各数列的聚点:

【116】  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots$ .

解 聚点为 0 及 1.

【117】  $1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots,$   
 $\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$ .

解 聚点为  $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ . 它们分别为子数列:  $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{1 + \frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right\}, \dots$  的极限.

【118】  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$ .

解 所述数列正好包含  $(0, 1)$  中全部有理数, 故对于闭区间  $[0, 1]$  上的每一点  $x$ , 在其任意的  $\varepsilon$  邻域内均有此数列中无穷个数, 因此  $x$  必可作为某子数列的极限, 所以,  $x$  是所述数列的聚点. 由此可知  $[0, 1]$  中的任何点都是所述数列的聚点, 显然,  $[0, 1]$  外的点都不是所述数列的聚点.

【119】  $x_n = 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$ .

解 因为  $2(-1)^n$  为 2 或 -2. 所以, 聚点为 5 及 1.

【120】  $x_n = \frac{1}{2}[(a+b) + (-1)^n(a-b)]$ .

解 聚点为  $a$  及  $b$ .

【121】 试举出以已知数  $a_1, a_2, \dots, a_p$  作为聚点的数列的例子.

解 数列

$$a_1 - \frac{1}{2}, a_2 - \frac{1}{2}, \dots, a_p - \frac{1}{2}, a_1 - \frac{1}{3}, a_2 - \frac{1}{3}, \dots, a_p - \frac{1}{3}, \dots, a_1 - \frac{1}{n}, a_2 - \frac{1}{n}, \dots, a_p - \frac{1}{n}, \dots$$

显然以  $a_1, a_2, \dots, a_p$  为聚点.

【122】 试举出数列的例子, 对此数列而言, 已知数列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  的所有各项皆为其聚点, 所举数列还必有怎样的聚点?

解 例如, 数列

$$a_1 + \frac{1}{2}, a_2 + \frac{1}{2}, a_1 + \frac{1}{3}, a_2 + \frac{1}{3}, a_3 + \frac{1}{3}, a_1 + \frac{1}{4}, a_2 + \frac{1}{4}, a_3 + \frac{1}{4}, a_4 + \frac{1}{4}, \dots,$$

$$a_1 + \frac{1}{n}, a_2 + \frac{1}{n}, a_3 + \frac{1}{n}, \dots, a_n + \frac{1}{n}, \dots$$



就以  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  为其聚点.

此外,很明显,若  $\{x_n\}$  为一数列,使已知数列  $\{a_n\}$  的各项  $a_1, a_2, a_3, \dots$  皆为  $\{x_n\}$  的聚点,则已知数列  $\{a_n\}$  本身的聚点也必为数列  $\{x_n\}$  的聚点.

**【123】** 举出数列的例子:

- (1)没有有限的聚点; (2)有唯一有限的聚点,但不收敛;  
(3)有无限多的聚点; (4)以每一实数作为聚点.

**解** (1)数列  $x_n = n (n=1, 2, \dots)$  没有有限的聚点.

(2)数列:  $1, -1, \frac{1}{2}, -2, \frac{1}{3}, -3, \dots, \frac{1}{n}, -n, \dots$  有唯一有限的聚点 0, 但此数列却不收敛.

(3)118 题的数列即有无限多的聚点.

(4)我们按下述“对角线法则”来构造一个数列,使每一元素后面跟一个对应的负数,排列顺次如图 1.1.

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = -\frac{1}{2}, x_5 = 2, x_6 = -2,$$

$$x_7 = 3, x_8 = -3, x_9 = \frac{2}{2}, x_{10} = -\frac{2}{2}, x_{11} = \frac{1}{3}, x_{12} = -\frac{1}{3},$$

$\dots$

此数列以每一实数作为其聚点,即聚点的集合为  $(-\infty, +\infty)$ .

**【124】** 证明:数列  $x_n$  和  $y_n = x_n \sqrt[n]{n} (n=1, 2, \dots)$  有相同的聚点.

**证** 因为  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ , 所以,数列  $\{x_n\}$  的子数列  $\{x_{n_k}\}$  与  $\{y_n\}$  的对应子数列  $\{x_{n_k} \sqrt[n_k]{n_k}\}$  同时收敛,且具有相同的极限,此即数列  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  有相同的聚点.

**【125】** 证明:从有界的数列  $x_n (n=1, 2, \dots)$  中,永远可选出收敛的子数列  $x_{p_n} (n=1, 2, \dots)$ .

**证明思路** 可设  $a \leq x_n \leq b$ . 将区间  $[a, b]$  二等分,其中必至少有一个子区间包含  $\{x_n\}$  的无限多项,记为  $[a_1, b_1]$ . 再将区间  $[a_1, b_1]$  二等分,又可得区间  $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ , 它包含  $\{x_n\}$  的无穷多项,依次类推,得

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

每一  $[a_n, b_n]$  均包含  $\{x_n\}$  的无限多项,且  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 由此可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ .

按下法选  $\{x_n\}$  的一个子序列  $\{x_{p_k}\}$ : 先在包含于  $[a_1, b_1]$  内的诸  $x_n$  中任取一个作为  $x_{p_1}$ . 然后,在包含于  $[a_2, b_2]$  内且在  $x_{p_1}$  后面的诸  $x_n$  中任取一个作为  $x_{p_2}$ , 余类推,可得  $\{x_n\}$  的一个子序列  $\{x_{p_k}\}$ , 满足

$$a_k \leq x_{p_k} \leq b_k \quad (k=1, 2, \dots).$$

由此可得  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = c$ . 即  $\{x_{p_k}\}$  为  $\{x_n\}$  的一个收敛子数列.

**证** 因为数列  $\{x_n\}$  有界,故可设一切项满足不等式

$$a \leq x_n \leq b,$$

其中  $a, b$  为有限的实数,将区间  $[a, b]$  二等分之,得区间  $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ , 其中必至少有一个包含所给数列的无限多项,将它记为  $[a_1, b_1]$  (若两者均含无穷多项,则任取其一作为  $[a_1, b_1]$ ). 再将区间  $[a_1, b_1]$  等分之,又可得区间  $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ , 它包含所给数列的无限多项. 依次类推,于是得一串区间:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

其中每一  $[a_n, b_n]$  都包含所给数列  $\{x_n\}$  中的无限多项,且有

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

因此,根据区间套定理诸  $[a_n, b_n]$  具有唯一的公共点  $c$ , 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c.$$

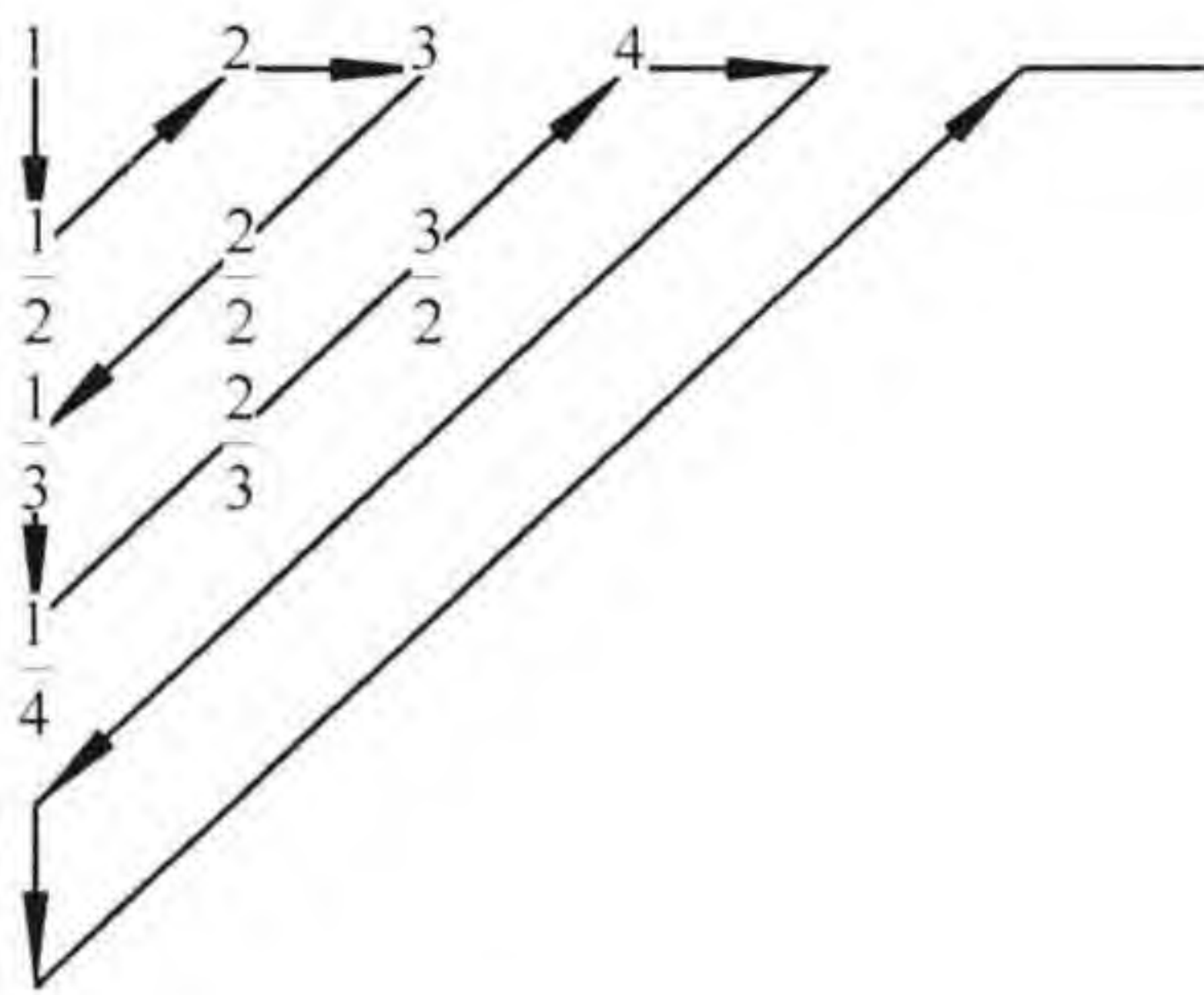


图 1.1



现按下法选出  $\{x_n\}$  的一个子数列  $\{x_{p_k}\}$ : 在包含于  $[a_1, b_1]$  内的诸  $x_n$  中任取一个作为  $x_{p_1}$ , 然后, 在包含于  $[a_2, b_2]$  内且在  $x_{p_1}$  后面的诸  $x_n$  中任取一个作为  $x_{p_2}$ , 然后, 又在包含于  $[a_3, b_3]$  内且在  $x_{p_2}$  后面的诸  $x_n$  中任取一个作为  $x_{p_3}$ . 余类推(这是可能的, 因为每个  $[a_k, b_k]$  中都包含有  $x_n$  无穷多项). 于是, 我们得出  $\{x_n\}$  的一个子数列  $\{x_{p_k}\}$ , 满足

$$a_k \leq x_{p_k} \leq b_k \quad (k=1, 2, \dots).$$

由此, 知  $|x_{p_k} - c| \leq b_k - a_k \quad (k=1, 2, \dots)$ , 故  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = c$ . 从而,  $\{x_{p_k}\}$  是  $\{x_n\}$  的一个收敛子数列.

证毕.

**【126】** 证明: 若数列  $x_n \quad (n=1, 2, \dots)$  无界, 则存在子数列  $x_{p_n} \quad (n=1, 2, \dots)$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \infty$ .

证 因  $x_n \quad (n=1, 2, \dots)$  无界, 故存在某项  $x_{p_1}$  满足  $|x_{p_1}| > 1$ . 由于数列  $x_n \quad (n=p_1+1, p_1+2, \dots)$  也无界, 故又存在某项  $x_{p_2} \quad (p_2 > p_1)$ , 使  $|x_{p_2}| > 2$ ; 又由于数列  $x_n \quad (n=p_2+1, p_2+2, \dots)$  无界, 故又存在某项  $x_{p_3} \quad (p_3 > p_2)$ , 使  $|x_{p_3}| > 3$ . 余类推. 于是, 我们得  $\{x_n\}$  的一个子数列  $\{x_{p_k}\}$ , 满足

$$|x_{p_k}| > k \quad (k=1, 2, \dots).$$

由此可知  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = \infty$ . 证毕.

**【127】** 设数列  $x_n \quad (n=1, 2, \dots)$  收敛, 而数列  $y_n \quad (n=1, 2, \dots)$  发散, 则能否断定关于数列 (1)  $x_n + y_n$ ; (2)  $x_n y_n$  的收敛性? 举出适当的例子.

解 (1)  $\{x_n + y_n\}$  一定发散. 如果  $\{x_n + y_n\}$  收敛, 则由  $(x_n + y_n) - x_n = y_n$ , 知  $\{y_n\}$  收敛, 与题设矛盾.

(2) 数列  $\{x_n y_n\}$  可能收敛, 也可能发散. 例如:

(i) 数列  $x_n = \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \dots)$  收敛, 数列  $y_n = n \quad (n=1, 2, \dots)$  发散,

而数列  $x_n y_n = 1 \quad (n=1, 2, \dots)$  是收敛的.

(ii) 数列  $x_n = \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \dots)$  收敛, 数列  $y_n = n^2 \quad (n=1, 2, \dots)$  发散,

而数列  $x_n y_n = n \quad (n=1, 2, \dots)$  却是发散的.

**【128】** 设数列  $x_n$  和  $y_n$  发散  $(n=1, 2, \dots)$ , 可否断定数列 (1)  $x_n + y_n$ ; (2)  $x_n y_n$ . 也发散呢? 举出适当的例子.

提示 不能. 例如,

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}, \quad y_n = \frac{1-(-1)^n}{2} \quad (n=1, 2, \dots).$$

解 不能. 例如, 数列

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \quad \text{及} \quad y_n = \frac{1-(-1)^n}{2} \quad (n=1, 2, \dots)$$

都发散, 但数列

$$x_n + y_n = 1 \quad (n=1, 2, \dots) \quad \text{及} \quad x_n y_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

却都是收敛的.

**【129】** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ,  $y_n \quad (n=1, 2, \dots)$  为任意数列. 能否断定  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ ? 举出适当的例子.

解 不能. 例如, 数列

$$x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{及} \quad y_n = n \quad (n=1, 2, \dots) \quad \text{的乘积} \quad x_n y_n = 1 \quad (n=1, 2, \dots),$$

当  $n \rightarrow \infty$  时趋于 1, 不趋于 0.

**【130】** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ . 是否由此可得出: 或  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , 或  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ?

提示 不能. 例如,

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}, \quad y_n = \frac{1-(-1)^n}{2} \quad (n=1, 2, \dots), \quad \text{或} \quad x_n = \frac{1}{n^2}, \quad y_n = n \quad (n=1, 2, \dots).$$



解 不能. 例如, 数列  $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$  及  $y_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 则有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ ,

但  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  及  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  均不存在.

当然, 还可举例  $x_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $y_n = n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 则  $x_n y_n \rightarrow 0$ ,  $x_n \rightarrow 0$ , 而  $\{y_n\}$  极限不存在 (当  $n \rightarrow \infty$ ).

注意, 假若已知  $x_n y_n \rightarrow 0$ , 而又已知  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  中至少有一个数列有极限的话, 则:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  或  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  至少有一个是成立的.

【131】 证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

举出在这些关系式中严格不等号成立的例子.

证明思路 (1) 先证右端不等式. 存在  $\{x_n\}$  的子数列  $\{x_{n_k}\}$  使  $x_{n_k} \rightarrow \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . 对于数列  $\{y_n\}$ , 必有子数列  $y_{n_{k_i}}$  使  $y_{n_{k_i}} \rightarrow \beta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ . 由于  $x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}} \rightarrow \alpha + \beta$ , 故  $\alpha + \beta$  为  $\{x_n + y_n\}$  的一个聚点. 由此有  $\alpha + \beta \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$  及  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \alpha + \beta \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

再证左端不等式. 存在  $\{x_n + y_n\}$  的子数列  $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$  使  $x_{n_k} + y_{n_k} \rightarrow \alpha' = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ . 对于  $\{x_{n_k}\}$ , 存在子数列  $\{x_{n_{k_i}}\}$  使  $x_{n_{k_i}} \rightarrow \beta' = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . 由于

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) - x_{n_{k_i}} \rightarrow \alpha' - \beta',$$

故  $\alpha' - \beta'$  为  $\{y_n\}$  的一个聚点. 由此有

$$\alpha' - \beta' \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \text{及} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \alpha' \geq \beta' + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(2) 同(1)的思路.

证 (1) 先证右端不等式. 根据定义, 存在  $\{x_n\}$  的子数列  $\{x_{n_k}\}$  使  $x_{n_k} \rightarrow \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . 对于数列  $\{y_n\}$ , 必有子数列  $y_{n_{k_i}} \rightarrow \beta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$ . 显然  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ . 由于  $x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}} \rightarrow \alpha + \beta$ , 故  $\alpha + \beta$  是  $\{x_n + y_n\}$  的一个聚点. 由此可知

$$\alpha + \beta \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n).$$

故得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \alpha + \beta \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

再证左端的不等式, 根据定义, 存在  $\{x_n + y_n\}$  的子数列  $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$  使  $x_{n_k} + y_{n_k} \rightarrow \alpha' = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ . 对于数列  $\{x_{n_k}\}$ , 存在子数列  $\{x_{n_{k_i}}\}$  使  $x_{n_{k_i}} \rightarrow \beta' = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ , 显然  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . 由于

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) - x_{n_{k_i}} \rightarrow \alpha' - \beta'.$$

故  $\alpha' - \beta'$  是  $\{y_n\}$  的一个聚点. 从而,

$$\alpha' - \beta' \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

由此可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \alpha' \geq \beta' + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

(2) 先证右端不等式. 根据定义, 存在  $\{x_n + y_n\}$  的一个子数列  $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$ , 使  $x_{n_k} + y_{n_k} \rightarrow r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ . 对于数列  $\{x_{n_k}\}$ , 存在子数列  $x_{n_{k_i}} \rightarrow \tau = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ . 显然  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ . 由于

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) - x_{n_{k_i}} \rightarrow r - \tau,$$

故  $r - \tau$  是  $\{y_n\}$  的一个聚点. 从而,



$$r - \tau \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

由此可知  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = r \leq \tau + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

再证左端的不等式. 根据定义, 存在  $\{y_n\}$  的一个子数列  $\{y_{n_k}\}$ , 使  $y_{n_k} \rightarrow r' = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ . 对于数列  $\{x_{n_k}\}$ , 存在子数列  $\{x_{n_{k_i}}\}$  使  $x_{n_{k_i}} \rightarrow \tau' = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ . 显然  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ . 由于

$$x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}} \rightarrow r' + \tau',$$

故  $r' + \tau'$  是  $\{x_n + y_n\}$  的一个聚点. 从而,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq r' + \tau'.$$

由此可知  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq r' + \tau' \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ . 证毕.

以下举不等号成立的例子. 例如, 令

$$\{x_n\} \text{ 为: } 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots \quad \{y_n\} \text{ 为: } 0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots.$$

则有不等式

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 1 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 2.$$

而对于数列

$$\{x_n\} \text{ 为: } 0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots \quad \{y_n\} \text{ 为: } 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots,$$

则有  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 1 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 2 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 3$ .

**【132】** 设  $x_n \geq 0$  和  $y_n \geq 0 (n=1, 2, \dots)$ . 证明:

$$(1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \text{及}$$

$$(2) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

举出在这些关系式中严格不等号成立的例子.

**证** (1) 先证右端的不等式. 根据定义, 存在  $\{x_n\}$  的一个子数列  $\{x_{n_k}\}$ , 使  $x_{n_k} \rightarrow \alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$ ; 对于数列  $\{y_{n_k}\}$ , 存在子数列  $\{y_{n_{k_i}}\}$ , 使  $y_{n_{k_i}} \rightarrow \beta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \geq 0$ . 显然  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ . 由于  $x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}} \rightarrow \alpha\beta$ , 故  $\alpha\beta$  是数列  $\{x_n y_n\}$  的一个聚点. 因此,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \alpha\beta,$$

由此, 再注意到  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ , 即得知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \alpha\beta \leq \alpha(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

再证左端的不等式. 若  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , 则此不等式显然成立, 故设  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta^* > 0$ . 于是, 存在正整数  $N_0$ , 使当  $n > N_0$  时,  $x_n > 0$ . 根据定义, 存在  $\{x_n y_n\}$  的子数列  $\{x_{n_k} y_{n_k}\}$ , 使

$$x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow \alpha' = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \geq 0.$$

对于数列  $\{x_{n_k}\}$ , 存在子数列  $\{x_{n_{k_i}}\}$ , 使

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow \beta' = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}.$$

注意到  $\beta' = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta^* > 0$  以及  $x_n > 0 (n > N_0)$ , 知

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}}) \cdot \frac{1}{x_{n_{k_i}}} \rightarrow \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

故  $\frac{\alpha'}{\beta'}$  是  $\{y_n\}$  的一个聚点. 从而,

$$\frac{\alpha'}{\beta'} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$



由此可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \alpha' \geq \beta' (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) \geq (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n)$ .

(2) 先证右端不等式, 可设  $\{y_n\}$  有界 (若  $\{y_n\}$  无界, 则  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ , 从而此不等式显然成立). 根据定义, 存在  $\{x_n y_n\}$  的子数列  $\{x_{n_k} y_{n_k}\}$ , 使

$$x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow \bar{\alpha} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \geq 0.$$

对于  $\{x_{n_k}\}$ , 存在子数列  $\{x_{n_{k_i}}\}$ , 使

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow \bar{\beta} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq 0.$$

若  $\bar{\beta} = 0$ , 则由于  $\{y_n\}$  有界, 知  $x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}} \rightarrow 0$ , 从而  $\bar{\alpha} = 0$ , 此时所要证的不等式显然成立, 故下设  $\bar{\beta} > 0$ . 于是, 当  $i$  充分大时 ( $i > i_0$ ),  $x_{n_{k_i}} > 0$ , 故得

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}}) \cdot \frac{1}{x_{n_{k_i}}} \rightarrow \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$$

因此,  $\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$  是  $\{y_n\}$  的一个聚点, 从而,  $\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ ; 由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \bar{\alpha} \leq \bar{\beta} (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \leq (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

再证左端的不等式. 根据定义, 存在  $\{y_n\}$  的一子数列  $\{y_{n_k}\}$ , 使  $y_{n_k} \rightarrow r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \geq 0$ , 对于  $\{x_{n_k}\}$ , 存在子数列  $\{x_{n_{k_i}}\}$ , 使

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow \tau = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq 0.$$

显然  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$ . 由于

$$x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}} \rightarrow \tau r,$$

故  $\tau r$  是  $\{x_n y_n\}$  的一个聚点. 从而,

$$\tau r \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n),$$

由此可知  $(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) \leq \tau r \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n)$ . 证毕.

下面举不等号成立的例子. 例如, 令

$$\{x_n\} \text{ 为: } \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \dots \quad \{y_n\} \text{ 为: } 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, \dots$$

则有不等式

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) = \frac{1}{8} < \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \frac{1}{2} < (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) = 1.$$

再令

$$\{x_n\} \text{ 为: } 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, \dots \quad \{y_n\} \text{ 为: } \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \dots$$

则有不等式

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) = \frac{1}{2} < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = 1 < (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) = 4.$$

**【133】** 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 则对于任何数列  $y_n (n=1, 2, \dots)$ , 有:

$$(1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(2) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (x_n \geq 0).$$

证 (1) 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , 从而, 利用 131 题的结果可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n),$$

故得



$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(2)分三种情形:(i)设  $y_n \geq 0 (n=1, 2, \dots)$ . 则利用 132 题的结果可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n),$$

故得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

(ii)设  $y_n \leq 0 (n=1, 2, \dots)$ . 则  $-y_n \geq 0 (n=1, 2, \dots)$ , 于是, 仍利用 132 题的结果可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n),$$

故得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n);$$

但是根据上、下极限的定义, 显然有等式

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n), \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(iii)设  $\{y_n\}$  中有无穷多项是非负的, 设这些项构成的子数列为  $\{y_{n_k}\} (y_{n_k} \geq 0, k=1, 2, \dots)$  (如果  $\{y_n\}$  中只有有限项是非负的, 则从某一项开始有  $y_n < 0$ , 这时应用(ii)的结果即知所要证的等式成立). 于是, 注意到  $x_n \geq 0$ , 显然有(利用(i)已证的结果)

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} y_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \cdot \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

证毕.

**【134】** 证明: 若对于某非负<sup>\*</sup>数列  $x_n (x_n \geq 0, n=1, 2, \dots)$ , 无论数列  $y_n (n=1, 2, \dots)$  怎样选取, 以下两个等式中至少有一个成立:

$$(1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad (2) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

则数列  $x_n$  是收敛的.

证 取  $\{x_n\}$  的子数列  $\{x_{n_k}\}$ , 使  $x_{n_k} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . 取

$$y_n = \begin{cases} -x_n, & n \neq n_k, \\ A, & n = n_k, \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots),$$

其中  $A$  为任取的正常数, 对此  $\{y_n\}$  若(1)成立, 则由(注意到  $x_n \geq 0$ )

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) + A, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = A,$$

知  $(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) + A = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) + A$ , 由此可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ , 故  $\{x_n\}$  收敛.

若(2)成立, 则由(同样, 注意到  $x_n \geq 0$ )

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = A \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

知  $A \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ , 由此可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ , 故  $\{x_n\}$  也是收敛的. 证毕.

\* ) 作者注: 原著中将  $x_n \geq 0$  的假定加在条件(2)后, 似不妥, 因为数列  $x_n$  应该是预先给定的.

**【135】** 证明: 若  $x_n > 0 (n=1, 2, \dots)$  及  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 1$ , 则数列  $x_n$  是收敛的.

证 由假定知

$$0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n < +\infty, \quad 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} < +\infty. \quad (*)$$

由于(利用 132 题的结果.)

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot \frac{1}{x_n}) \leq (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot \frac{1}{x_n}) = 1,$$



故

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}}) = 1,$$

从而,

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}}) = (\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}) \cdot (\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}}).$$

由此,再注意到(\*)式,即知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = a \quad (0 < a < +\infty).$$

故存在  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  有限,因此  $\{x_n\}$  收敛,证毕.

**【136】** 证明:若数列  $x_n (n=1,2,\cdots)$  有界,且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ ,则此数列的聚点充满于下极限和上极限

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{和} \quad L = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

之间,即间隔  $[l, L]$  中的任意一个数都是该数列的聚点.

**证** 根据定义,  $l$  与  $L$  都是  $\{x_n\}$  的聚点,故我们只要证明  $l$  与  $L$  之间的任何数  $a (l < a < L)$  都是  $\{x_n\}$  的聚点. 先证:对于任意给定的  $\epsilon > 0$  及任意给定的正整数  $N$ ,必有正整数  $n^* > N$  存在,使  $|x_{n^*} - a| < \epsilon$ .

由假定,必有正整数  $N'$  存在,使当  $n > N'$  时,恒有  $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ . 令  $N_0 = \max\{N, N'\}$ , 则于数列  $x_n (n = N_0 + 1, N_0 + 2, \cdots)$  中必至少有两项  $x_{n'}$  和  $x_{n''}$  存在,使  $x_{n'} < a$ ,  $x_{n''} > a$  (因为否则的话,例如,无小于  $a$  的项,则必  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq a$ , 此与  $l < a$  矛盾), 不妨设  $n' < n''$ , 令满足  $n' \leq n \leq n''$  且使  $x_n < a$  的正整数  $n$  中之最大者为  $n^*$ . 显然  $n^* \leq n'' - 1$ , 且  $x_{n^*} < a$ ,  $x_{n^*+1} > a$ . 故  $n^* > N, n^* > N'$  并且

$$|x_{n^*} - a| < x_{n^*+1} - x_{n^*} < \epsilon.$$

现取  $\epsilon_1 = 1, N_1 = 1$ , 则存在  $x_{n_1} (n_1 > 1)$  使  $|x_{n_1} - a| < 1$ ; 再取  $\epsilon_2 = \frac{1}{2}, N_2 = n_1$ , 则存在  $x_{n_2} (n_2 > n_1)$  使  $|x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$ ; 又取  $\epsilon_3 = \frac{1}{3}, N_3 = n_2$ , 则存在  $x_{n_3} (n_3 > n_2)$  使  $|x_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$ ; 这样一直继续下去, 则得  $\{x_n\}$  的一个子数列  $\{x_{n_k}\}$ , 满足

$$|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \quad (k=1,2,\cdots),$$

故  $x_{n_k} \rightarrow a$ , 即  $a$  是  $\{x_n\}$  的一个聚点, 证毕.

**【137】** 设数列  $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$  满足条件  $0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n \quad (m, n=1,2,\cdots)$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$  存在.

**证** 证法 1:

由于

$$x_n \leq x_{n-1} + x_1 \leq x_{n-2} + x_1 + x_1 \leq \cdots \leq nx_1,$$

故  $0 \leq \frac{x_n}{n} \leq x_1$ , 从而数列  $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$  有界, 令  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = a$ , 则  $0 \leq a \leq x_1$ . 任给  $\epsilon > 0$ , 存在正整数  $N > 1$  使  $\frac{x_N}{N} < a + \epsilon$ .

任何正整数  $n > N$  都可表为  $n = qN + r$  的形式, 其中  $q$  为正整数,  $r$  为小于  $N$  的非负整数 ( $0 \leq r < N$ ).

我们有

$$x_n = x_{qN+r} \leq x_{(q-1)N} + x_N + x_r \leq x_{(q-2)N} + x_N + x_N + x_r \leq \cdots \leq qx_N + x_r \leq qx_N + rx_1 \leq qx_N + Nx_1,$$

从而,

$$\frac{x_n}{n} \leq \frac{qx_N}{n} + \frac{Nx_1}{n} \leq \frac{x_N}{N} + \frac{Nx_1}{n} < a + \epsilon + \frac{Nx_1}{n}.$$

由此可知  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}} \leq a + \epsilon$ , 再根据  $\epsilon > 0$  的任意性, 即得  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}} \leq a$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}}$ , 因此,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$  存在有限.

证法 2:

用反证法. 假定  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$  不存在, 则数列  $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$  至少有两个聚点  $a$  与  $b$ , 不妨设  $a < b$ , 由于(证法 1 中已证)



$$0 \leq \frac{x_n}{n} \leq x_1 \quad (n=1, 2, \dots)$$

故  $0 \leq a < b \leq x_1$ . 根据聚点定义, 存在  $\{x_n\}$  的两个子数列  $\{x_{n_i}\}$  与  $\{x_{m_j}\}$ , 使

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_{n_i}}{n_i} = a, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x_{m_j}}{m_j} = b.$$

任给  $\epsilon > 0$ , 必存在正整数  $i_0 > 1$ , 使

$$\frac{x_{n_{i_0}}}{n_{i_0}} < a + \epsilon.$$

显然, 当  $j$  充分大时 ( $j > j_0$ ), 必  $m_j > n_{i_0}$ , 此时仿证法 1, 有不等式 ( $[x]$  表  $x$  的整数部分)

$$x_{m_j} \leq \left[ \frac{m_j}{n_{i_0}} \right] x_{n_{i_0}} + n_{i_0} x_1 \leq \frac{m_j}{n_{i_0}} x_{n_{i_0}} + n_{i_0} x_1,$$

故 ( $j > j_0$  时)

$$\frac{x_{m_j}}{m_j} \leq \frac{x_{n_{i_0}}}{n_{i_0}} + \frac{n_{i_0} x_1}{m_j} < a + \epsilon + \frac{n_{i_0} x_1}{m_j},$$

由此可知  $b = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x_{m_j}}{m_j} \leq a + \epsilon$ . 由  $\epsilon > 0$  的任意性, 即得  $b \leq a$ , 此与  $a < b$  矛盾, 证毕.

**【138】** 证明: 若数列  $x_n (n=1, 2, \dots)$  收敛, 则算术平均值数列  $\zeta_n = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) (n=1, 2, \dots)$  也收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

逆命题不成立, 举例说明.

**证明思路** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则对任给的  $\epsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时,  $|x_n - a| < \epsilon$ . 令  $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ , 则

$$\frac{s_n}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{s_n - s_N}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \dots + x_n}{n - N} \left(1 - \frac{N}{n}\right).$$

取  $N' > N$ , 使当  $n > N'$  时, 恒有  $\frac{|s_N|}{n} < \epsilon$ ,  $\frac{N}{n} < \frac{\epsilon}{|a| + \epsilon}$ , 可证  $\left| \frac{s_n}{n} - a \right| < 3\epsilon$ . 反之不然, 例如,  $x_n = (-1)^{n+1} (n=1, 2, \dots)$ .

**证** 令  $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ , 则

$$\frac{s_n}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{s_n - s_N}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \dots + x_n}{n - N} \left(1 - \frac{N}{n}\right).$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 设收敛于  $a$ , 则对于任给的  $\epsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时,  $|x_n - a| < \epsilon$ , 即  $x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$  均  $\in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ . 由此推得  $\frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \dots + x_n}{n - N}$  也含在  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  之内, 即

$$\frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \dots + x_n}{n - N} = a + \alpha,$$

式中  $|\alpha| < \epsilon$ .

这样,  $\frac{s_n}{n} = \frac{s_N}{n} + (a + \alpha) \left(1 - \frac{N}{n}\right)$ . 由此得

$$\left| \frac{s_n}{n} - a \right| \leq \frac{|s_N|}{n} + |\alpha| + (|a| + |\alpha|) \frac{N}{n}.$$

今取  $N' > N$ , 使当  $n > N'$  时, 恒有

$$\frac{|s_N|}{n} < \epsilon, \quad \frac{N}{n} < \frac{\epsilon}{|a| + \epsilon}.$$

于是, 当  $n > N'$  时, 恒有  $\left| \frac{s_n}{n} - a \right| < 3\epsilon$ .



由此可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = a$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

反之不然, 例如, 数列  $x_n = (-1)^{n+1} (n=1, 2, \cdots)$  是发散的, 但是数列

$$\zeta_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数}, \\ -\frac{1}{n}, & n \text{ 为奇数}, \end{cases}$$

却是收敛的.

**【139】** 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$ .

提示 同 138 题的思路.

证 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 故对于任给的  $M > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时,  $x_n > 3M$ , 此时, 仿 138 题的证明, 有

$$\frac{s_n}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{s_n - s_N}{n - N} \left(1 - \frac{N}{n}\right) > \frac{s_N}{n} + 3M \left(1 - \frac{N}{n}\right).$$

又因  $\frac{s_N}{n} \rightarrow 0$ ,  $1 - \frac{N}{n} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ , 故可取正整数  $N' > N$ , 使当  $n > N'$  时, 恒有

$$\frac{|s_N|}{n} < \frac{M}{2}, \quad 1 - \frac{N}{n} > \frac{1}{2}.$$

于是, 当  $n > N'$  时恒有  $\frac{s_n}{n} > M$ . 由此可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$ .

**【140】** 证明: 若数列  $x_n (n=1, 2, \cdots)$  收敛且  $x_n > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

证明思路 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  及  $x_n > 0$ , 故  $a \geq 0$ . 当  $a > 0$  时, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \ln a$ , 利用 138 题的结果. 当  $a = 0$  时, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\ln x_n) = +\infty$ , 利用 139 题的结果.

证 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . 因  $x_n > 0 (n=1, 2, \cdots)$ , 故  $a \geq 0$ . 先设  $a > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \ln a$ , 于是, 利用 138 题的结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n) = \ln a.$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} (\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n)} = e^{\ln a} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

若  $a = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\ln x_n) = +\infty$ . 利用 139 题的结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (-\ln x_1 - \ln x_2 - \cdots - \ln x_n) = +\infty,$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{n} (-\ln x_1 - \ln x_2 - \cdots - \ln x_n)} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

证毕.

**【141】** 证明: 若  $x_n > 0 (n=1, 2, \cdots)$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$  存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ .

证明思路 令  $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ , 则  $y_n > 0$ . 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  存在, 设为  $a$ . 注意到  $x_n = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdot \cdots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}}$ , 并利用 63 题及 140 题的结果.

证 令  $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} (n=1, 2, \cdots)$ , 则  $y_n > 0$ . 由假定  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  存在, 设为  $a$ . 利用 140 题的结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_1 y_2 \cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} = a.$$

于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1} \sqrt[n]{\frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1} [(y_1 y_2 \cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}]^{\frac{n-1}{n}} = 1^* \cdot a = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$



利用 63 题的结果.

【142】 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ .

提示 令  $x_n = \frac{n^n}{n!}$ , 并利用 141 题的结果.

证 设数列  $x_n = \frac{n^n}{n!} (n=1, 2, \dots)$ , 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

利用 141 题的结果, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = e.$$

【143】 证明施托尔茨定理: 若

(1)  $y_{n+1} > y_n (n=1, 2, \dots)$ , (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ , (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$  存在,

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ .

证明思路 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a$ . 则对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时, 恒有

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是,

$$\frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \frac{x_{N+3} - x_{N+2}}{y_{N+3} - y_{N+2}}, \dots, \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

都包含在  $(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$  内, 注意到  $y_{m+1} > y_m (m=1, 2, \dots)$ , 得

$$(a - \frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2} - y_{N+1}) < x_{N+2} - x_{N+1} < (a + \frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2} - y_{N+1}),$$

$$(a - \frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3} - y_{N+2}) < x_{N+3} - x_{N+2} < (a + \frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3} - y_{N+2}),$$

⋮

$$(a - \frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n < (a + \frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1} - y_n),$$

相加, 即得  $\left| \frac{x_{n+1} - x_{N+1}}{y_{n+1} - y_{N+1}} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 再注意到

$$\frac{x_n}{y_n} - a = \frac{x_{N+1} - a y_{N+1}}{y_n} + (1 - \frac{y_{N+1}}{y_n}) \left( \frac{x_{N+1} - x_{N+1}}{y_{N+1} - y_{N+1}} - a \right).$$

取  $N' > N$ , 使当  $n > N'$  时, 恒有  $\frac{|x_{N+1} - a y_{N+1}|}{y_n} < \frac{\varepsilon}{2}$ , 则可知当  $n > N'$  时, 恒有  $\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| < \varepsilon$ .

证 假定  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a$ . 由此, 并注意到  $y_n \rightarrow +\infty$ , 可知对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时, 恒有

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{且 } y_n > 0).$$

于是, 分数 (当  $n > N$  时)

$$\frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \frac{x_{N+3} - x_{N+2}}{y_{N+3} - y_{N+2}}, \dots, \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

都包含在  $(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$  之内, 因为  $y_{n+1} > y_n$ , 所以, 这些分数的分母都是正数, 于是, 得



$$(a - \frac{\epsilon}{2})(y_{N+2} - y_{N+1}) < x_{N+2} - x_{N+1} < (a + \frac{\epsilon}{2})(y_{N+2} - y_{N+1}),$$

$$(a - \frac{\epsilon}{2})(y_{N+3} - y_{N+2}) < x_{N+3} - x_{N+2} < (a + \frac{\epsilon}{2})(y_{N+3} - y_{N+2}),$$

⋮

$$(a - \frac{\epsilon}{2})(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n < (a + \frac{\epsilon}{2})(y_{n+1} - y_n),$$

相加之,得

$$(a - \frac{\epsilon}{2})(y_{n+1} - y_{N+1}) < x_{n+1} - x_{N+1} < (a + \frac{\epsilon}{2})(y_{n+1} - y_{N+1}),$$

即  $a - \frac{\epsilon}{2} < \frac{x_{n+1} - x_{N+1}}{y_{n+1} - y_{N+1}} < a + \frac{\epsilon}{2}$ , 所以, 当  $n > N$  时, 恒有  $\left| \frac{x_{n+1} - x_{N+1}}{y_{n+1} - y_{N+1}} - a \right| < \frac{\epsilon}{2}$ . 另外, 我们有 (当  $n > N$  时)

$$\frac{x_n}{y_n} - a = \frac{x_{N+1} - a y_{N+1}}{y_n} + (1 - \frac{y_{N+1}}{y_n}) \left( \frac{x_n - x_{N+1}}{y_n - y_{N+1}} - a \right),$$

$$\text{故 } \left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| \leq \left| \frac{x_{N+1} - a y_{N+1}}{y_n} \right| + \frac{\epsilon}{2}.$$

现取正整数  $N' > N$ , 使当  $n > N'$  时, 恒有

$$\left| \frac{x_{N+1} - a y_{N+1}}{y_n} \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

于是, 当  $n > N'$  时, 恒有

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| < \epsilon.$$

由此可知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ . 证毕.

注 本题中, 若将条件(3)换为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty$  (或  $-\infty$ ), 则结论仍成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

详见 Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第一章 § 2.

**【144】** 求: (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n}$  ( $a > 1$ ); (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n}$ .

提示 利用 143 题的结果.

解 (1) 设  $x_n = n^2$ ,  $y_n = a^n$  ( $a > 1$ ). 则  $y_{n+1} > y_n$ ,  $y_n \rightarrow +\infty$ , 且有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{a^{n+1} - a^n} = \frac{2n+1}{a^n(a-1)}.$$

再设  $x'_n = 2n+1$ ,  $y'_n = a^n$ , 则  $y'_{n+1} > y'_n$ ,  $y'_n \rightarrow +\infty$ , 且有

$$\frac{x'_{n+1} - x'_n}{y'_{n+1} - y'_n} = \frac{2}{a^n(a-1)} \rightarrow 0,$$

因而利用 143 题的结果得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{a^n} = 0$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = 0$ .

继续利用 143 题的结果, 得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n} = 0$ .

(2) 设  $x_n = \lg n$ ,  $y_n = n$ , 则  $y_{n+1} > y_n$ ,  $y_n \rightarrow +\infty$ , 且有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lg \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \rightarrow 0,$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} = 0$ .

注 143 题的结果属于 O. Stolz, 当  $y_n = n$  时, 早已被 A. L. Cauchy 所证明, 此结果常用于确定“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型



的不定式  $\frac{x_n}{y_n}$  的极限, 144 题即是一例. 应用此结果, 也可证明 138 题及 139 题的结果 (此结果属于柯西 Cauchy). 事实上, 令

$$x'_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad y'_n = n,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_n}{y'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_{n+1} - x'_n}{y'_{n+1} - y'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

**【145】** 证明: 若  $p$  为正整数, 则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}.$$

提示 利用 143 题的结果.

证 (1) 令  $x_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$ ,  $y_n = n^{p+1}$ , 则  $y_{n+1} > y_n$ ,  $y_n \rightarrow +\infty$ , 且有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p + \cdots} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}{p+1 + o\left(\frac{1}{n}\right)} \rightarrow \frac{1}{p+1},$$

式中  $\lim_{n \rightarrow \infty} o\left(\frac{1}{n}\right) = 0$  为无穷小量, 以下不再说明.

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

(2) 令  $x_n = (p+1)(1^p + 2^p + \cdots + n^p) - n^{p+1}$ ,  $y_n = (p+1)n^p$ , 则  $y_{n+1} > y_n$ ,  $y_n \rightarrow +\infty$ , 且有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(p+1)(n+1)^p + [n^{p+1} - (n+1)^{p+1}]}{(p+1)[(n+1)^p - n^p]} = \frac{\frac{p(p+1)}{2} n^{p-1} + \cdots}{p(p+1)n^{p-1} + \cdots}.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \rightarrow \frac{1}{2}$ , 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

(3) 令  $x_n = 1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p$ ,  $y_n = n^{p+1}$ , 则  $y_{n+1} > y_n$ ,  $y_n \rightarrow +\infty$ , 且有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(2n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{(2n+1)^p}{(p+1)n^p + \cdots} = \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^p}{p+1 + o\left(\frac{1}{n}\right)} \rightarrow \frac{2^p}{p+1},$$

所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}.$

**【146】** 证明: 数列  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$  ( $n=1, 2, \cdots$ ) 收敛.

因此有公式

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \epsilon_n,$$

式中  $C=0.577216\cdots$  称为欧拉常数, 且当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\epsilon_n \rightarrow 0$ .

**证明思路** 利用 75 题 (1) 的结果:  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ , 故  $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$ . 分别令  $n=1, 2, \cdots, n$ , 将  $n$

个不等式相加, 得  $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ . 又  $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) > \frac{1}{n+1} > 0$ . 且  $x_n - x_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 记为  $C$ , 其中  $C$  的近似值为 0.577216, 即  $1 +$



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \epsilon_n (\epsilon_n \rightarrow 0).$$

证 因为  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$  <sup>\*)</sup>, 故  $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$ , 令  $n=1, 2, 3, \cdots, n$ , 得出

$$\ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{2}, \quad \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{3}, \quad \ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{4}, \quad \cdots \quad \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},$$

相加之, 得  $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ . 于是,

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) > \frac{1}{n+1} > 0,$$

即  $\{x_n\}$  是一个有下界的数列. 其次,

$$x_n - x_{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1},$$

因为  $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  <sup>\*\*) )</sup>, 所以,  $x_n - x_{n+1} > 0$ , 这就是说,  $\{x_n\}$  又是一个单调下降的数列. 因而  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 用  $C$  表示之, 即

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right),$$

它的近似值为 0.577216. 或表成

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \epsilon_n,$$

其中  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ .

\*) 及 \*\*) 利用 75 题(1)的结果.

**【147】** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$ .

提示 对  $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$  及  $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}$  利用 146 题的结果.

解 因为

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \epsilon_n, \quad (1)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} = C + \ln 2n + \epsilon_{2n}, \quad (2)$$

其中  $C$  为欧拉常数,  $\epsilon_n \rightarrow 0$ ,  $\epsilon_{2n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

(2)式减(1)式得

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln 2n - \ln n + (\epsilon_{2n} - \epsilon_n) = \ln 2 + (\epsilon_{2n} - \epsilon_n) \rightarrow \ln 2 \quad (n \rightarrow \infty),$$

所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$ .

**【148】** 数列  $x_n$  ( $n=1, 2, \cdots$ ) 是由下列各式

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad (n=3, 4, \cdots)$$

所确定. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

提示 注意  $x_{n+1} - x_n = \frac{b-a}{(-2)^{n-1}}$  及  $x_{n+1} = \sum_{m=1}^n (x_{m+1} - x_m) + x_1$ .

解 由于

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} - x_n = \frac{x_{n-1} - x_n}{2} = \cdots = \frac{x_2 - x_1}{(-2)^{n-1}} = \frac{b-a}{(-2)^{n-1}}$$

及

$$x_{n+1} = \sum_{m=1}^n (x_{m+1} - x_m) + x_1 = (b-a) \sum_{m=1}^n \frac{1}{(-2)^{m-1}} + a,$$



所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b-a}{1 - (-\frac{1}{2})} + a = \frac{a+2b}{3}$ .

【149】 设  $a > 0$  和  $x_n (n=1, 2, \dots)$  为由以下各式

$$x_0 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

所确定的数列. 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$ .

提示 注意  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{x_n} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_n}} \right]^2 + \sqrt{a} \geq \sqrt{a}$  及  $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{x_n} - x_n \right) \leq 0$ .

证 由  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{x_n} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_n}} \right]^2 + \sqrt{a} \geq \sqrt{a} (n=0, 1, 2, \dots)$ , 则  $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{x_n} - x_n \right) \leq 0$ .

因此,  $\{x_n\}$  为单调下降的有界数列, 必有极限存在. 设其极限为  $l$ , 则  $l \geq \sqrt{a} > 0$ , 对于等式

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

两端取极限, 即得

$$l = \frac{1}{2} \left( l + \frac{a}{l} \right),$$

解之得  $l = \sqrt{a}$  (负值不合适), 故证得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$ .

【150】 证明: 由下列各式

$$x_1 = a, y_1 = b, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

确定的数列  $x_n$  和  $y_n (n=1, 2, \dots)$  有公共的极限

$$\mu(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (\text{数 } a \text{ 和 } b \text{ 的算术几何平均值}).$$

证明思路 分两种情形:

(1)  $a$  与  $b$  中至少有一个为零, 例如, 设  $a=0$ . 则有  $x_n=0, y_{n+1} = \frac{y_n}{2} = \dots = \frac{b}{2^{n-1}}$ .

(2) 设  $a \neq 0, b \neq 0$ , 则必有  $a > 0, b > 0$ , 不妨假定  $a \leq b$ . 应用数学归纳法可得  $a \leq x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \leq b$ .

证 分两种情形:

(1)  $a$  与  $b$  中至少有一个为零, 例如, 设  $a=0$ . 则显然有  $x_n=0 (n=1, 2, \dots)$ ,  $y_{n+1} = \frac{y_n}{2}$ , 从而, 递推得

$$y_n = \frac{b}{2^{n-1}} \quad (n=1, 2, \dots).$$

由此可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

(2) 设  $a \neq 0, b \neq 0$ , 这时, 必须  $a > 0, b > 0$ . 否则, 若  $ab < 0$ , 则  $x_2 = \sqrt{ab}$  没有意义; 若  $a < 0, b < 0$ , 则  $x_2 = \sqrt{ab} > 0, y_2 = \frac{a+b}{2} < 0$ , 从而  $x_3 = \sqrt{x_2 y_2}$  没有意义. 因此, 必须  $a > 0, b > 0$ . 不妨假定  $a \leq b$ . 由于两正数的等比中项不超过它们的等差中项, 并且都界于原来两数之间, 故有

$$a \leq x_2 \leq y_2 \leq b, \quad \text{由此又有} \quad a \leq x_2 \leq x_3 \leq y_3 \leq y_2 \leq b.$$

应用数学归纳法可知一般有

$$a \leq x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \leq b \quad (n=2, 3, \dots).$$

故  $\{x_n\}$  为单调增大的有界数列,  $\{y_n\}$  为单调减小的有界数列, 因此它们的极限都存在. 令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

$= \beta$ . 在等式  $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$  两端取极限, 得  $\beta = \frac{\alpha + \beta}{2}$ , 故  $\alpha = \beta$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

证毕.



### § 3. 函数的概念

1° 函数的概念 若对于集合  $X = \{x\}$  中的每一个  $x$ , 有一个确定的实数  $y \in Y = \{y\}$  与之对应, 则变量  $y$  称为变量  $x$  在所给变化域  $X$  上的单值函数, 并记为  $y = f(x)$ .

集合  $X$  称为函数  $f(x)$  的定义域或存在域;  $Y$  称为这个函数的值域, 在最简单的情形下, 集合  $X$  或为开区间  $(a, b)$ :  $a < x < b$ , 或为半开区间  $(a, b]$ :  $a < x \leq b$  或  $[a, b)$ :  $a \leq x < b$ , 或为闭区间(线段)  $[a, b]$ :  $a \leq x \leq b$ , 其中  $a$  和  $b$  为某实数或符号  $-\infty$  和  $+\infty$  (在这种情形下, 没有等号).

若对于  $X$  中的每一个值  $x$  有若干个值  $y = f(x)$  与之对应, 则  $y$  称为  $x$  的多值函数.

2° 反函数 若把  $x$  了解为满足方程

$$f(x) = y$$

(式中  $y$  为属于函数  $f(x)$  的值域  $Y$  中之一个固定数值) 的任何数值, 则这个对应关系确定出在集合  $Y$  上的某函数

$$x = f^{-1}(y),$$

这个函数称为函数  $f(x)$  的反函数, 这个函数一般说来是多值函数. 若函数  $y = f(x)$  是严格单调的, 即当  $x_2 > x_1$  时,  $f(x_2) > f(x_1)$  [或相应地  $f(x_2) < f(x_1)$ ], 则反函数  $x = f^{-1}(y)$  为单值而且严格单调的函数.

求下列函数的存在域:

【151】  $y = \frac{x^2}{1+x}$ .

解 当  $1+x \neq 0$ , 即  $x \neq -1$  时, 函数  $y$  才有意义, 所以, 它的存在域为  $(-\infty, -1), (-1, +\infty)$ .

【152】  $y = \sqrt{3x-x^3}$ .

解 存在域为满足不等式  $3x-x^3 \geq 0$  的实数  $x$  的集合, 解之, 得存在域为  $(-\infty, -\sqrt{3}], [0, \sqrt{3}]$ .

【153】<sup>+</sup>  $y = (x-2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ .

解 当  $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$  时,  $y$  值确定. 解之, 得存在域为满足  $-1 \leq x < 1$  的数  $x$  的集合.

【154】 (1)  $y = \log(x^2-4)$ , (2)  $y = \log(x+2) + \log(x-2)$ .

解 (1) 当  $x^2-4 > 0$  时,  $y$  值确定. 解之, 得存在域为  $(-\infty, -2), (2, +\infty)$ .

(2) 函数  $y$  由两个函数组成, 其中第一个函数的存在域为  $(-2, +\infty)$ , 而第二个函数的存在域为  $(2, +\infty)$ , 于是, 函数  $y$  的存在域为它们的公共部分, 即  $(2, +\infty)$ .

【155】  $y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$ .

解 当  $\sin \sqrt{x} \geq 0$  时,  $y$  值才为确定的实数. 解之, 得  $2k\pi \leq \sqrt{x} \leq (2k+1)\pi$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ).

存在域为满足不等式  $4k^2\pi^2 \leq x \leq (2k+1)^2\pi^2$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) 的数的集合.

【156】  $y = \sqrt{\cos x^2}$ .

解 当  $\cos x^2 \geq 0$  时,  $y$  值才为确定的实数, 即只要  $x$  满足

$$0 \leq x^2 \leq \frac{\pi}{2} \text{ 及 } (4k-1)\frac{\pi}{2} \leq x^2 \leq (4k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k=1, 2, \dots).$$

解之, 得存在域为满足不等式

$$|x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ 及 } \sqrt{(4k-1)\frac{\pi}{2}} \leq |x| \leq \sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}} \quad (k=1, 2, \dots)$$

的数  $x$  的集合.

【157】  $y = \log\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$ .



解 当  $\sin \frac{\pi}{x} > 0$  时,  $y$  值确定, 即只要

$$2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad \text{及} \quad -(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi.$$

所以, 存在域为满足不等式  $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ ,  $(k=0, 1, 2, \dots)$  及  $-\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$  的数  $x$  的集合.

**【158】**  $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}.$

解 当  $x \geq 0$  及  $\sin \pi x \neq 0$  时,  $y$  值确定. 解之, 得存在域为满足关系式  $x > 0, x \neq n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 的数  $x$  的集合.

**【159】**  $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}.$

解 当  $\left| \frac{2x}{1+x} \right| \leq 1$  时,  $y$  值确定. 解之, 得

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1, \quad -1 \leq 2 - \frac{2}{1+x} \leq 1, \quad -3 \leq -\frac{2}{1+x} \leq -1, \quad \frac{2}{3} \leq 1+x \leq 2.$$

最后得存在域为满足不等式  $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$  的数  $x$  的集合.

**【160】**  $y = \arccos(2\sin x).$

解 当  $|2\sin x| \leq 1$  时,  $y$  值确定.

解之, 得存在域为满足不等式  $|x - k\pi| \leq \frac{\pi}{6}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 的数  $x$  的集合.

**【161】**  $y = \lg[\cos(\lg x)].$

解 当  $\cos(\lg x) > 0$  时,  $y$  值确定. 解之, 得  $(2k - \frac{1}{2})\pi < \lg x < (2k + \frac{1}{2})\pi$ .

从而, 存在域为满足不等式  $10^{(2k - \frac{1}{2})\pi} < x < 10^{(2k + \frac{1}{2})\pi}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 的数  $x$  的集合.

**【162】<sup>+</sup>**  $y = (x - |x|) \sqrt{-\sin^2 \pi x}.$

解 由于  $\sin^2 \pi x \geq 0$ , 故仅当  $\sin \pi x = 0$  时  $\sqrt{-\sin^2 \pi x}$  才有意义, 从而, 函数  $y$  才有意义. 解之, 得存在域为

$$x = k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

**【163】**  $y = \cot \pi x + \arccos(2^x).$

解 当  $\sin \pi x \neq 0$  时, 第一项有意义, 即  $x \neq k$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

当  $0 \leq 2^x \leq 1$  时, 第二项有意义, 即  $x \leq 0$ . 由此得存在域为满足关系式  $x < 0, x \neq -n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 的数  $x$  的集合.

**【164】**  $y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x).$

解 当  $-1 \leq 1-x \leq 1$ , 即  $0 \leq x \leq 2$  时, 第一个函数有意义;

当  $\lg x > 0$ , 即  $x > 1$  时, 第二个函数有意义. 由此得存在域为满足不等式  $1 < x \leq 2$  的数  $x$  的集合.

**【165】**  $y = (2x)!.$

解 当  $2x = n$  ( $n=0, 1, \dots$ ) 时,  $y$  值确定, 所以, 存在域为集合:  $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots, \frac{n}{2}, \dots$ .

求下列函数的存在域和函数值域:

**【166】**  $y = \sqrt{2+x-x^2}.$

解 当  $2+x-x^2 \geq 0$  时,  $y$  值确定. 解之, 得存在域为满足不等式  $-1 \leq x \leq 2$  的数  $x$  的集合. 又因

$$y = \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{3}{2},$$

所以, 函数值域为满足不等式  $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$  的数  $y$  的集合.



【167】  $y = \lg(1 - 2\cos x)$ .

提示 由  $1 - 2\cos x > 0$  易得存在域  $A$ . 注意, 由  $\max_{x \in A}(1 - 2\cos x) = 3$ ,  $\inf_{x \in A}(1 - 2\cos x) = 0$ , 即可求得函数值域.

解 当  $1 - 2\cos x > 0$  时,  $y$  值确定. 解之, 得存在域为满足不等式

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{3} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

的数  $x$  的集合  $A$ . 因为  $\max_{x \in A}(1 - 2\cos x) = 1 - (-2) = 3$ ,  $\inf_{x \in A}(1 - 2\cos x) = 0$ , 所以, 函数值域为满足不等式  $-\infty < y \leq \lg 3$  的数  $y$  的集合.

【168】  $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$ .

解 当  $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$  时,  $y$  值确定, 而对于  $-\infty < x < +\infty$  来说, 始终有  $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$ , 所以, 存在域为全体实数所组成的集合, 而函数值域为闭区间  $[0, \pi]$ .

【169】  $y = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right)$ .

解 当  $-1 \leq \lg \frac{x}{10} \leq 1$  时, 即当  $\frac{1}{10} \leq \frac{x}{10} \leq 10$ , 或  $1 \leq x \leq 100$  时,  $y$  值确定, 且在  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  上变化, 所以, 存在域为闭区间  $[1, 100]$ , 函数值域为  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

【170】  $y = (-1)^x$ .

解 存在域为数  $x: x = \frac{p}{2q+1}$  ( $p, q$  为整数) 的集合, 而函数值域为:  $y = (-1)^p$ , 即由  $-1, 1$  两数组成的集合.

【171】 在底  $AC = b$  和高  $BD = h$  的三角形  $ABC$  中 (图 1.2) 内接一个高  $NM = x$  的矩形  $KLMN$ . 把矩形  $KLMN$  的周长  $P$  及其面积  $S$  表示为  $x$  的函数.

作函数  $P = P(x)$  及  $S = S(x)$  的图像.

解 因为  $\frac{LM}{b} = \frac{h-x}{h}$ , 所以,  $LM = b\left(1 - \frac{x}{h}\right)$ .

周长  $P = 2LM + 2x$ , 即  $P = P(x) = 2\left(1 - \frac{b}{h}\right)x + 2b$ , 式中  $0 < x < h$ .

当  $b < h$  时, 如图 1.3 中直线段  $AB$  所示 (不包含  $A, B$  两点).

当  $b > h$  时, 如图 1.3 中直线段  $AC$  所示 (不包含  $A, C$  两点). 其中  $OA = 2b$ ,  $B$  和  $C$  的坐标为  $h$  和  $2h$ .

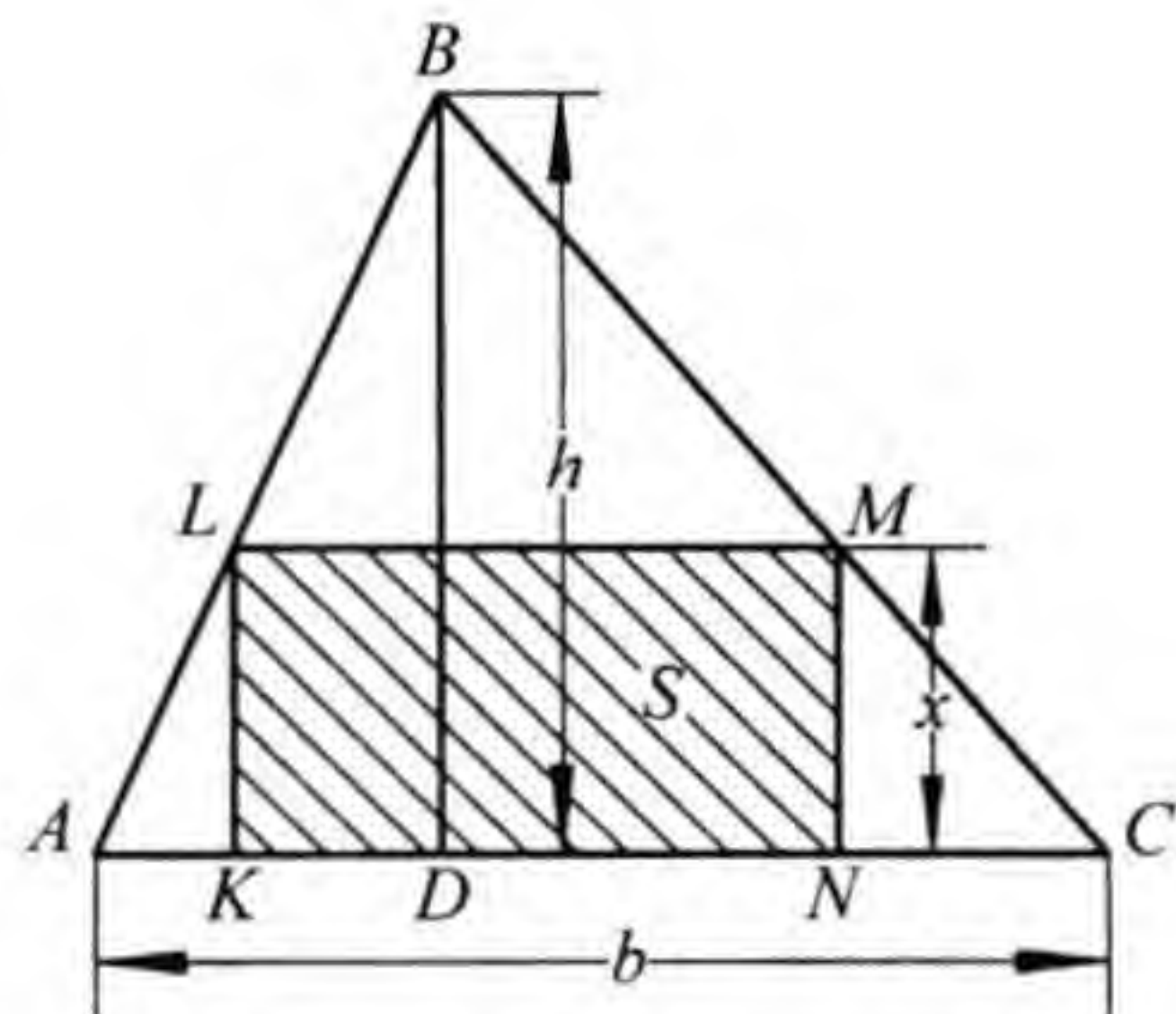


图 1.2

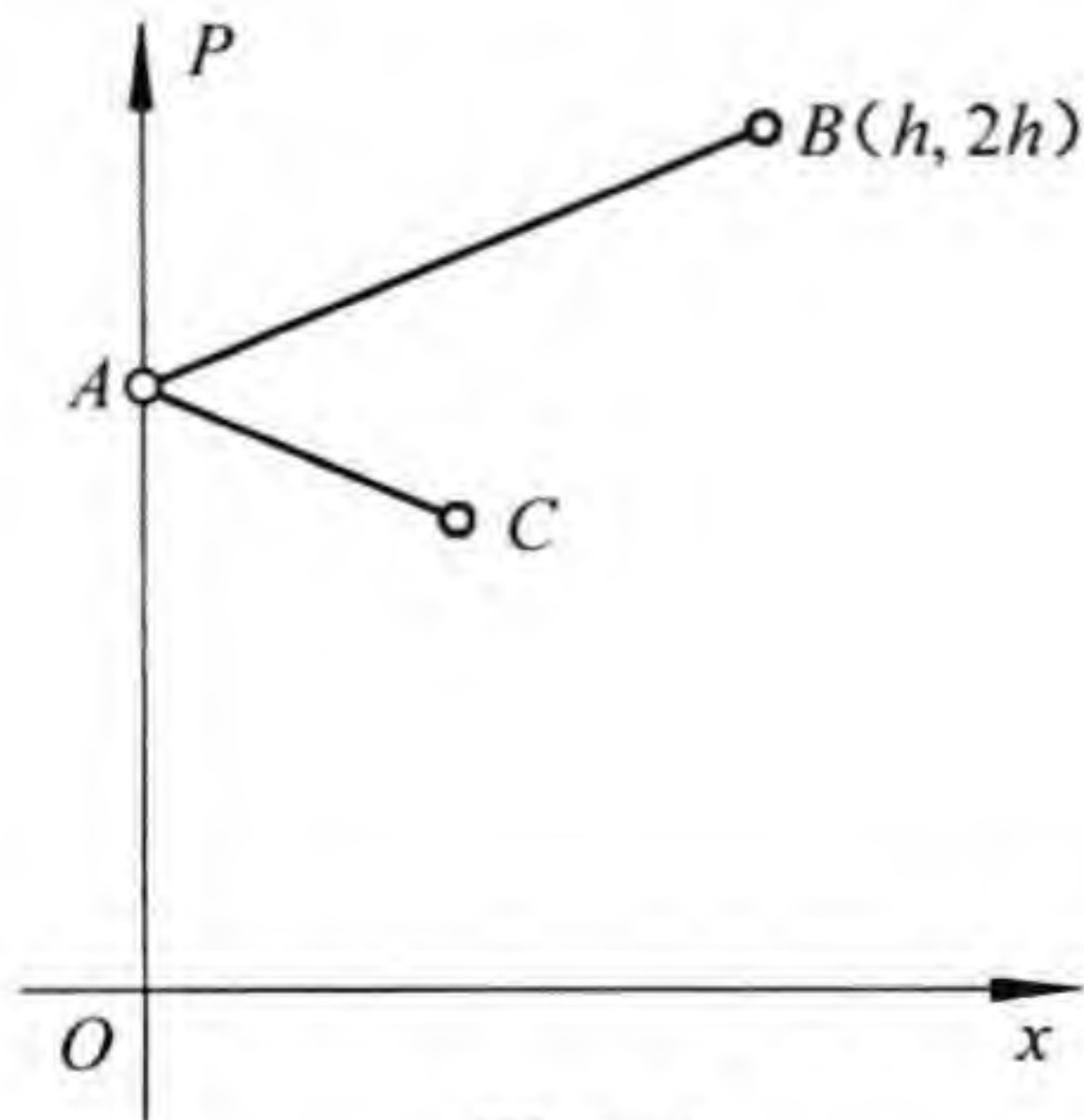


图 1.3

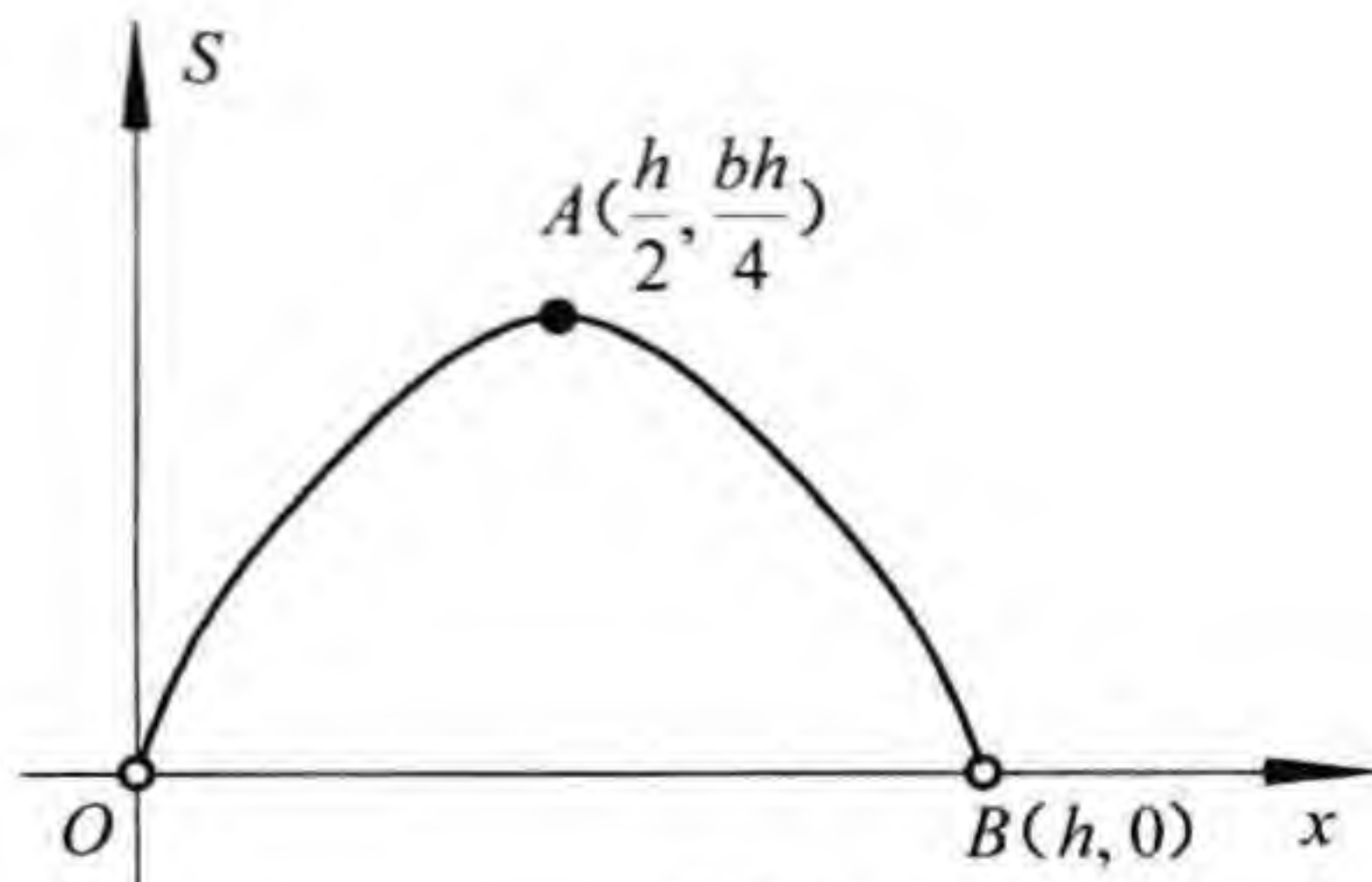


图 1.4

矩形面积  $S = LM \cdot x = bx\left(1 - \frac{x}{h}\right)$  ( $0 < x < h$ ) 如图 1.4 所示, 它是一段不包含  $O$  点及  $B$  点的抛物线弧  $\widehat{OAB}$ .



【172】 在三角形  $ABC$  中, 边  $AB=6\text{cm}$ ,  $AC=8\text{cm}$ , 角  $BAC=x$ . 把边  $BC=a$  和面积  $ABC=S$  表示为变量  $x$  的函数. 作函数  $a=a(x)$  及  $S=S(x)$  的图像.

解 利用余弦定理得三角形的边

$$a = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos x} = \sqrt{100 - 96 \cos x} \quad (0 < x < \pi),$$

如图 1.5 所示(系一不包含  $A$  点及  $B$  点的曲线弧  $\widehat{AB}$ ).

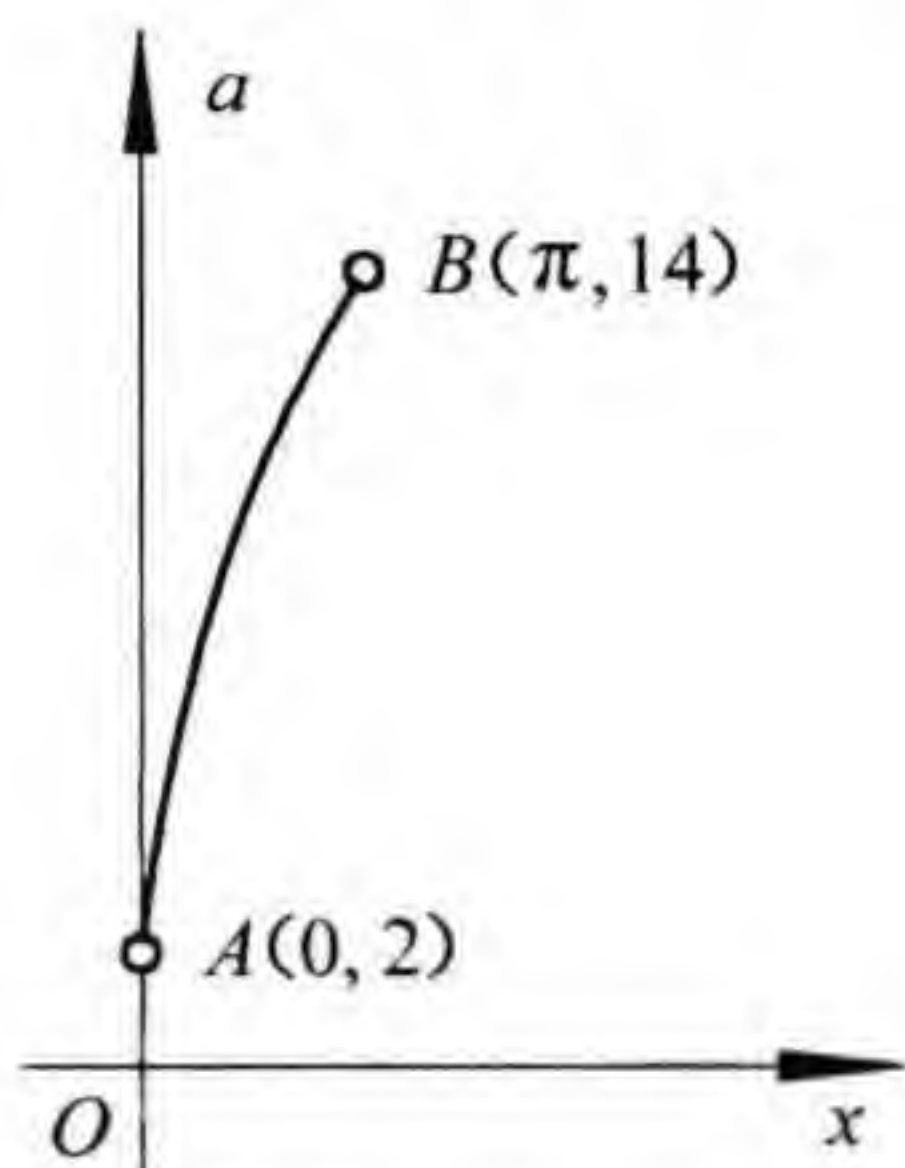


图 1.5

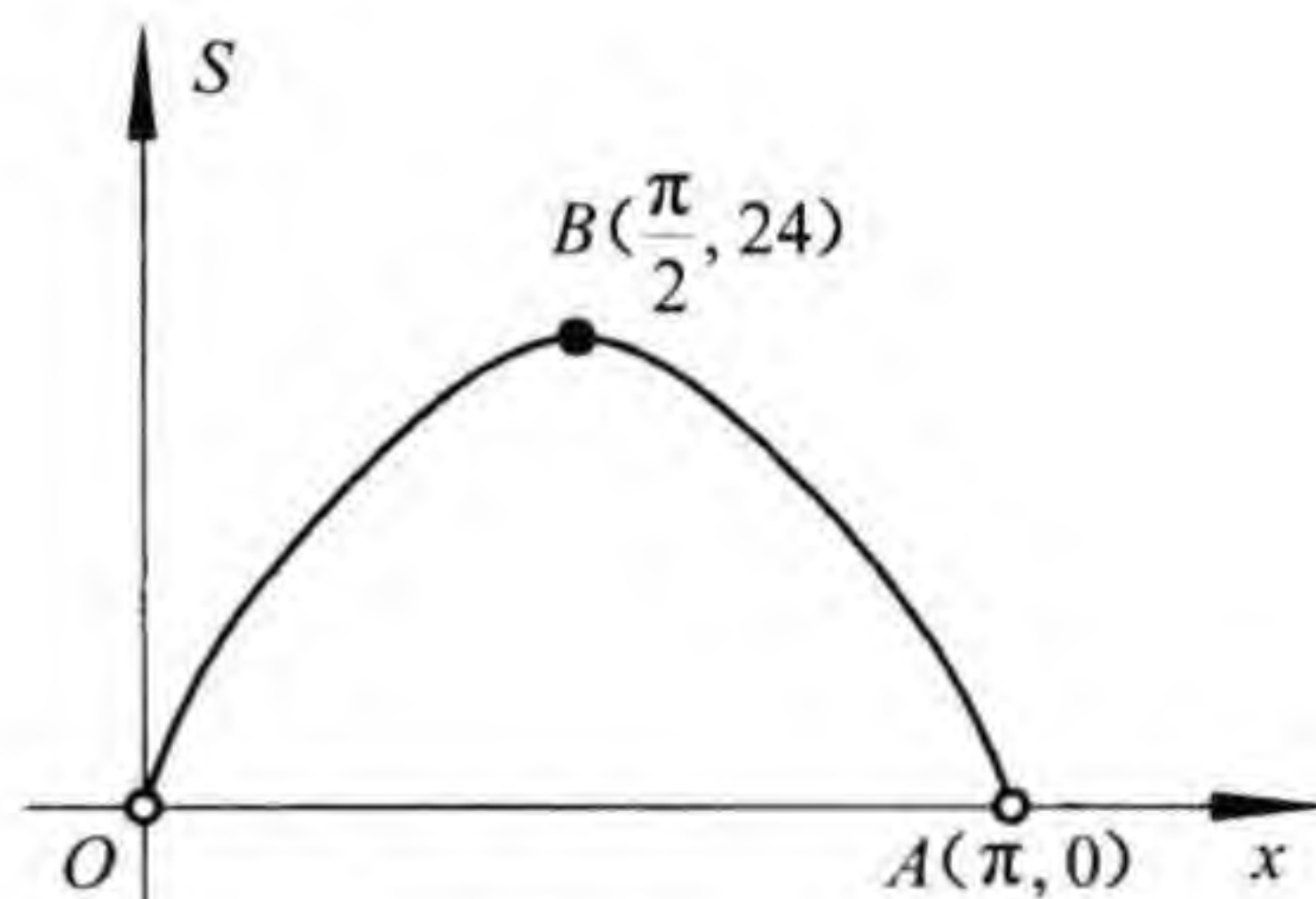


图 1.6

而三角形的面积

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \sin x = 24 \sin x \quad (0 < x < \pi).$$

如图 1.6 所示(两轴单位取得不同, 系一不包含  $O$  点及  $A$  点的弧  $\widehat{OBA}$ ).

【173】 在等腰梯形  $ABCD$  中(图 1.7), 底  $AD=a$ ,  $BC=b$  ( $a > b$ ), 高  $HB=h$ , 引直线  $MN \parallel BH$ ,  $MN$  与顶点  $A$  相距  $AM=x$ , 把图形  $ABNMA$  的面积  $S$  表示为变量  $x$  的函数. 作函数  $S=S(x)$  的图像.

提示 分三种情况求解:

$$(1) 0 \leq x \leq \frac{a-b}{2}; \quad (2) \frac{a-b}{2} < x < \frac{a+b}{2}; \quad (3) \frac{a+b}{2} \leq x \leq a.$$

解  $AH = \frac{1}{2}(a-b)$ , 分三种情况讨论:

$$(1) \text{ 当 } 0 \leq x \leq \frac{a-b}{2} \text{ 时, 即 } MN \text{ 线在 } \triangle ABH \text{ 内, 此时 } \frac{MN}{h} = \frac{x}{\frac{a-b}{2}}, \quad MN = \frac{2hx}{a-b}.$$

于是,  $S = \frac{1}{2} MN \cdot x = \frac{hx^2}{a-b}$ , 如图 1.8 中弧  $\widehat{OA}$  (系抛物线段).

$$(2) \text{ 当 } \frac{a-b}{2} < x < \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2} \text{ 时, 面积}$$

$$S = \frac{a-b}{2} \cdot \frac{h}{2} + h \left( x - \frac{a-b}{2} \right) = h \left( x - \frac{a-b}{4} \right),$$

如图 1.8 中不含  $A$  点及  $B$  点的直线段  $AB$ .

$$(3) \text{ 当 } \frac{a+b}{2} \leq x \leq a \text{ 时, 面积}$$

$$S = \frac{h(a+b)}{2} - \frac{h}{a-b} \cdot (a-x)^2 = h \left[ \frac{a+b}{2} - \frac{(a-x)^2}{a-b} \right],$$

如图 1.8 中抛物线段  $\widehat{BC}$ .

图 1.8 中各点的位置如下:

$$A \left( \frac{a-b}{2}, \frac{h(a-b)}{4} \right), \quad B \left( \frac{a+b}{2}, \frac{h(a+3b)}{4} \right), \quad C \left( a, \frac{h(a+b)}{2} \right),$$

又  $\tan \alpha = h$ .

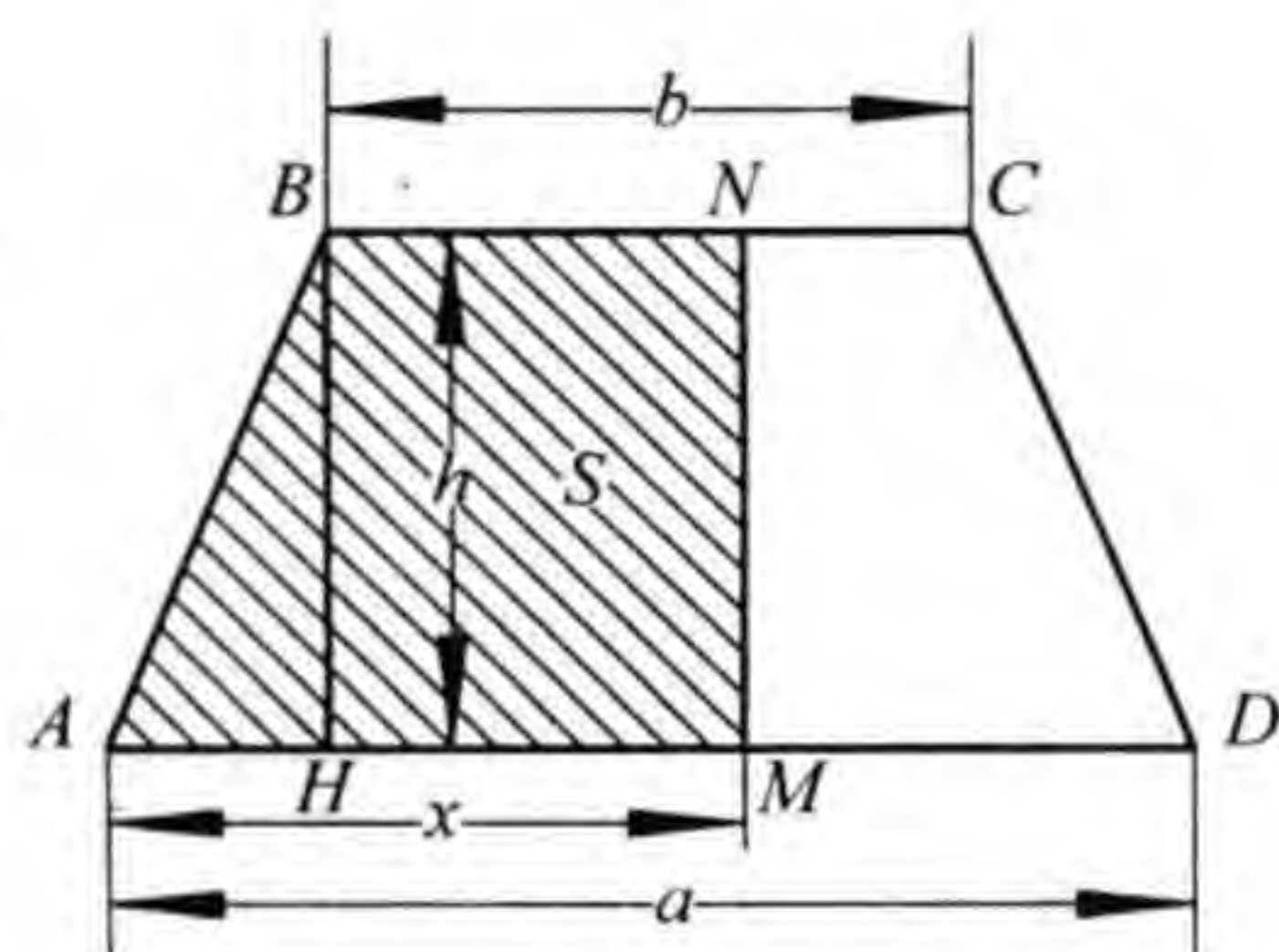


图 1.7

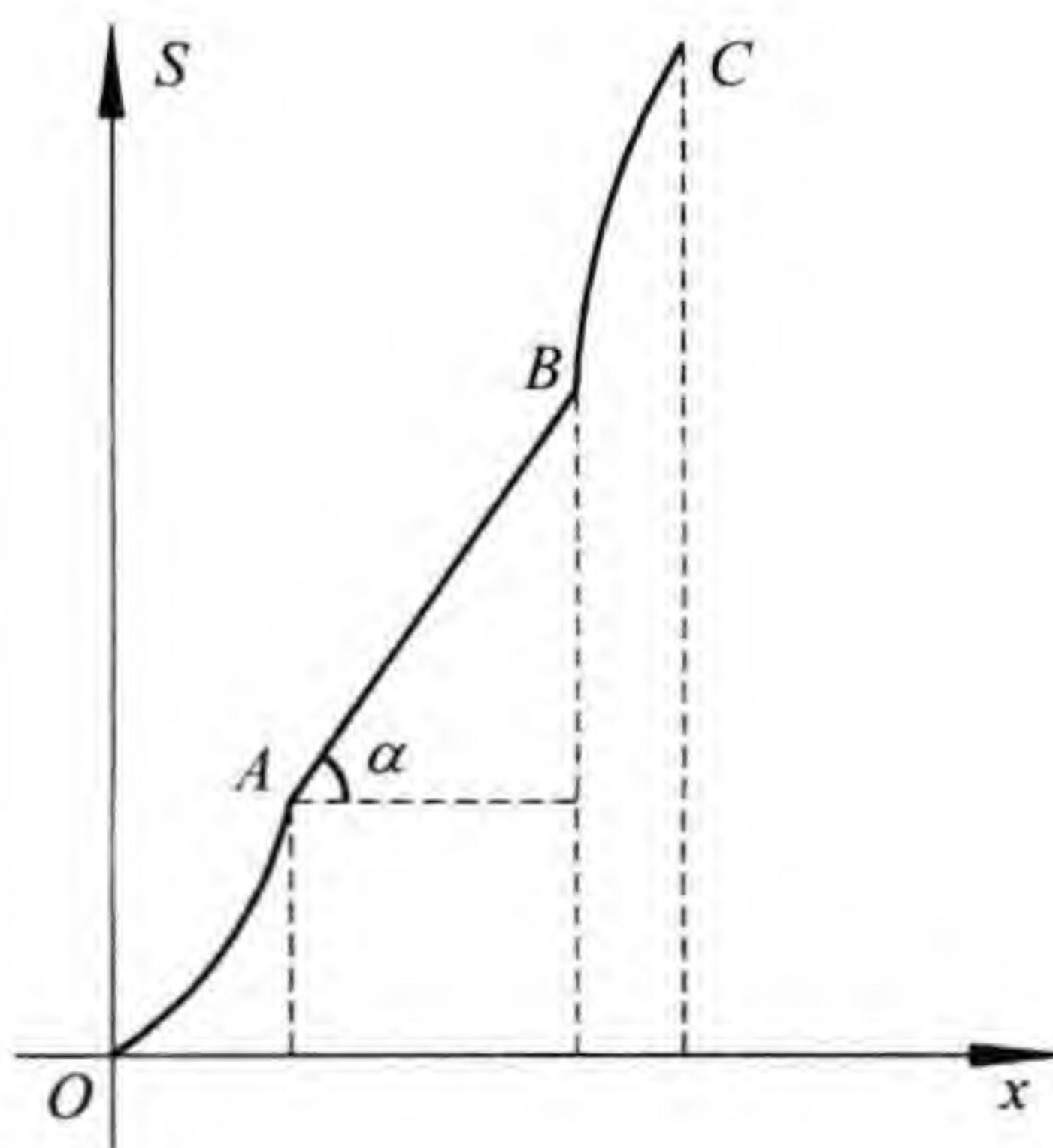


图 1.8



【174】 有 2g 质量均匀分布在  $Ox$  轴上的闭区间  $0 \leq x \leq 1$  上, 另有两个质量为 1g 的质点分别位于点  $x=2$  和  $x=3$ .

设  $m(x)$  是区间  $(-\infty, x)$  内的质量的值, 求函数

$$m=m(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

的解析表达式, 并作这个函数的图像.

解 当  $-\infty < x \leq 0$  时,  $m(x)=0$ ;

当  $0 < x \leq 1$  时, 因为  $1: x=2: m(x)$ , 于是,  $m(x)=2x$ ;

当  $1 < x \leq 2$  时,  $m(x)=2$ ;

当  $2 < x \leq 3$  时,  $m(x)=3$ ;

当  $3 < x \leq +\infty$  时,  $m(x)=4$ .

如图 1.9 所示.

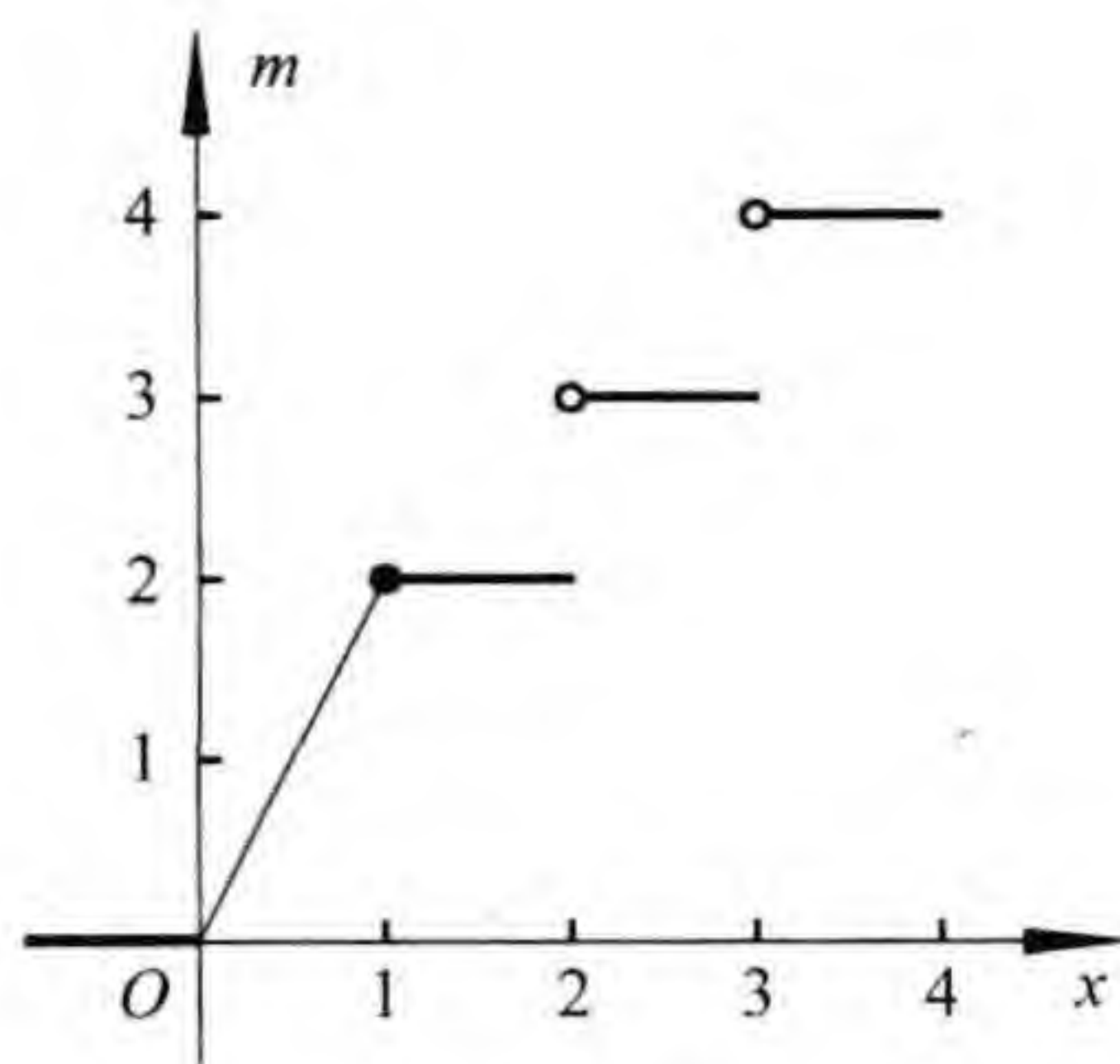


图 1.9

【175】 函数  $y=\operatorname{sgn} x$ , 被定义为:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

作这个函数的图像. 证明:

$$|x| = x \operatorname{sgn} x.$$

解 函数  $\operatorname{sgn} x$  的图像如图 1.10 所示.

因为, 当  $x < 0$  时,  $|x| = -x = x \operatorname{sgn} x$ ;

当  $x = 0$  时,  $|x| = 0 = x \operatorname{sgn} x$ ;

当  $x > 0$  时,  $|x| = x = x \operatorname{sgn} x$ .

所以,  $|x| = x \operatorname{sgn} x$ .

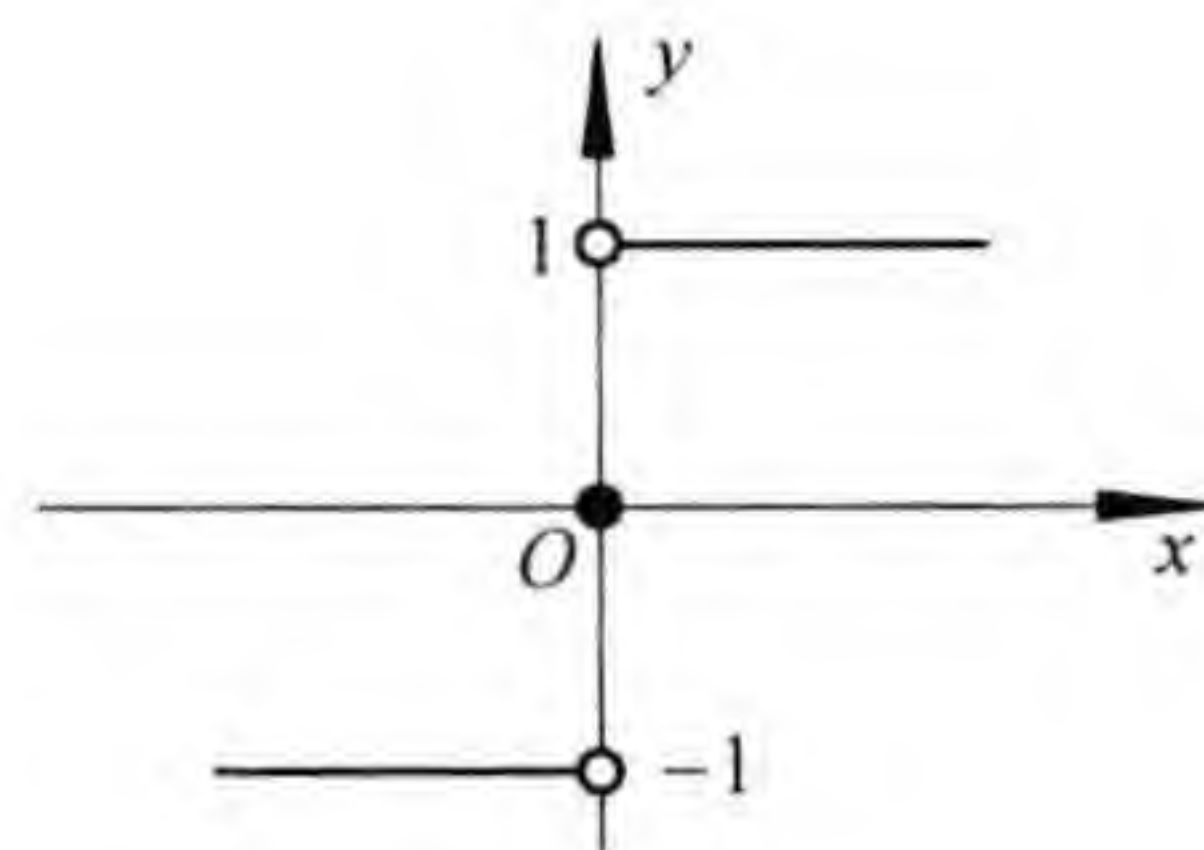


图 1.10

【176】 函数  $y=[x]$  (数  $x$  的整数部分) 用下法定义:

若  $x=n+r$ , 式中  $n$  为整数且  $0 \leq r < 1$ , 则  $[x]=n$ .

作这个函数的图像.

解 当  $x \in [n, n+1)$  时 ( $n$  为整数)  $y=n$ , 如图 1.11 所示.

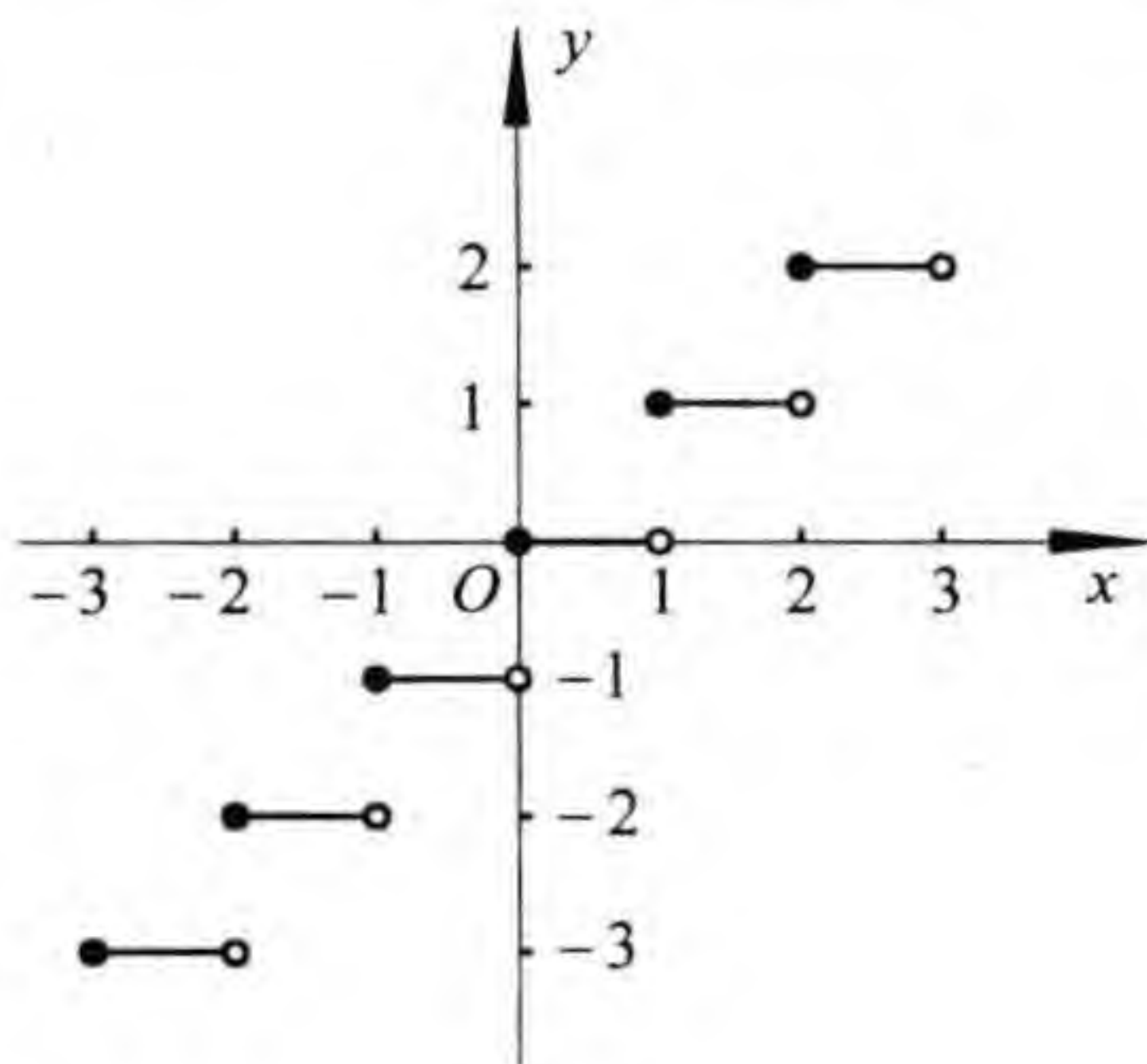


图 1.11

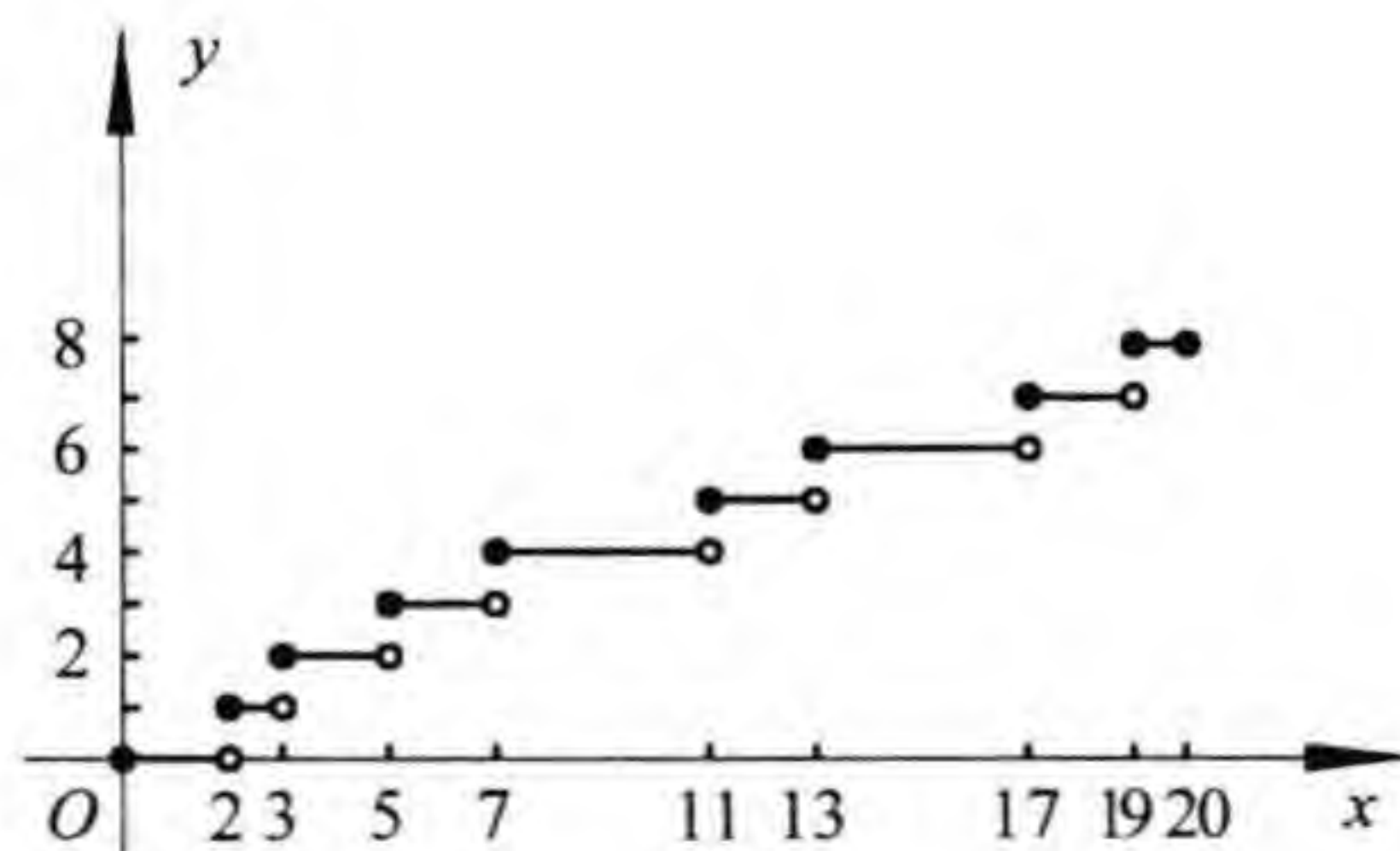


图 1.12

【177】 设:  $y=\pi(x)$  ( $x \geq 0$ ), 表示不超过数  $x$  的素数的数目, 作这个函数在  $0 \leq x \leq 20$  时的图像.

解 按题设可知:

当 $0 \leq x < 2$ 时, $\pi(x)=0$ ;	当 $2 \leq x < 3$ 时, $\pi(x)=1$ ;	当 $3 \leq x < 5$ 时, $\pi(x)=2$ ;
当 $5 \leq x < 7$ 时, $\pi(x)=3$ ;	当 $7 \leq x < 11$ 时, $\pi(x)=4$ ;	当 $11 \leq x < 13$ 时, $\pi(x)=5$ ;
当 $13 \leq x < 17$ 时, $\pi(x)=6$ ;	当 $17 \leq x < 19$ 时, $\pi(x)=7$ ;	当 $19 \leq x \leq 20$ 时, $\pi(x)=8$ .

如图 1.12 所示.



下列函数  $y=f(x)$  把集合  $E_x$  映射成怎样的集合  $E_y$ ?

【178】  $y=x^2, E_x=\{1\leq x\leq 2\}$ .

解  $E_y=\{1\leq y\leq 4\}$ .

【179】  $y=\lg x, E_x=\{10<x<1000\}$ .

解  $E_y=\{1<y<3\}$ .

【180】  $y=\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot} x, E_x=\{-\infty<x<+\infty\}$ .

解  $E_y=\{0<y<1\}$ .

【181】  $y=\cot \frac{\pi x}{4}, E_x=\{0<|x|\leq 1\}$ .

解  $E_y=\{1<|y|<+\infty\}$ .

【182】  $y=|x|, E_x=\{1\leq |x|\leq 2\}$ .

解  $E_y=\{1\leq y\leq 2\}$ .

设变量  $x$  遍历区间  $0<x<1$ , 试确定变量  $y$  所遍历的集合:

【183】  $y=a+(b-a)x$ .

解 变量  $x$  从 0 变至 1 时,  $y$  从  $a$  变至  $b$ .

于是, 变量  $y$  的变化区间为  $a<y<b$  (当  $a<b$ ) 或  $b<y<a$  (当  $b<a$ ).

【184】  $y=\frac{1}{1-x}$ .

解 当  $x$  从 0 变至 1 时,  $y$  从 1 变至正无穷大. 于是,  $y$  的变化区间为  $1<y<+\infty$ .

【185】  $y=\frac{x}{2x-1}$ .

解  $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}$ .

当  $x$  从 0 变至  $\frac{1}{2}$ ,  $y$  从 0 变至负无穷大; 当  $x$  从  $\frac{1}{2}$  变至 1 时,  $y$  从正无穷大变至 1. 于是,  $y$  的变化区间为  $-\infty<y<0, 1<y<+\infty$ .

【186】  $y=\sqrt{x-x^2}$ .

解  $y=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$ .

当  $x=\frac{1}{2}$  时,  $y=\frac{1}{2}$  (最大值); 由于  $x$  趋于 0 时,  $y$  趋于 0, 而  $y>0$ , 从而  $y=0$  是变量  $y$  的下确界. 于是,  $y$  的变化区间为  $0<y\leq\frac{1}{2}$ .

【187】  $y=\cot \pi x$ .

解 当  $x$  从 0 变至 1 时, 变量  $y$  从  $+\infty$  变至  $-\infty$ . 于是, 变量  $y$  的变化区间为  $-\infty<y<+\infty$ .

【188】  $y=x+[2x]$ .

解 当  $x$  从 0 变至  $\frac{1}{2}$  时,  $y$  从 0 变至  $\frac{1}{2}$ ; 当  $x$  从  $\frac{1}{2}$  变至 1 时,  $y$  从  $\frac{3}{2}$  变至 2. 于是,  $y$  的变化区间为  $0<y<\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\leq y<2$ .

【189】 设  $f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x$ , 求  $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ .

解 因为  $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$ , 所以,  $f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=0, f(4)=24$ .

【190】 设  $f(x)=\lg x^2$ , 求  $f(-1), f(-0.001), f(100)$ .

解  $f(-1)=\lg 1=0; f(-0.001)=\lg 0.000001=-6; f(100)=\lg 10000=4$ .

【191】 设  $f(x)=1+[x]$ , 求  $f(0.9), f(0.99), f(0.999), f(1)$ .



解  $f(0.9)=f(0.99)=f(0.999)=1, f(1)=2$ .

【192】 设  $f(x)=\begin{cases} 1+x, & -\infty < x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x < +\infty, \end{cases}$  求  $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$ .

解  $f(-2)=1-2=-1, f(-1)=1-1=0, f(0)=1+0=1, f(1)=2^1=2, f(2)=2^2=4$ .

【193】 设  $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ , 求  $f(0), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}$ .

解  $f(0)=1,$

$$f(-x)=\frac{1+x}{1-x},$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=-\frac{x}{x+2}, \quad f(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1=\frac{2}{1+x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}, \quad \frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1+x}{1-x}.$$

【194】 设(1)  $f(x)=x-x^3$ ; (2)  $f(x)=\sin \frac{\pi}{x}$ ; (3)  $f(x)=(x+|x|)(1-x)$ .

求满足以下各式的  $x$  值: (i)  $f(x)=0$ ; (ii)  $f(x)>0$ ; (iii)  $f(x)<0$ .

解 (1) (i)  $x-x^3=0$ , 所以,  $x=0, 1$  及  $-1$ .

(ii)  $x-x^3>0$ , 即  $x(1-x)(1+x)>0$ , 所以,  $-\infty < x < -1$  和  $0 < x < 1$ .

(iii)  $x(1-x)(1+x)<0$ , 所以,  $-1 < x < 0$  和  $1 < x < +\infty$ .

(2) (i)  $\sin \frac{\pi}{x}=0$ , 则  $\frac{\pi}{x}=k\pi (k=\pm 1, \pm 2, \dots)$ , 所以,  $x=\frac{1}{k} (k=\pm 1, \pm 2, \dots)$ .

(ii)  $\sin \frac{\pi}{x}>0$ , 则  $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$  和  $-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi$ , 所以,

$$\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k} \quad \text{和} \quad -\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

(iii)  $\sin \frac{\pi}{x}<0$ , 则  $(2k+1)\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+2)\pi$  和  $-(2k+1)\pi < \frac{\pi}{x} < -2k\pi (k=0, 1, 2, \dots)$ , 所以,

$$\frac{1}{2k+2} < x < \frac{1}{2k+1} \quad \text{和} \quad -\frac{1}{2k} < x < -\frac{1}{2k+1} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

(3) (i)  $(x+|x|)(1-x)=0$ , 则  $x \leq 0$  和  $x=1$ .

(ii) 因为  $x+|x| \geq 0$ , 所以,  $1-x > 0$ , 即  $x < 1$ . 而由  $f(x) > 0$ , 得  $x+|x| > 0$ , 即  $x > 0$ .

总之, 当  $0 < x < 1$  时,  $(x+|x|)(1-x) > 0$ .

(iii)  $(x+|x|)(1-x) < 0$ . 首先,  $x > 0$ , 否则  $x+|x|=0$ . 其次, 应有  $1-x < 0$ , 所以,  $x > 1$ , 此即所求之解.

【195】 设(1)  $f(x)=ax+b$ ; (2)  $f(x)=x^2$ ; (3)  $f(x)=a^x$ . 求  $\varphi(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ .

解 (1)  $\varphi(x)=\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}=a$ ;

$$(2) \varphi(x)=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x+h;$$

$$(3) \varphi(x)=\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x \cdot \frac{a^h-1}{h}.$$

【196】 设  $f(x)=ax^2+bx+c$ , 证明:  $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x) \equiv 0$ .

证  $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)$

$$\begin{aligned} &= a(x+3)^2 + b(x+3) + c - 3[a(x+2)^2 + b(x+2) + c] + 3[a(x+1)^2 + b(x+1) + c] - (ax^2 + bx + c) \\ &= ax^2 + 6ax + 9a + bx + 3b + c - 3ax^2 - 12ax - 12a - 3bx - 6b - 3c + 3ax^2 + 6ax + 3a + 3bx + 3b + 3c \\ &\quad - ax^2 - bx - c \\ &= 0, \end{aligned}$$



于是,  $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0$ .

**【197】** 若  $f(0)=-2, f(3)=5$ , 求线性函数:  $f(x)=ax+b$ .  $f(1)$  及  $f(2)$  等于什么(线性插值法)?

解 因为  $f(0)=b=-2$  及  $f(3)=3a+b=5$ , 所以,  $a=\frac{7}{3}, b=-2$ .

于是, 所求的线性函数为  $f(x)=\frac{7}{3}x-2$ , 且  $f(1)=\frac{1}{3}, f(2)=\frac{8}{3}$ .

**【198】** 若  $f(-2)=0, f(0)=1, f(1)=5$ . 求二次有理函数:  $f(x)=ax^2+bx+c$ .  $f(-1)$  及  $f(0.5)$  等于什么(二次插值法)?

解 因为  $f(-2)=4a-2b+c=0, f(0)=c=1, f(1)=a+b+c=5$ , 所以,  $a=\frac{7}{6}, b=\frac{17}{6}, c=1$ .

于是, 所求的二次有理函数为  $f(x)=\frac{7}{6}x^2+\frac{17}{6}x+1$ , 且  $f(-1)=-\frac{2}{3}, f(0.5)=\frac{65}{24}=2\frac{17}{24}$ .

**【199】** 设  $f(-1)=0, f(0)=2, f(1)=-3, f(2)=5$ . 求三次有理函数:  $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ .

解 因为  $f(-1)=-a+b-c+d=0, f(0)=d=2, f(1)=a+b+c+d=-3, f(2)=8a+4b+2c+d=5$ , 所以,  $a=\frac{10}{3}, b=-\frac{7}{2}, c=-\frac{29}{6}, d=2$ .

于是, 所求的三次有理函数为  $f(x)=\frac{10}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-\frac{29}{6}x+2$ .

**【200】** 设  $f(0)=15, f(2)=30, f(4)=90$ , 求形为  $f(x)=a+bc^x$  的函数.

解 因为  $f(0)=a+b=15, f(2)=a+bc^2=30, f(4)=a+bc^4=90$ , 所以,  $a=10, b=5, c=2$  ( $-2$  不适合). 于是, 所求的函数为  $f(x)=10+5\cdot 2^x$ .

**【201】** 证明: 对于线性函数  $f(x)=ax+b$ , 若自变量的值  $x=x_n (n=1, 2, \dots)$  组成等差数列, 则对应的函数值  $y_n=f(x_n) (n=1, 2, \dots)$  也组成等差数列.

提示 利用等差数列的定义.

证 设数列  $x_n (n=1, 2, \dots)$  为  $x_1, x_1+d, x_1+2d, x_1+3d, \dots, x_1+(n-1)d, \dots$  其中  $d$  为公差. 于是,

$$y_n - y_{n-1} = (ax_n + b) - (ax_{n-1} + b) = \{a[x_1 + (n-1)d] + b\} - \{a[x_1 + (n-2)d] + b\} = ad,$$

由于  $ad$  为一常数, 所以, 数列  $y_n=f(x_n)$  也组成等差数列.

**【202】** 证明: 对于指数函数  $f(x)=a^x (a>0)$ , 若自变量的值  $x=x_n (n=1, 2, \dots)$  组成等差数列, 则对应的函数值  $y_n=f(x_n) (n=1, 2, \dots)$  组成等比数列.

证 因为  $x_n - x_{n-1} = d$ , 所以,

$$y_n : y_{n-1} = a^{x_n} : a^{x_{n-1}} = a^{x_n - x_{n-1}} = a^d,$$

由于  $a^d$  为一常数, 于是, 函数值  $y_n=f(x_n)$  组成等比数列.

**【203】** 设当  $0 < u < 1$  时函数  $f(u)$  有定义, 求下列函数的定义域:

(1)  $f(\sin x)^+$ ; (2)  $f(\ln x)$ ; (3)  $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ .

解 (1) 因为  $0 < \sin x < 1$ , 所以,

$$2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \text{且} \quad x \neq \frac{4k+1}{2}\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

(2) 因为  $0 < \ln x < 1$ , 所以,  $1 < x < e$ ;

(3) 因为  $0 < \frac{[x]}{x} < 1$ , 所以,  $x > 1$  且  $x \neq k (k=2, 3, 4, \dots)$ .

**【204】** 设  $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x}) (a>0)$ . 证明:  $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$ .

证  $f(x+y)+f(x-y)=\frac{1}{2}(a^{x+y}+a^{-x-y})+\frac{1}{2}(a^{x-y}+a^{-x+y})$



$$= \frac{1}{2}(a^x \cdot a^y + a^{-x} \cdot a^{-y}) + \frac{1}{2}(a^x \cdot a^{-y} + a^{-x} \cdot a^y) = \frac{1}{2}a^x(a^y + a^{-y}) + \frac{1}{2}a^{-x}(a^{-y} + a^y)$$

$$= \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})(a^y + a^{-y}) = 2f(x)f(y),$$

于是,  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ .

**【205】** 设  $f(x) + f(y) = f(z)$ . 求出  $z$ , 若:

(1)  $f(x) = ax$ ; (2)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ; (3)  $f(x) = \arctan x$  ( $|x| < 1$ ); (4)  $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$ .

提示 (3) 由  $\arctan x + \arctan y = \arctan z$  可得  $\arctan \frac{x+y}{1-xy} = \arctan z$ .

解 (1)  $f(x) + f(y) = ax + ay = a(x+y)$ ,  $f(z) = az$ , 由  $f(x) + f(y) = f(z)$  得  $z = x+y$ .

(2) 由  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$  得  $z = \frac{xy}{x+y}$ .

(3) 由  $\arctan x + \arctan y = \arctan z$  得  $\arctan \frac{x+y}{1-xy} = \arctan z$  所以,  $z = \frac{x+y}{1-xy}$ .

(4) 由  $\lg \frac{1+x}{1-x} + \lg \frac{1+y}{1-y} = \lg \frac{1+z}{1-z}$  得  $\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = \frac{1+z}{1-z}$ , 所以,  $z = \frac{x+y}{1+xy}$ .

求  $\varphi[\varphi(x)]$ ,  $\psi[\psi(x)]$ ,  $\varphi[\psi(x)]$  及  $\psi[\varphi(x)]$ , 设

**【206】**  $\varphi(x) = x^2$  及  $\psi(x) = 2^x$ .

解  $\varphi[\varphi(x)] = (x^2)^2 = x^4$ ;  $\varphi[\psi(x)] = (2^x)^2 = 2^{2x}$ ;  $\psi[\psi(x)] = 2^{(2^x)}$ ;  $\psi[\varphi(x)] = 2^{(x^2)}$ .

**【207】**  $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$  及  $\psi(x) = \frac{1}{x}$ .

解  $\varphi[\varphi(x)] = \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn} x) = \operatorname{sgn} x$ ;  $\psi[\psi(x)] = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$  ( $x \neq 0$ );

$\varphi[\psi(x)] = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn} x$  ( $x \neq 0$ );  $\psi[\varphi(x)] = \frac{1}{\operatorname{sgn} x} = \operatorname{sgn} x$  ( $x \neq 0$ ).

**【208】**  $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$  及  $\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ -x^2, & x > 0. \end{cases}$

解  $\varphi[\varphi(x)] = \varphi(x)$ ;  $\psi[\psi(x)] = 0$  (因为  $-x^2 \leq 0$ );  $\varphi[\psi(x)] = 0$ ;  $\psi[\varphi(x)] = \psi(x)$ .

**【209】** 设  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ , 求  $f[f(x)]$ ,  $f\{f[f(x)]\}$ .

解  $f[f(x)] = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = 1 - \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ );  $f\{f[f(x)]\} = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)} = x$ .

**【210】** 设  $f_n(x) = \underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n\text{次}}$ . 若  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ , 求  $f_n(x)$ .

提示 利用数学归纳法易得  $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

解 当  $n=2$  时,  $f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$ .

设对于  $n=k$  时, 有  $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$ , 则对于  $n=k+1$  时, 有

$$f_{k+1}(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

从而, 由数学归纳法知, 对于任何正整数  $n$ , 有  $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ .



【211】 设  $f(x+1)=x^2-3x+2$ , 求  $f(x)$ .

解 因为  $f(x+1)=(x+1)^2-5(x+1)+6$ , 于是,  $f(x)=x^2-5x+6$ .

【212】 设  $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$ , ( $|x|\geq 2$ ), 求  $f(x)$ .

解 因为  $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ , 于是  $f(x)=x^2-2$ .

【213】 设  $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$  ( $x>0$ ), 求  $f(x)$ .

解 因为  $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}{\frac{1}{x}}$ , 于是,  $f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$ .

证明: 下列各函数在所给区间内是单调增函数.

【214】  $f(x)=x^2$  ( $0\leq x<+\infty$ ).

证 当  $x_2>x_1\geq 0$  时 (其中  $x_1, x_2$  为任意两点, 下同),

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0,$$

于是,  $f(x)=x^2$  在  $0\leq x<+\infty$  内是单调增函数.

【215】  $f(x)=\sin x$  ( $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq \frac{\pi}{2}$ ).

证 当  $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$  时, 因为

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2} \quad \text{及} \quad 0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2},$$

所以,  $\cos\frac{x_1+x_2}{2}>0$  及  $\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$ .

又因

$$f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0,$$

所以,  $f(x)=\sin x$  在  $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq \frac{\pi}{2}$  内是单调增函数.

【216】  $f(x)=\tan x$  ( $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ ).

证  $f(x_2)-f(x_1)=\tan x_2-\tan x_1=\frac{\sin x_2}{\cos x_2}-\frac{\sin x_1}{\cos x_1}=\frac{\sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1}{\cos x_1 \cos x_2}=\frac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2}$ ,

当  $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$  时,  $\cos x_1>0$ ,  $\cos x_2>0$  及  $\sin(x_2-x_1)>0$ , 从而可知

$$f(x_2)-f(x_1)>0,$$

所以,  $f(x)=\tan x$  在  $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$  内是单调增函数.

【217】  $f(x)=2x+\sin x$  ( $-\infty<x<+\infty$ ).

提示 注意不等式  $|\sin x_2-\sin x_1|\leq |x_2-x_1|$ , 即易获证.

证  $f(x_2)-f(x_1)=2(x_2-x_1)+\sin x_2-\sin x_1$ ,

因为

$$|\sin x_2-\sin x_1|=2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\leq 2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\leq 2\left|\frac{x_2-x_1}{2}\right|=|x_2-x_1|,$$

所以, 当  $x_1<x_2$  时, 有

$$-(x_2-x_1)\leq \sin x_2-\sin x_1\leq x_2-x_1.$$

从而,



$$2(x_2 - x_1) + \sin x_2 - \sin x_1 > 2(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1) = x_2 - x_1 > 0,$$

即  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , 于是,  $f(x) = 2x + \sin x$  在  $-\infty < x < +\infty$  内是单调增函数.

**证明:** 下列各函数在所给区间内是单调减函数.

**【218】**  $f(x) = x^2$  ( $-\infty < x \leq 0$ ).

**证**  $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0$  ( $x_1 < x_2 < 0$ ), 于是,  $f(x) = x^2$  在  $-\infty < x \leq 0$  内是单调减函数.

**【219】**  $f(x) = \cos x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ).

$$\text{证 } f(x_2) - f(x_1) = \cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2},$$

当  $0 < x_1 < x_2 < \pi$  时,

$$0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \pi \quad \text{及} \quad 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2},$$

于是,  $\sin \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$ ,  $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$ , 从而,

$$f(x_2) - f(x_1) < 0,$$

即  $f(x) = \cos x$  在  $0 \leq x \leq \pi$  内是单调减函数.

**【220】**  $f(x) = \cot x$  ( $0 < x < \pi$ ).

$$\text{证 } f(x_2) - f(x_1) = \frac{\cos x_2}{\sin x_2} - \frac{\cos x_1}{\sin x_1} = \frac{\cos x_2 \sin x_1 - \cos x_1 \sin x_2}{\sin x_1 \sin x_2} = \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\sin x_1 \cdot \sin x_2} < 0$$

(当  $0 < x_1 < x_2 < \pi$  时),

于是,  $f(x) = \cot x$  在  $0 < x < \pi$  内是单调减函数.

**【221】** 研究下列函数的单调性:

$$(1) f(x) = ax + b; \quad (2) f(x) = ax^2 + bx + c; \quad (3) f(x) = x^3;$$

$$(4) f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}; \quad (5) f(x) = a^x \quad (a > 0).$$

**解题思路** (1) 应就  $a > 0$  及  $a < 0$  分别加以讨论.

(2) 注意  $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ , 并就  $a > 0$  及  $a < 0$  分别加以讨论.

(4) 若  $c = 0$ , 仿(1). 若  $c \neq 0$ , 不妨设  $c > 0$ , 注意  $f(x) = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{d}{c}a}{cx + d}$ , 并就  $ad - bc > 0$  及  $ad - bc < 0$  分别加以讨论.

(5) 就  $0 < a < 1$  及  $a > 1$  分别加以讨论.

**解** (1) 对于  $x_1 < x_2$ , 有  $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$ . 当  $a > 0$  时, 它大于零; 当  $a < 0$  时, 它小于零. 所以, 当  $a > 0$  时,  $f(x)$  是增函数; 当  $a < 0$  时,  $f(x)$  是减函数.

$$(2) f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

(i) 当  $a > 0$  时, 图像呈凹形, 顶点在  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ . 于是, 在  $-\infty < x < -\frac{b}{2a}$  内, 函数单调下降, 在  $-\frac{b}{2a} < x < +\infty$ , 函数单调上升.

(ii) 当  $a < 0$  时, 图像呈凸状. 于是, 在  $-\infty < x < -\frac{b}{2a}$  内函数单调增加, 而在  $-\frac{b}{2a} < x < +\infty$  内函数单调减小.

(3)  $f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) > 0$  ( $x_2 > x_1$ ). 于是,  $f(x) = x^3$  在  $-\infty < x < +\infty$  内单调增加.



(4)  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b-a\frac{d}{c}}{cx+d}$ , 其中  $c \neq 0$ , 若  $c=0$ , 则同(1)一样讨论. 下面不妨就  $c>0$  讨论其增减性.

(i) 当  $b > a\frac{d}{c}$  时, 若  $x$  值单调增加, 则  $f(x)$  值减小. 所以,  $f(x)$  在  $(-\infty, -\frac{d}{c})$  及  $(-\frac{d}{c}, +\infty)$  内减小.

(ii) 当  $b < a\frac{d}{c}$  时, 若  $x$  值单调增加, 则  $f(x)$  值也增加. 所以,  $f(x)$  在  $(-\infty, -\frac{d}{c})$  及  $(-\frac{d}{c}, +\infty)$  内增加.

(5)  $f(x_2) - f(x_1) = a^{x_2} - a^{x_1}$ , 若  $x_2 > x_1$ , 则

当  $0 < a < 1$  时,  $f(x_2) - f(x_1) < 0$ , 此时  $f(x)$  在  $-\infty < x < +\infty$  内减小.

当  $a > 1$  时,  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , 此时,  $f(x)$  在  $-\infty < x < +\infty$  内增加.

**【222】** 不等式能否逐项取对数?

提示 应对底大于 1 及底介于 0 与 1 之间分别讨论.

解 不一定可以, 当底大于 1 时才可以. 因为对于对数函数当底大于 1 时为单调增函数. 若底介于 0 与 1 之间, 则为单调减函数, 所以, 此时就不能逐项取对数.

**【223】** 设  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  及  $f(x)$  为单调增函数. 证明: 若

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \quad (1)$$

则

$$\varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)]. \quad (2)$$

提示 利用函数单调性的定义.

证 设  $x_0$  为三个函数公共域内的任一点, 则

$$\varphi(x_0) \leq f(x_0) \leq \psi(x_0).$$

由(1)以及函数  $f(x)$  的单调增加性知

$$f[\varphi(x_0)] \leq f[f(x_0)], \quad \varphi[\varphi(x_0)] \leq f[\varphi(x_0)];$$

从而,  $\varphi[\varphi(x_0)] \leq f[f(x_0)]$ . 同理, 可证  $f[f(x_0)] \leq \psi[\psi(x_0)]$ , 由  $x_0$  的任意性, 于是, (2) 式得证.

求反函数  $x = \varphi(y)$  和它的存在域, 若:

**【224】**  $y = 2x + 3 \quad (-\infty < x < +\infty)$ .

解  $x = \frac{y-3}{2}, \quad -\infty < y < +\infty$ .

**【225】**  $y = x^2$ .

(1)  $(-\infty < x \leq 0)$ ; (2)  $(0 \leq x < +\infty)$ .

解 (1)  $x = -\sqrt{y}, \quad 0 \leq y < +\infty$ ; (2)  $x = \sqrt{y}, \quad 0 \leq y < +\infty$ .

**【226】**  $y = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \neq -1)$ .

解 由于  $y + xy = 1 - x$ , 解出  $x$  得反函数  $x = \frac{1-y}{1+y}, \quad y \neq -1$ .

**【227】**  $y = \sqrt{1-x^2}$ .

(1)  $(-1 \leq x \leq 0)$ ; (2)  $(0 \leq x \leq 1)$ .

解 (1)  $x = -\sqrt{1-y^2}, \quad 0 \leq y \leq 1$ ; (2)  $x = \sqrt{1-y^2}, \quad 0 \leq y \leq 1$ .

**【228】**  $y = \operatorname{sh} x$ , 式中  $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (-\infty < x < +\infty)$ .

解 由于  $2y = e^x - e^{-x}$ , 即

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0,$$

解出  $e^x$  后两端再取对数, 即得

$$x = \operatorname{arsh} y = \ln(y + \sqrt{1+y^2}), \quad (-\infty < y < +\infty).$$



【229】  $y = \operatorname{th} x$ , 式中  $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (-\infty < x < +\infty)$ .

解 由于  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1}$ , 即  $e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$ , 两端再取对数, 并注意到  $\frac{1+y}{1-y} > 0$  即  $-1 < y < 1$ , 于是,

$$x = \operatorname{arth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}, \quad -1 < y < 1.$$

【230】  $y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4, \\ 2^x, & 4 < x < +\infty. \end{cases}$

解  $x = \begin{cases} y, & -\infty < y < 1, \\ \sqrt{y}, & 1 \leq y \leq 16, \\ \log_2 y, & 16 < y < +\infty. \end{cases}$

【231】 设函数  $f(x)$  定义于对称区间  $(-l, l)$  中, 若  $f(-x) \equiv f(x)$ , 则称  $f(x)$  为偶函数, 若  $f(-x) \equiv -f(x)$ , 则称  $f(x)$  为奇函数.

确定下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数:

(1)  $f(x) = 3x - x^3$ ; (2)  $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$ ; (3)  $f(x) = a^x + a^{-x} (a > 0)$ ;

(4)  $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ ; (5)  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

解 (1)  $f(-x) = -3x + x^3 \equiv -f(x)$ , 故为奇函数.

(2)  $f(-x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} \equiv f(x)$ , 故为偶函数.

(3)  $f(-x) = a^{-x} + a^x \equiv f(x)$ , 故为偶函数.

(4)  $f(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = -\ln \frac{1-x}{1+x} \equiv -f(x)$ , 故为奇函数.

(5)  $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \equiv -f(x)$ , 故为奇函数.

【232】 证明: 定义于对称区间  $(-l, l)$  内的任何函数  $f(x)$  可以表示为偶函数与奇函数之和的形式.

证明思路 注意, 当  $-l < x < l$  时, 有  $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ , 命题即易获证.

证 因为  $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ ,

而  $\frac{f(x) + f(-x)}{2}$  为偶函数,  $\frac{f(x) - f(-x)}{2}$  为奇函数, 于是, 本题得证.

【233】 若存在数  $T > 0$  (函数的周期——在广义的意义上) 使定义于集合  $E$  的函数  $f(x)$  满足等式

$$f(x \pm T) = f(x) \quad (x \in E),$$

则函数  $f(x)$  称为周期函数.

说明下列函数中哪些是周期函数, 并求它们的最小周期:

(1)  $f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$ ; (2)  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$ ;

(3)  $f(x) = 2 \tan \frac{x}{2} - 3 \tan \frac{x}{3}$ ; (4)  $f(x) = \sin^2 x$ ;

(5)  $f(x) = \sin x^2$ ; (6)  $f(x) = \sqrt{\tan x}$ ;

(7)  $f(x) = \tan \sqrt{x}$ ; (8)  $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$ .

提示 (5) 用反证法. 设  $\sin(x+a)^2 = \sin x^2$ .

解 对于(1), 由于

$$f\left(x + \frac{2\pi}{\lambda}\right) = A \cos \lambda \left(x + \frac{2\pi}{\lambda}\right) + B \sin \lambda \left(x + \frac{2\pi}{\lambda}\right) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x = f(x),$$



故为周期函数,最小周期为  $T = \frac{2\pi}{\lambda}$  ( $\lambda > 0$ ). 同理可证: (2)、(3)、(4)和(6)也是周期函数,最小周期分别为  $2\pi$ 、 $6\pi$ 、 $\pi$  和  $\pi$ . 对于(5),若周期为  $a$ ,即  $\sin(x+a)^2 = \sin x^2$ . 令  $x=0$  即得  $a = \pm \sqrt{m\pi}$  ( $m$  为某正整数),代入,又令  $x = \sqrt{2m\pi}$ ,易得  $\sin(2\sqrt{2}m\pi) = 0$ . 但  $2\sqrt{2}m$  显然不是整数,得到矛盾. 于是,  $\sin x^2$  不是周期函数,同理,(7)和(8)也不是周期函数.

**【234】** 证明:对于狄利克雷函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

任何有理数皆为其周期.

证 设  $l$  为任一有理数,则当  $x$  为有理数时,  $x+l$  也为有理数. 若  $x$  为无理数,则  $x+l$  也为无理数,所以,

$$\chi(x+l) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

即  $\chi(x+l) = \chi(x)$ ,  $l$  为周期.

**【235】** 证明:定义于共同的集合且周期是可公度的两个周期函数之和及其乘积也是周期函数.

**证明思路** 设  $f_1(x)$  及  $f_2(x)$  为定义在集合  $A$  上的周期函数,  $T_1$  及  $T_2$  分别为它们的周期. 又设  $T$  为  $T_1$  及  $T_2$  的公约数,即  $T_1 = k_1 T$ ,  $T_2 = k_2 T$ , 其中  $k_1, k_2$  为正整数. 于是,

$$f_1(x+k_1 T_1) = f_1(x), \quad f_2(x+k_2 T_2) = f_2(x).$$

易证  $k_1 k_2 T$  为  $f_1(x) + f_2(x)$  及  $f_1(x) f_2(x)$  的周期.

证 设  $f_1(x)$  及  $f_2(x)$  为定义在集合  $A$  上的周期函数,  $T_1$  及  $T_2$  分别为它们的周期. 又设  $T$  为  $T_1$  及  $T_2$  的公约数,即  $T_1 = T k_1$ ,  $T_2 = T k_2$ , 其中  $k_1, k_2$  为正整数. 于是,

$$f_1(x+k_1 T_1) = f_1(x), \quad f_2(x+k_2 T_2) = f_2(x).$$

设

$$F_1(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad F_2(x) = f_1(x) f_2(x),$$

可以证明:  $k_1 k_2 T$  分别是  $F_1(x)$  和  $F_2(x)$  的周期. 事实上,我们有

$$F_1(x+k_1 k_2 T) = f_1(x+k_1 k_2 T) + f_2(x+k_1 k_2 T) = f_1(x) + f_2(x) = F_1(x),$$

$$F_2(x+k_1 k_2 T) = f_1(x+k_1 k_2 T) f_2(x+k_1 k_2 T) = f_1(x) f_2(x) = F_2(x).$$

从而,本题得证.

**【236】** 证明:若函数  $f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 满足等式  $f(x+T) = k f(x)$ , 式中  $k$  和  $T$  为正的常数,则  $f(x) = a^x \varphi(x)$ , 式中  $a$  为常数,而  $\varphi(x)$  为以  $T$  为周期的函数.

**提示** 利用周期函数的定义.

证 由假定  $k > 0$ ,  $T > 0$ , 令  $a = k^{\frac{1}{T}} > 0$ , 则  $a^T = k$ . 于是有  $f(x+T) = a^T f(x)$ .

今定义函数  $\varphi(x)$  如下:  $\varphi(x) = a^{-x} f(x)$ . 易知  $\varphi(x)$  是周期为  $T$  的函数. 事实上,

$$\varphi(x+T) = a^{-(x+T)} f(x+T) = a^{-x} a^{-T} a^T f(x) = a^{-x} f(x) = \varphi(x).$$

于是,  $f(x) = a^x \varphi(x)$ , 其中  $\varphi(x)$  是周期为  $T$  的函数. 证毕.

## § 4. 函数的图像表示法

1° 要作函数  $y = f(x)$  的图像可按以下方式进行: (1) 确定函数的存在域  $X = \{x\}$ ; (2) 从  $X$  中选出充分密集的自变量值  $x_1, x_2, \dots, x_n$  与相应函数值组成对应数值表

$$y_i = f(x_i) \quad (i=1, 2, \dots, n);$$

(3) 在坐标平面  $Oxy$  上绘出一系列的点  $M_i(x_i, y_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 并用线把它们连接起来, 连线时应考虑中间各点的位置对曲线形状的影响.

2° 为了得到函数的正确图像, 应当研究这个函数的一般性质.



首先必须:(1)解方程  $f(x)=0$ , 求出函数图像与  $Ox$  轴的交点(函数的零点);(2)确定函数为正或为负时自变量的变化域;(3)若有可能,说明函数单调(增或减)区间;(4)研究当自变量无限趋于函数存在域边界点时函数的情况.

这一节里要假定读者已经知道最简单的初等函数的性质,如幂函数、指数函数、三角函数等.

利用这些性质,不用作大量的计算工作,立即可以画出许多函数的草图,其他的图像有时就是这些最简单图像的组(和或乘积等等).

**【237】** 作出线性齐次函数  $y=ax$  当  $a=0, \frac{1}{2}, 1, 2, -1$  时的图像.

解 如图 1.13 所示.

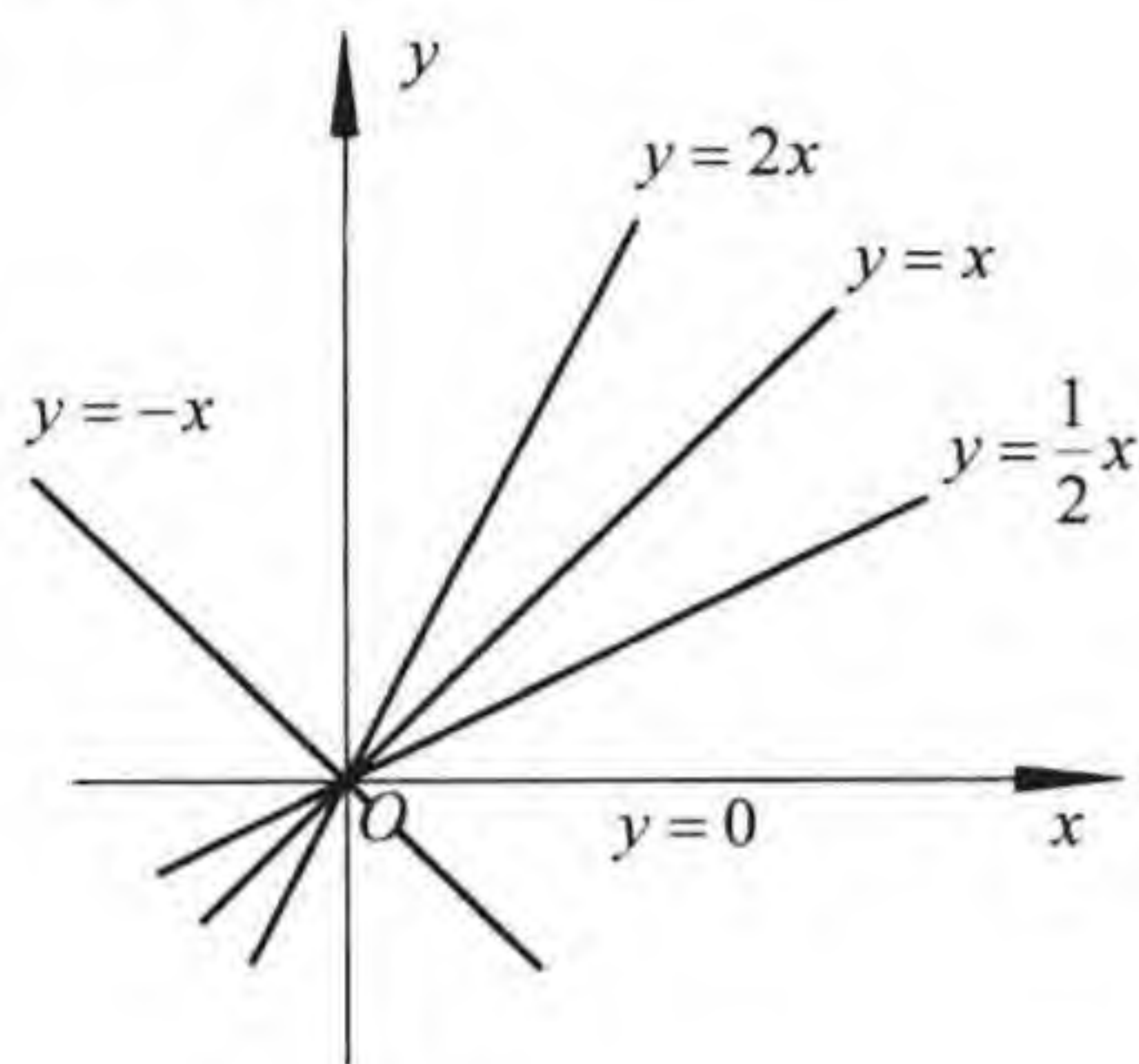


图 1.13

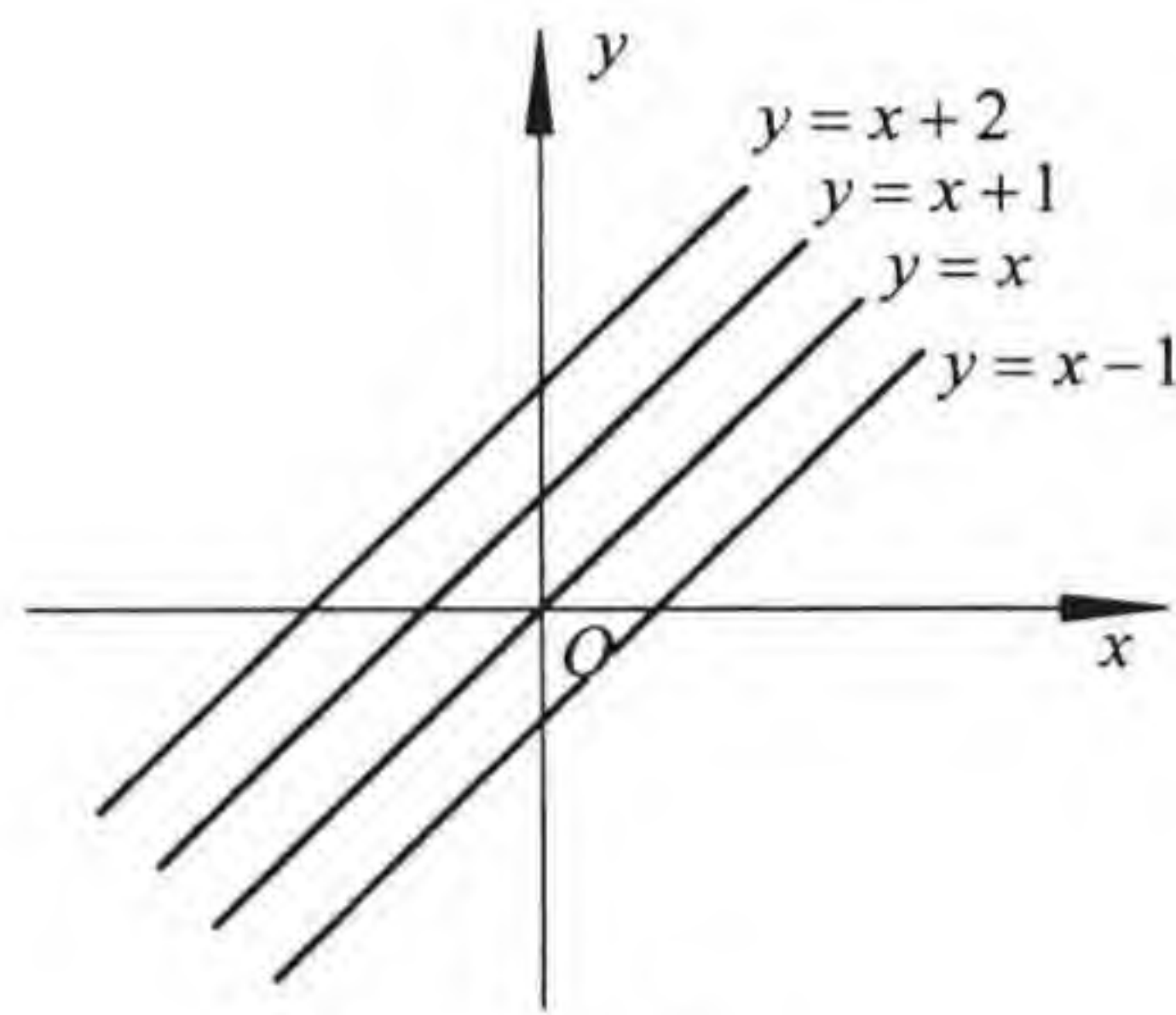


图 1.14

**【238】** 作出线性函数  $y=x+b$  当  $b=0, 1, 2, -1$  时的图像.

解 如图 1.14 所示.

**【239】** 作出线性函数的图像:

(1)  $y=2x+3$ ; (2)  $y=2-0.1x$ ; (3)  $y=-\frac{x}{2}-1$ .

解 如图 1.15 所示.

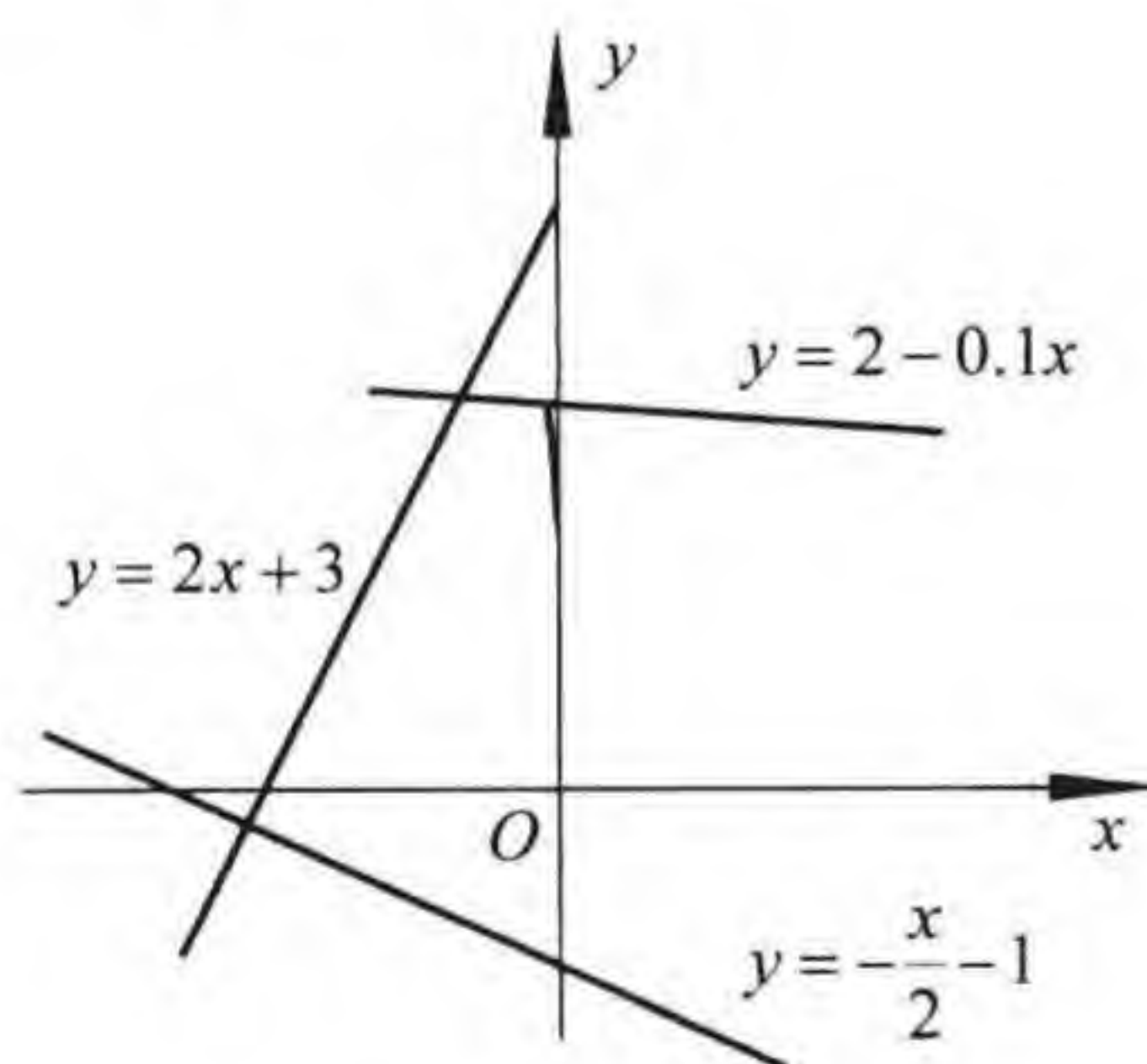


图 1.15

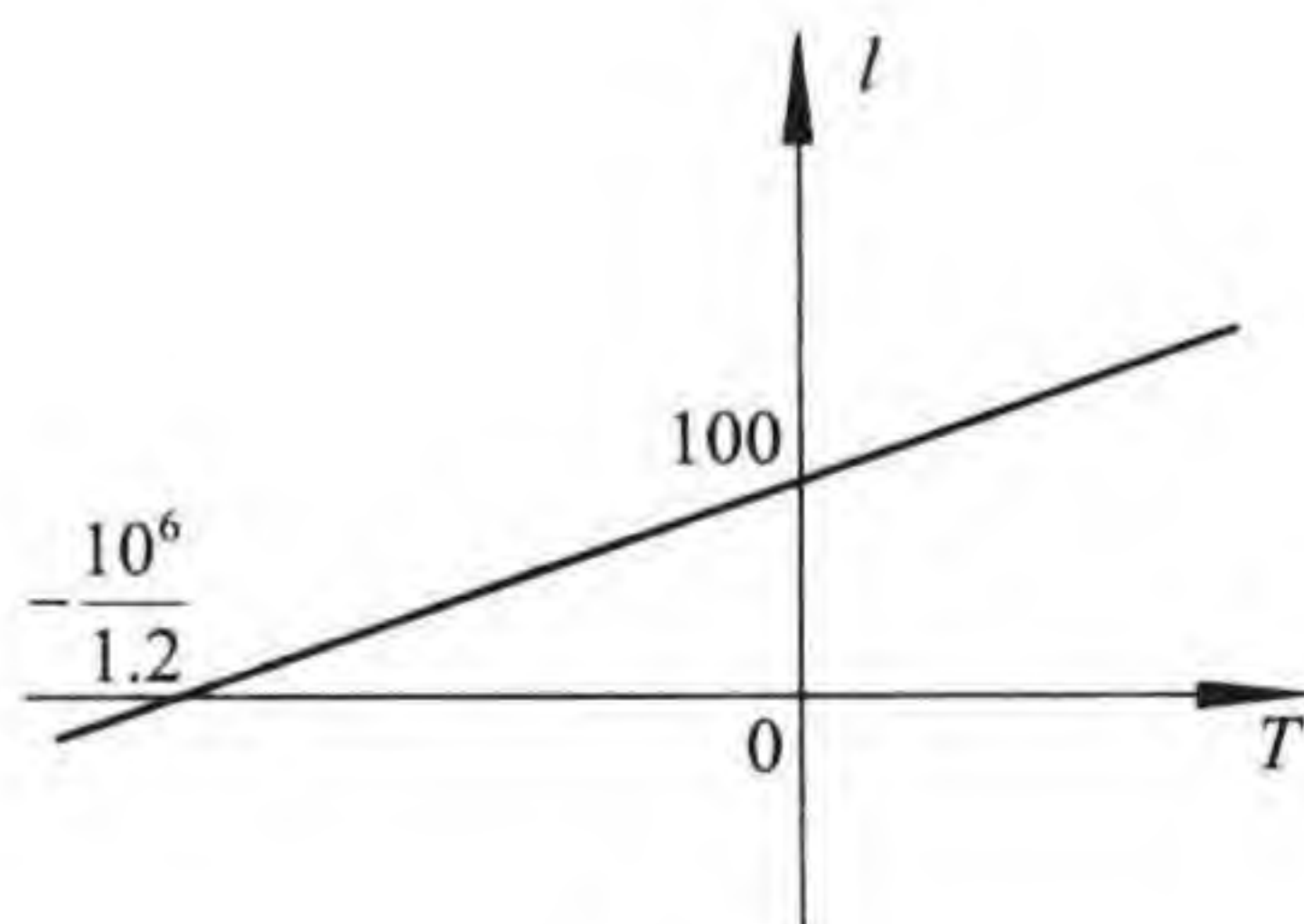


图 1.16

**【240】** 铁的线性膨胀系数  $\alpha=1.2 \times 10^{-6}$ . 在适当的尺度下作出函数

$$l=f(T) \quad (-40^\circ \leq T \leq 100^\circ)$$

的图像,其中  $T$  表温度(以度计),  $l$  表当温度为  $T$  时铁棒的长. 已知当  $T=0^\circ$  时,  $l=100\text{cm}$ .

解 铁棒的长与温度的关系为  $l=l_0(1+\alpha T)$ .

当  $T=0$  时,  $l=100$ , 代入上式得  $l_0=100$ . 于是,  $l=100(1+1.2 \times 10^{-6} T)$ , 如图 1.16 所示(两轴单位不同).

**【241】** 二质点沿数轴运动,第一质点在初始时刻  $t=0$  时位于原点左方  $20\text{m}$  处,其速度为  $v_1=10\text{m/s}$ ; 第二质点在  $t=0$  时位于原点  $O$  右方  $30\text{m}$  处,其速度为  $v_2=-20\text{m/s}$ . 作出此二点运动方程的图像并求它们相遇的时刻和位置.

解 二质点运动方程的位移  $s$  与时间  $t$  的关系分别为

$$s=10t-20, \quad s=-20t+30,$$



如图 1.17 所示. 解上述方程, 得

$$t = 1\frac{2}{3}\text{s}, \quad s = -3\frac{1}{3}\text{m},$$

即在运动开始后  $1\frac{2}{3}\text{s}$ , 在  $Ot$  轴之下方  $3\frac{1}{3}\text{m}$  处相遇, 如图中点  $P$  所示.

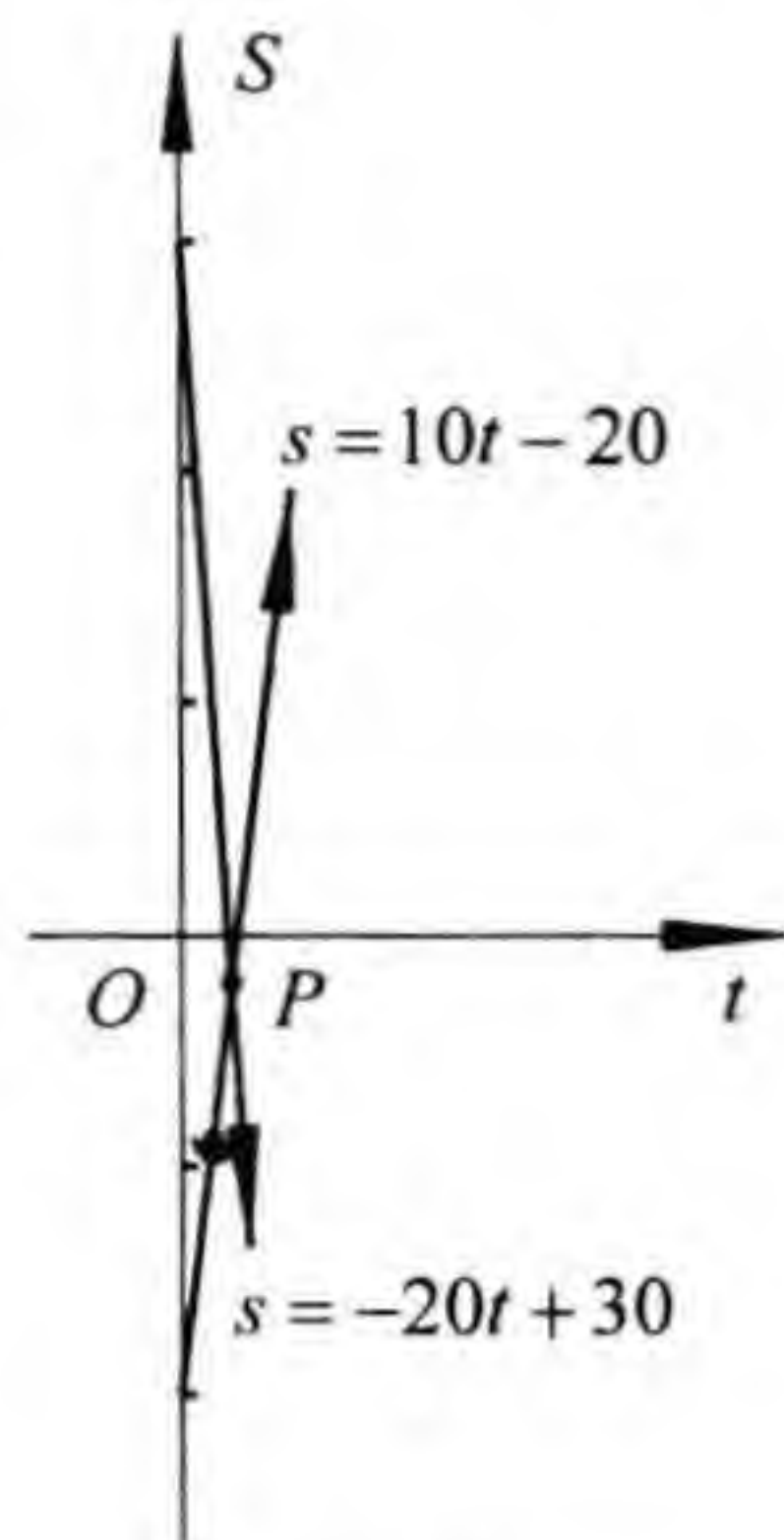


图 1.17

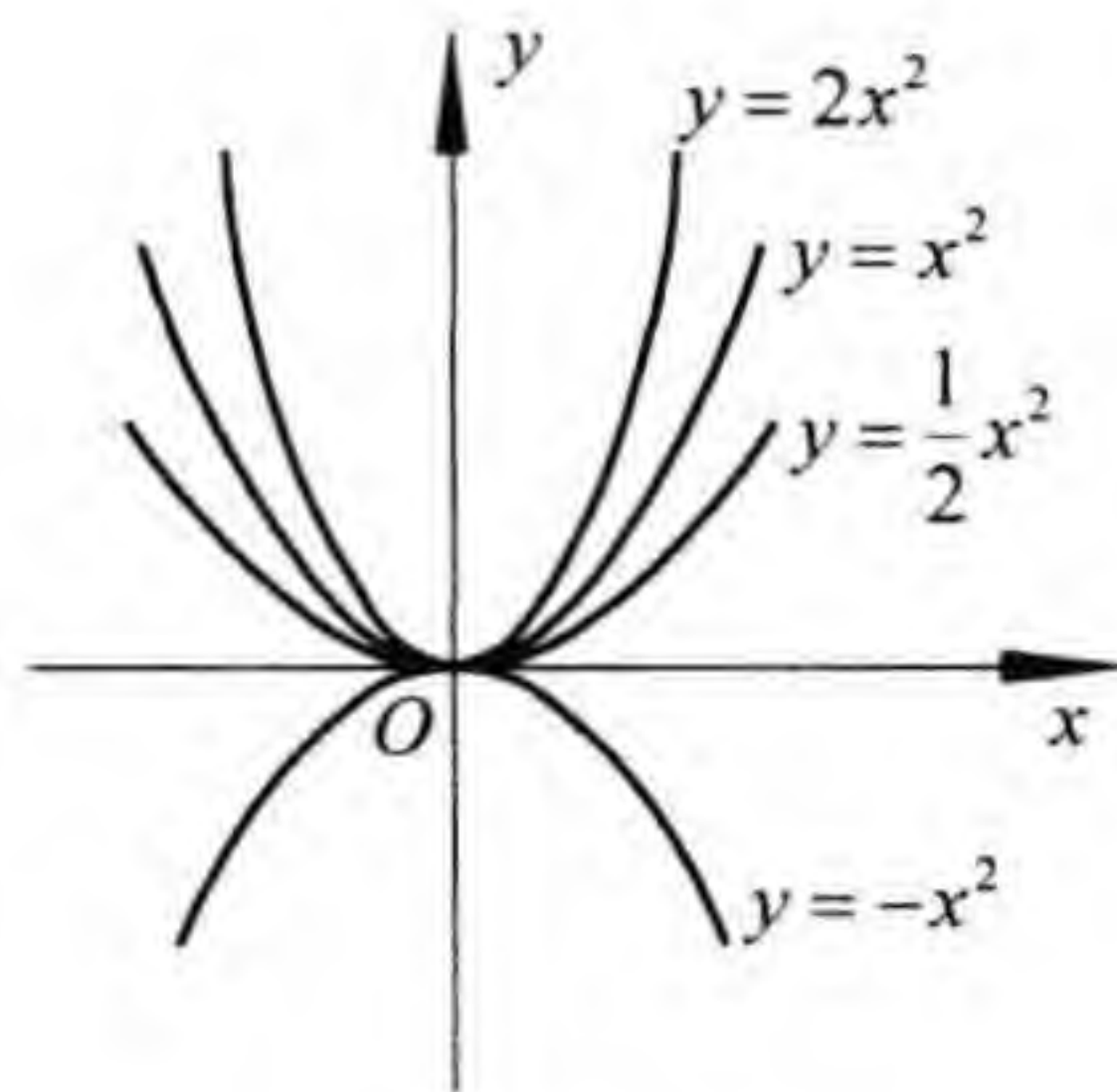


图 1.18

**【242】** 作出二次有理函数的图像(抛物线):

(1)  $y = ax^2$ , 当  $a = 1, \frac{1}{2}, 2, -1$ ; (2)  $y = (x - x_0)^2$ , 当  $x_0 = 0, 1, 2, -1$ ;

(3)  $y = x^2 + c$ , 当  $c = 0, 1, 2, -1$ .

解 (1) 如图 1.18 所示. (2) 如图 1.19 所示. (3) 如图 1.20 所示.

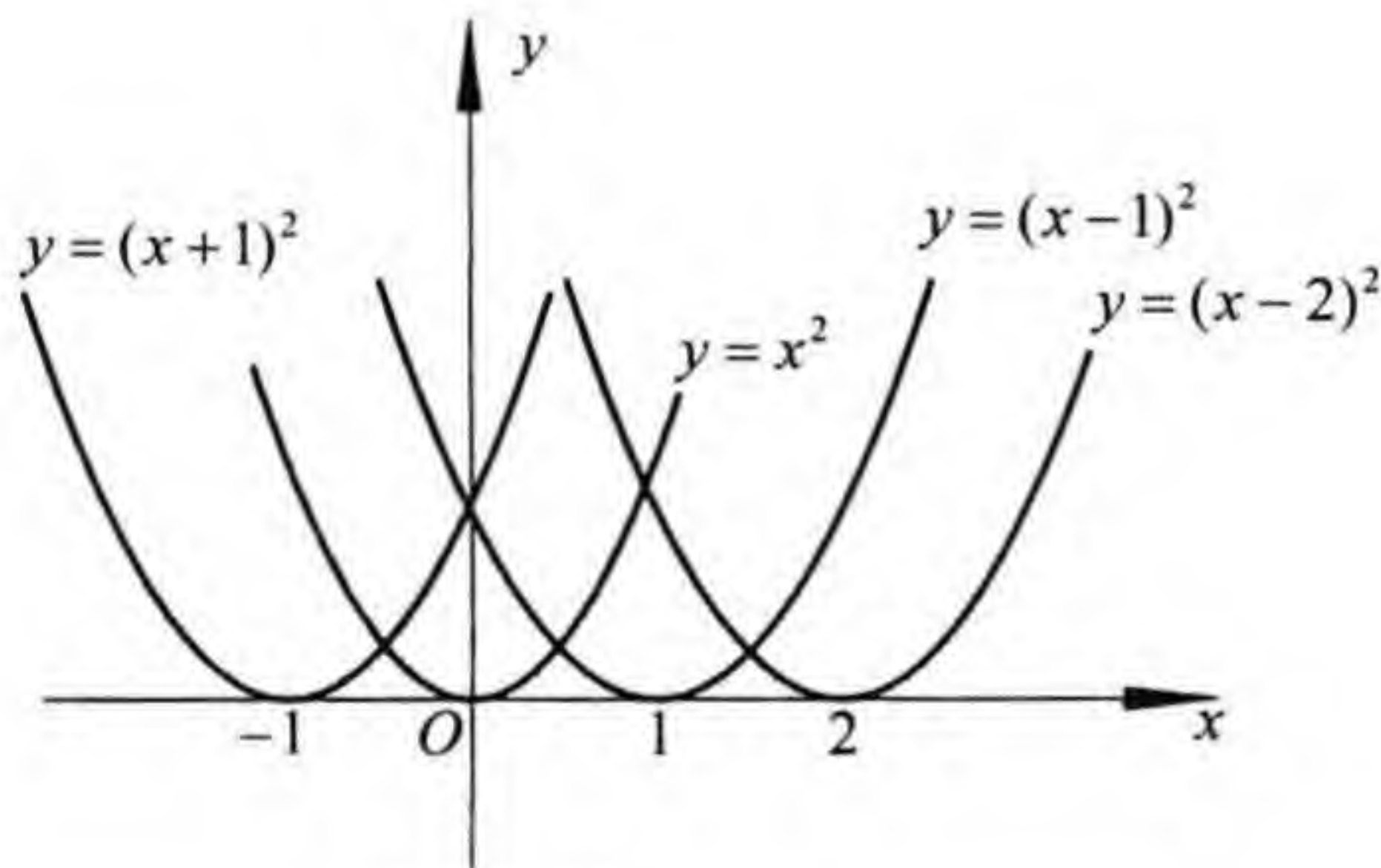


图 1.19

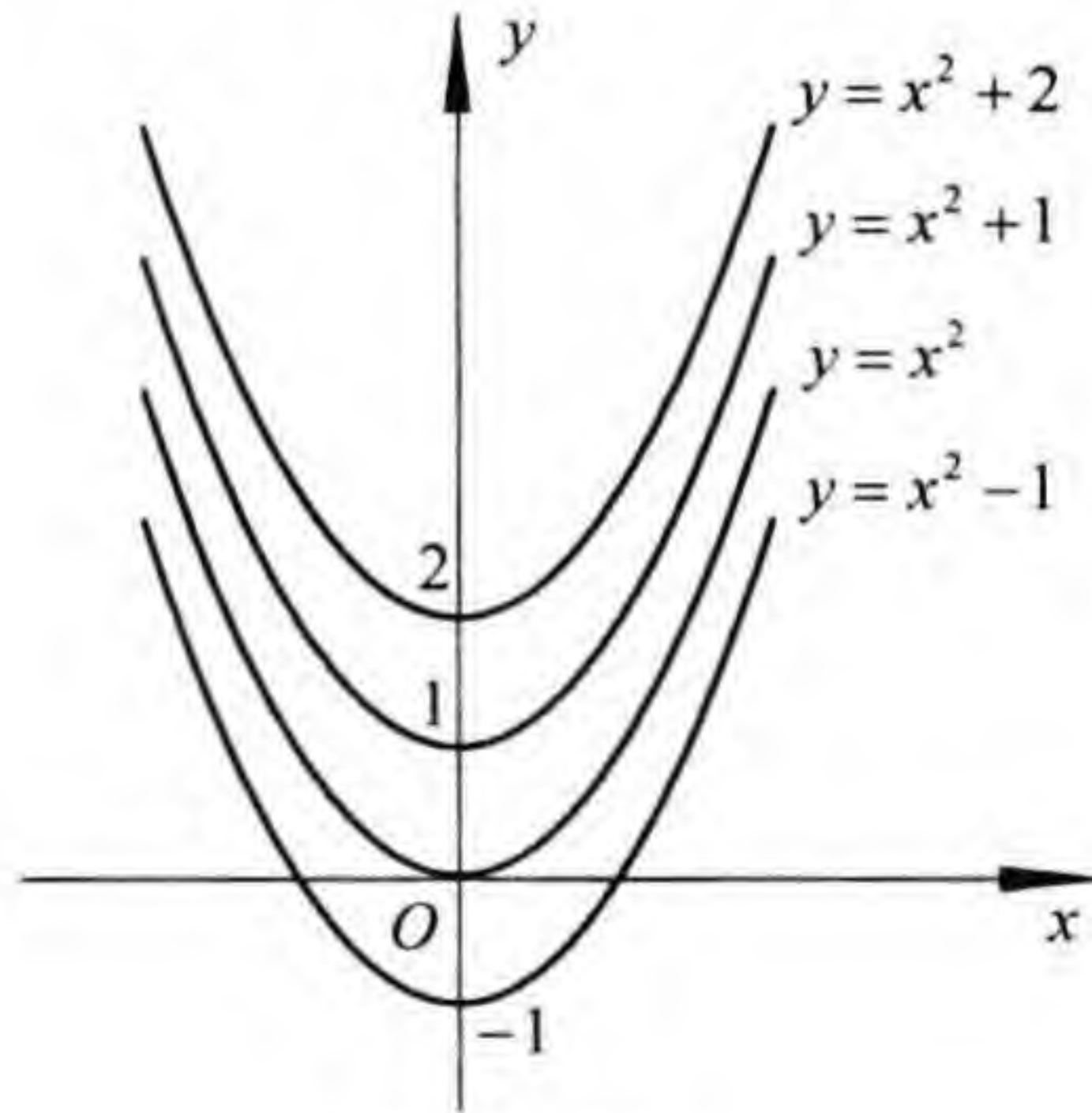


图 1.20

**【243】** 把二次三项式  $y = ax^2 + bx + c$  化为下面的形状

$$y = y_0 + a(x - x_0)^2,$$

再作出它的图像, 研究例子:

(1)  $y = 8x - 2x^2$ ; (2)  $y = x^2 + 3x + 2$ ; (3)  $y = -x^2 + 2x - 1$ ; (4)  $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ .

解 利用配方法得

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = y_0 + a(x - x_0)^2,$$

其中  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ ,  $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$ , 如图 1.21 所示.



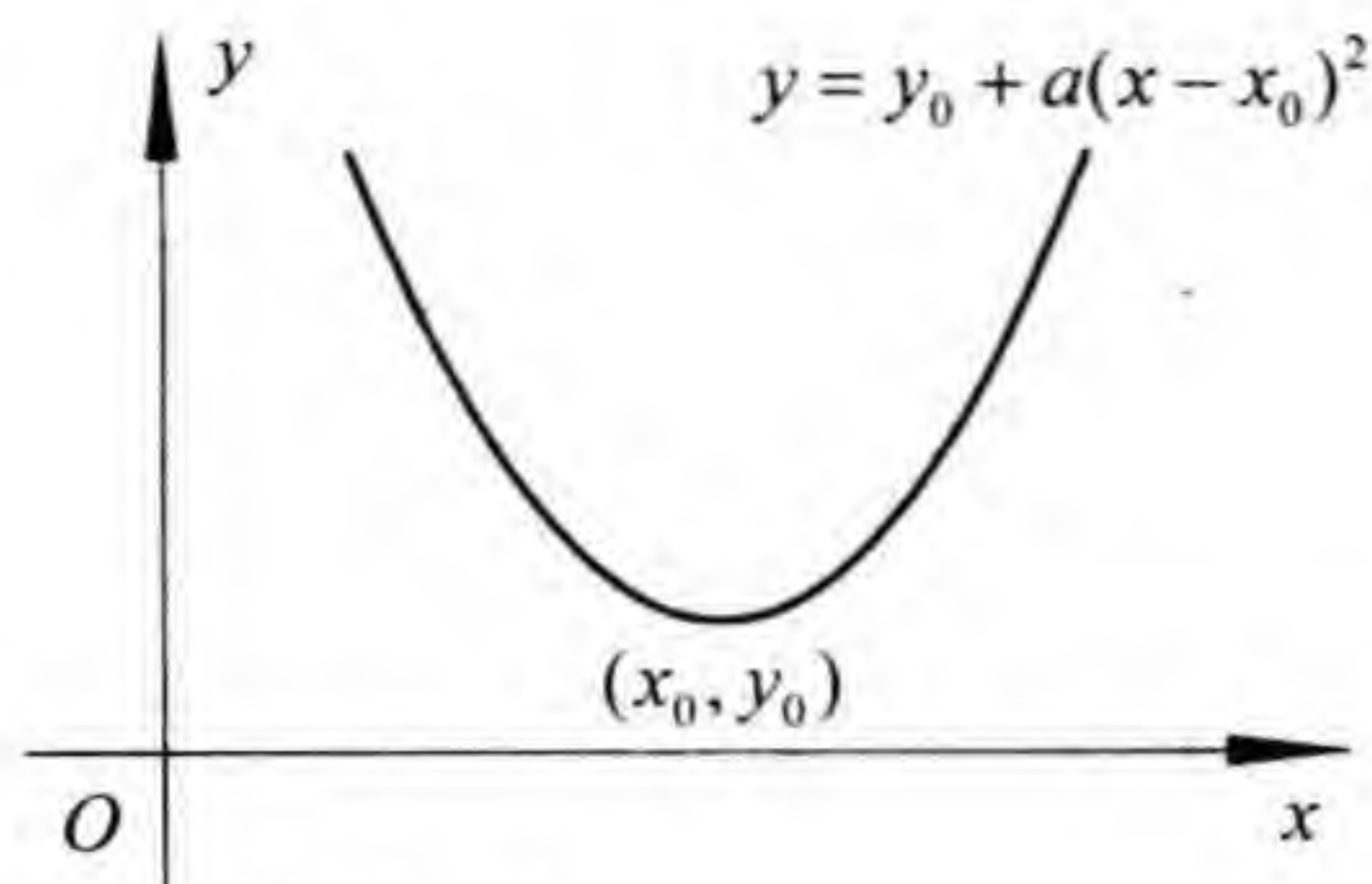


图 1.21

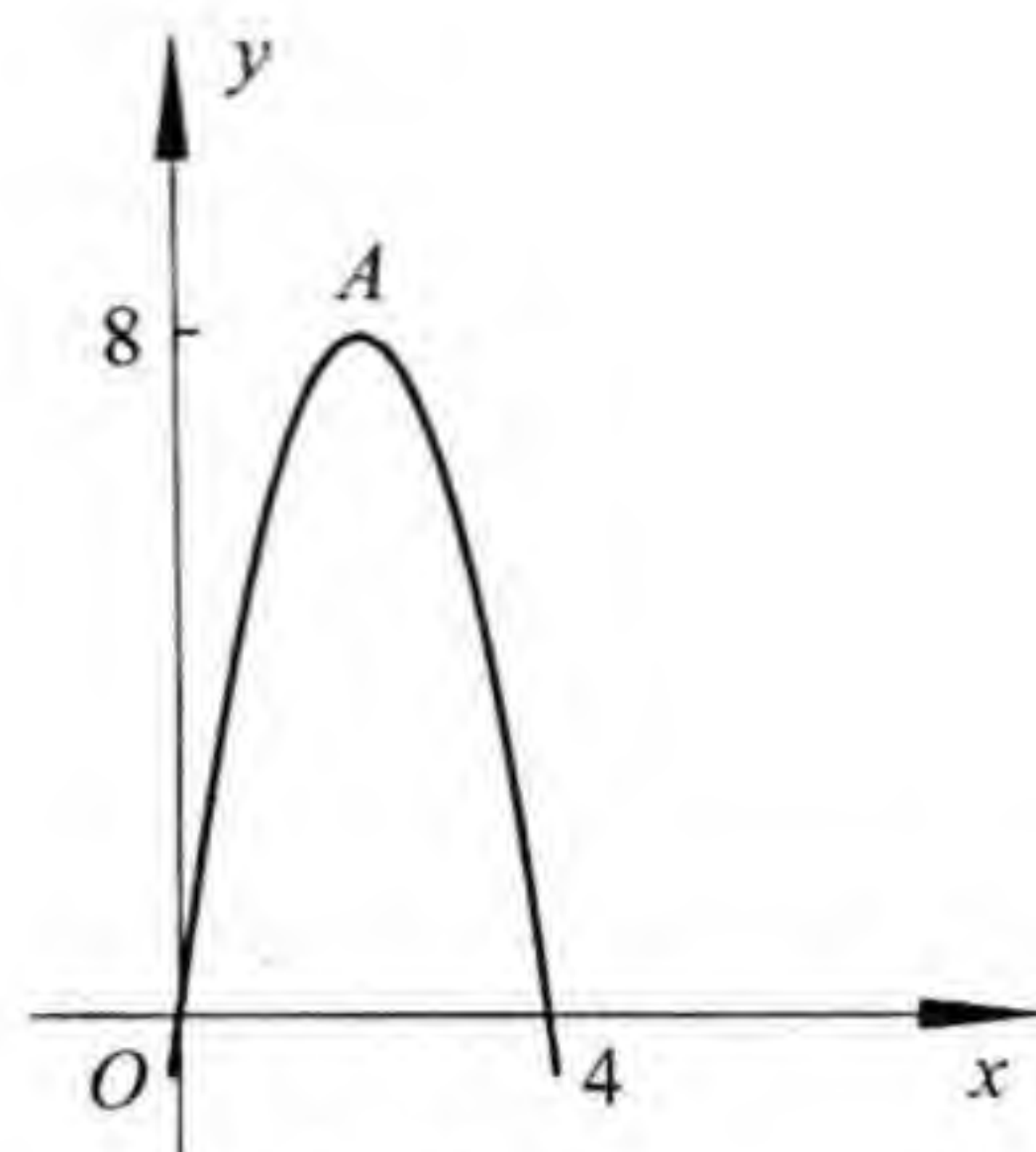


图 1.22

(1)  $y = 8x - 2x^2 = 8 - 2(x - 2)^2$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 8$ ,  $a = -2$ , 如图 1.22 所示, 顶点  $A(2, 8)$ .

(2)  $y = x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ ,  $x_0 = \frac{3}{2}$ ,  $y_0 = -\frac{1}{4}$ ,  $a = 1$ , 如图 1.23 所示, 顶点  $B\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ .

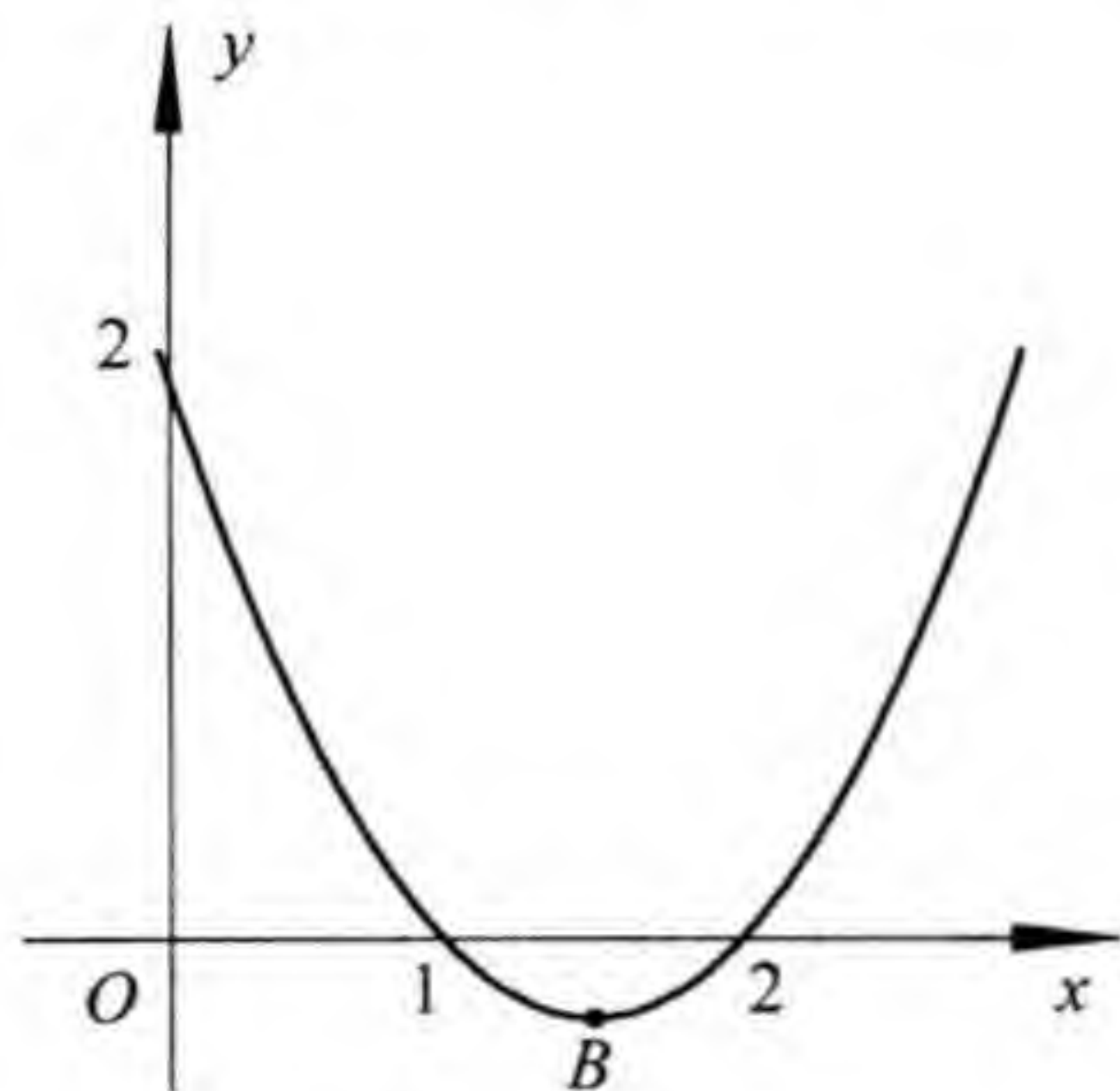


图 1.23

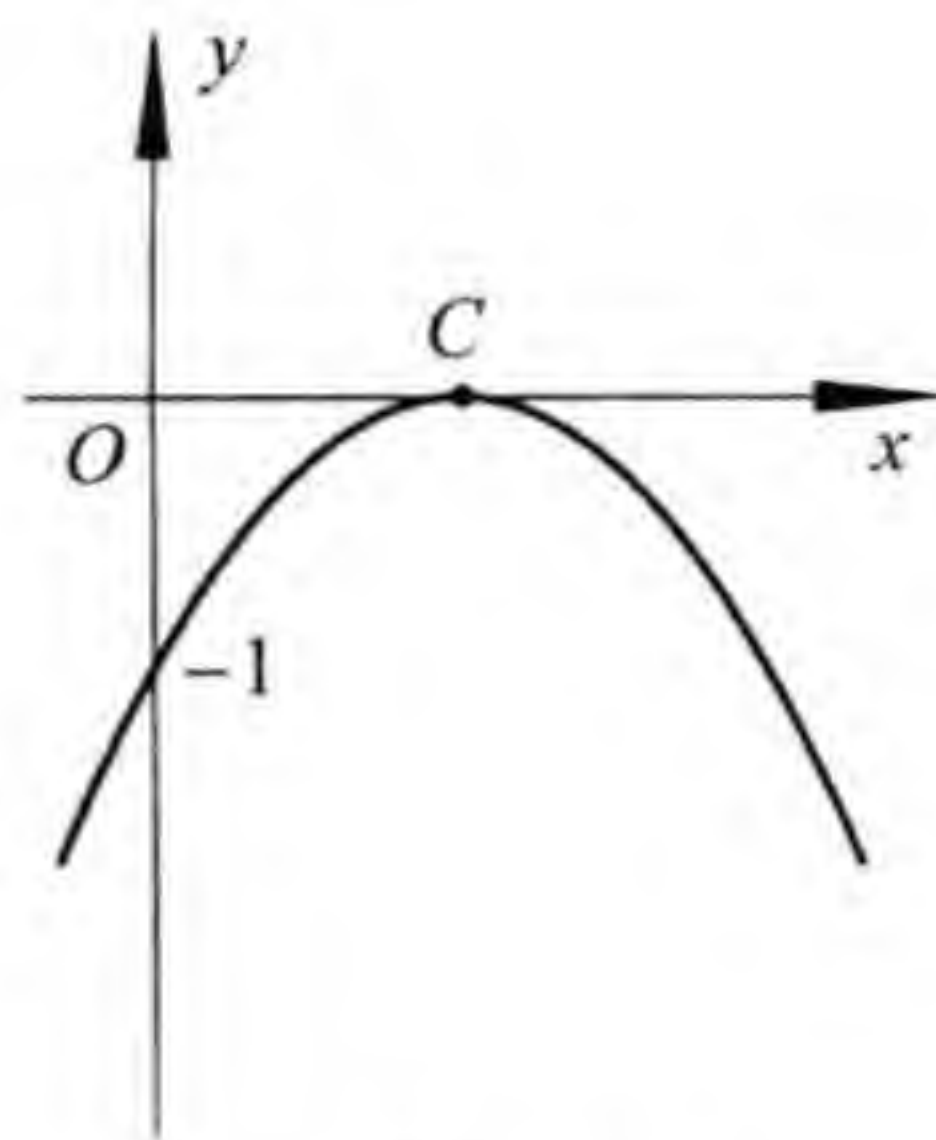


图 1.24

(3)  $y = -x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 0$ ,  $a = -1$ , 如图 1.24 所示, 顶点  $C(1, 0)$ .

(4)  $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + \frac{1}{2}$ ,  $x_0 = -1$ ,  $y_0 = \frac{1}{2}$ ,  $a = \frac{1}{2}$ ,

如图 1.25 所示, 顶点  $D(-1, \frac{1}{2})$ .

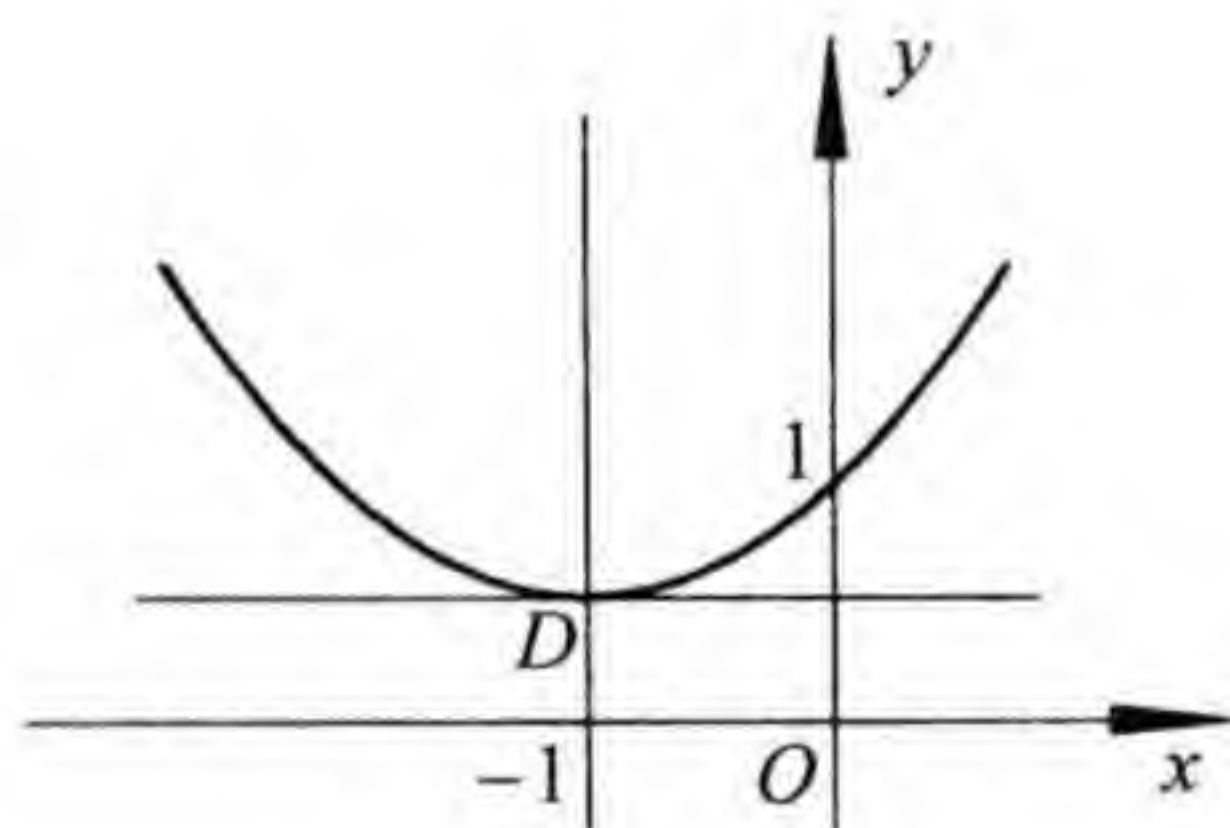


图 1.25

**【244】** 质点以初速度  $v_0 = 600\text{m/s}$  沿与水平面成角  $\alpha = 45^\circ$  的方向射出. 作出运动轨迹的图像, 并求最大上升高度及射程(取  $g \approx 10\text{m/s}^2$ , 不计空气阻力).

解 运动轨迹方程为

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

以  $v_0 = 600$ ,  $g = 10$ ,  $\alpha = 45^\circ$  代入得  $y = x - \frac{x^2}{36000}$ , 即

$$y = -\frac{1}{36000}(x - 18000)^2 + 9000.$$

当  $x = 18000$  时,  $y$  值最大, 最大上升高度为  $9000\text{m}$ ;

当  $x = 36000$  时,  $y = 0$ , 即射程为  $36000\text{m}$ . 如图 1.26 所示.

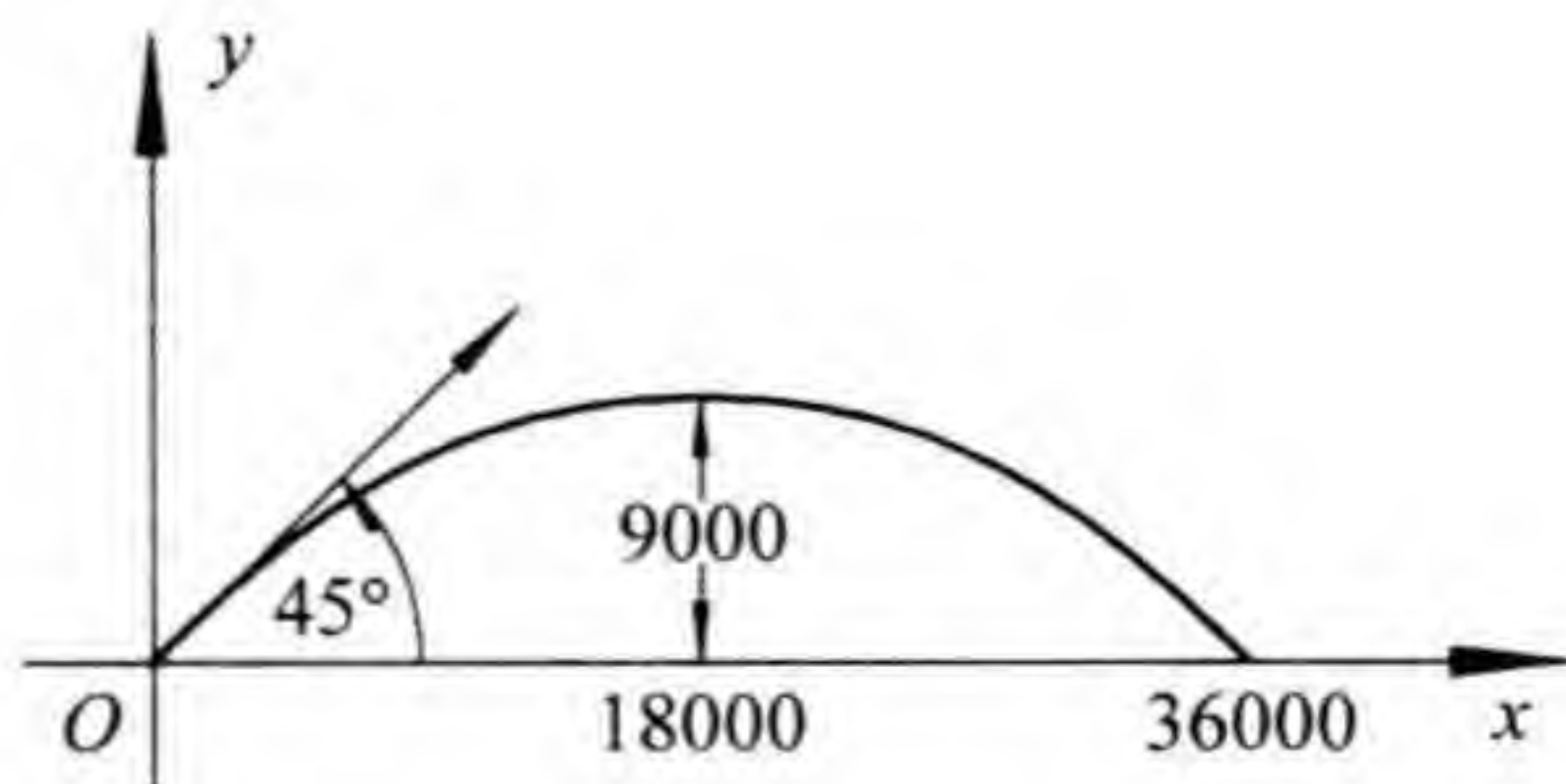


图 1.26



作出下列高于二次的有理函数的图像:

**【245】**  $y = x^3 + 1$

解 如图 1.27 所示.

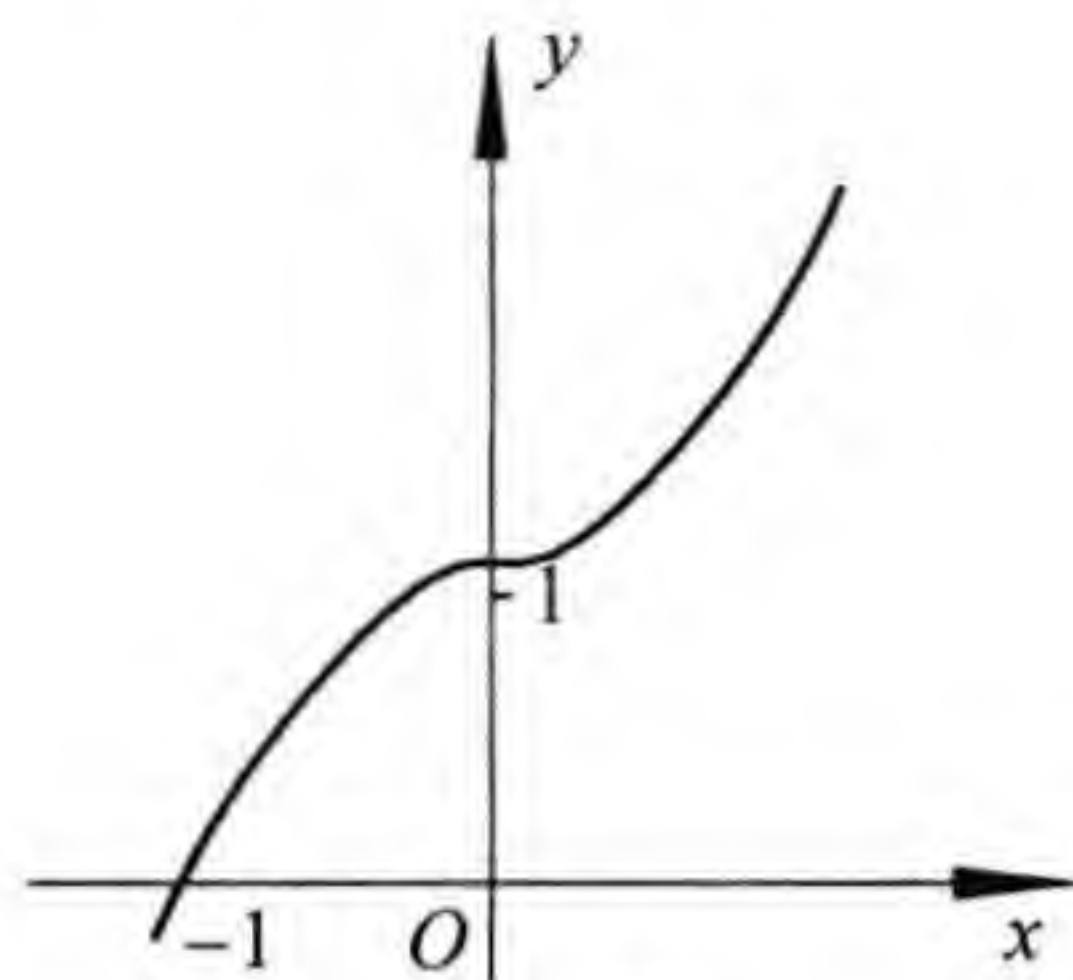


图 1.27

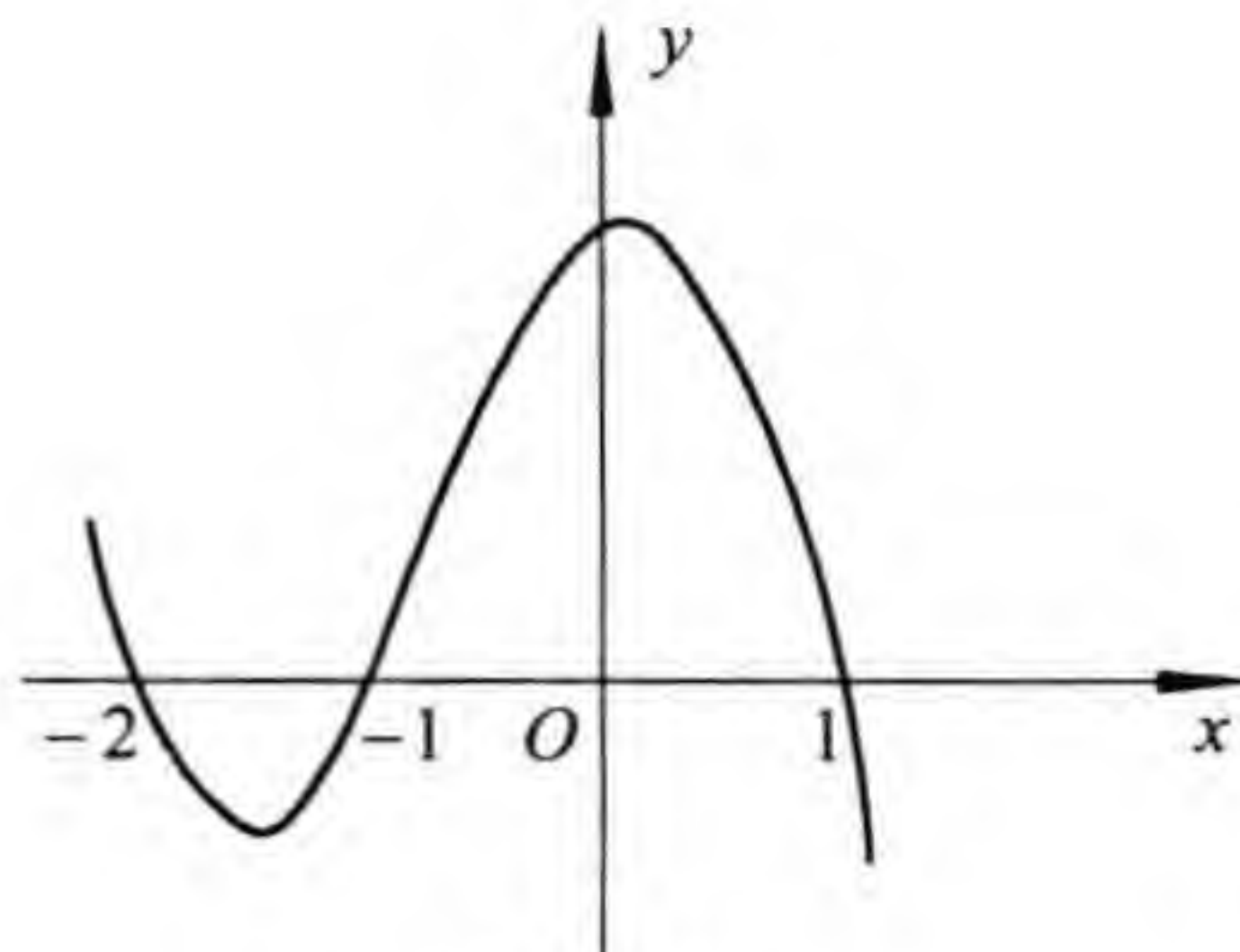


图 1.28

**【246】**  $y = (1 - x^2)(2 + x)$ .

解 当  $x = \pm 1, -2$  时,  $y = 0$ ; 当  $x < -2$  及  $-1 < x < 1$  时,  $y > 0$ ;

当  $-2 < x < -1$  及  $x > 1$  时,  $y < 0$ . 当  $x < -2$  及  $x > 1$  时, 曲线下降;

当  $-1 < x < 1$  时, 曲线由上升到下降; 当  $-2 < x < -1$  时, 曲线由下降到上升. 如图 1.28 所示.

**【247】**  $y = x^2 - x^4$ .

解  $y = x^2(1 - x)(1 + x) = \frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$ .

图像关于  $Oy$  轴对称, 与两坐标轴的交点为  $(-1, 0), (1, 0), (0, 0)$ , 且在  $(0, 0)$  点与  $Ox$  轴相切.

当  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  时,  $y = \frac{1}{4}$ , 此时  $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right)$  及  $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right)$  均为图像上的最高点.

当  $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$  时, 曲线上升; 当  $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$  时, 曲线下降. 如图 1.29 所示.

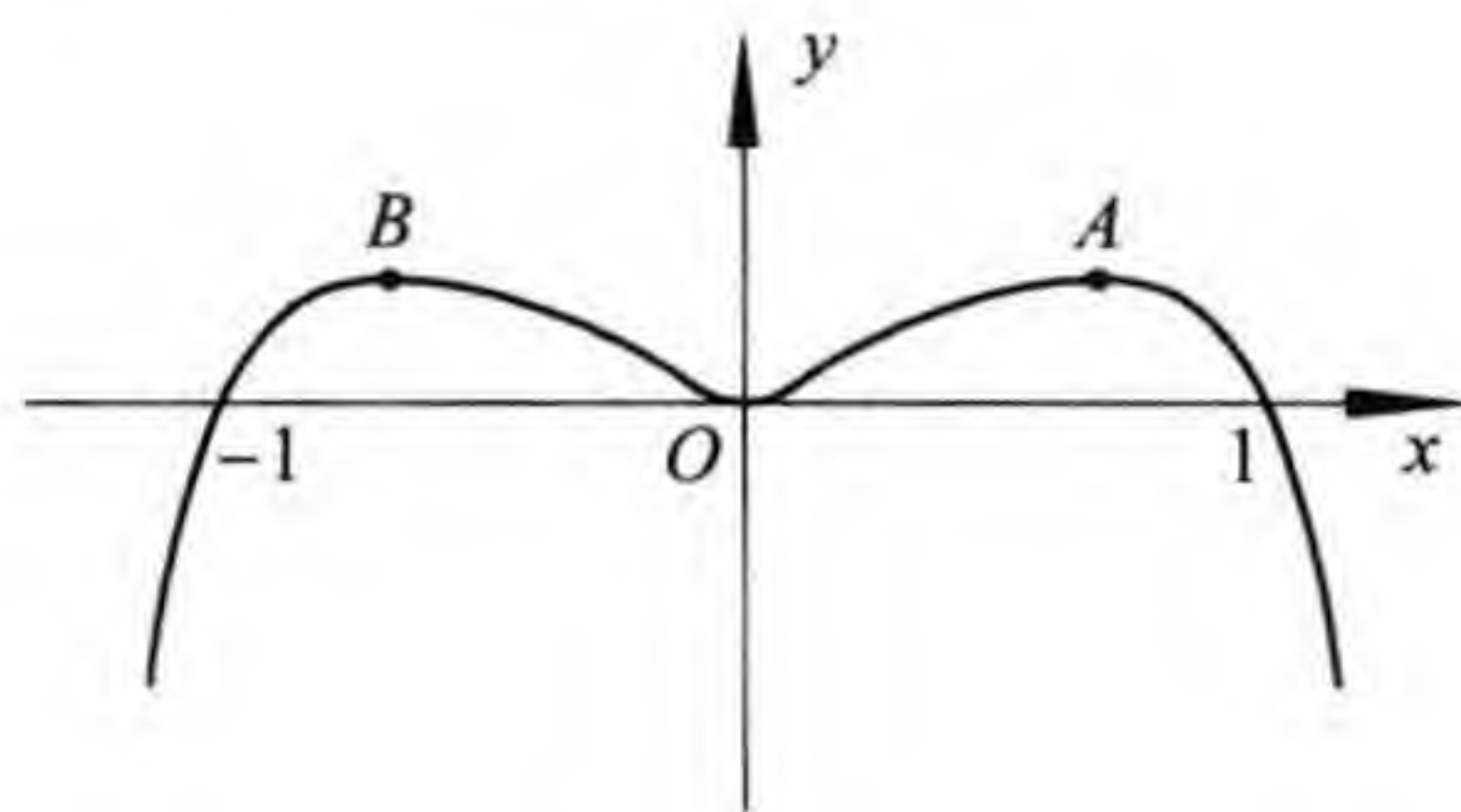


图 1.29

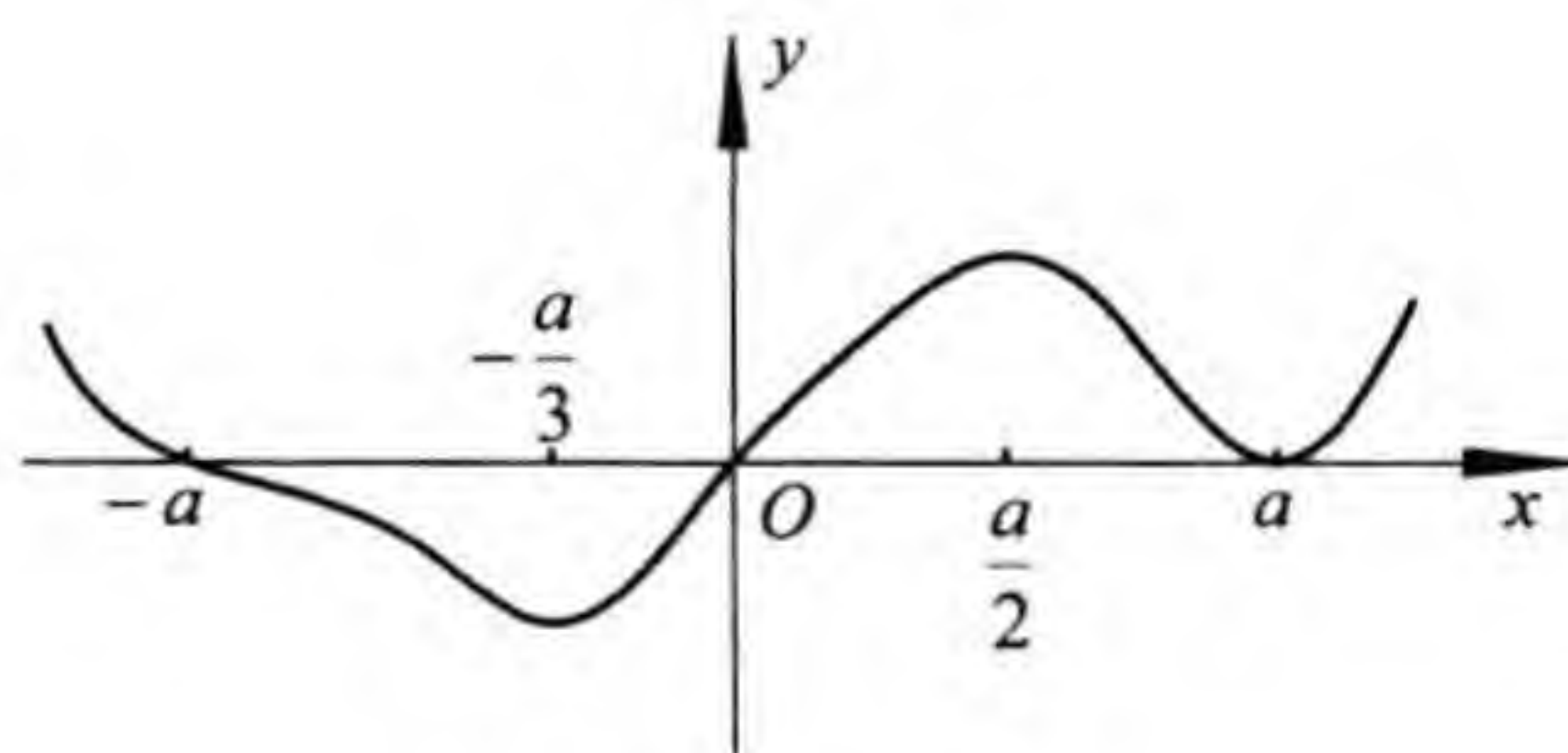


图 1.30

**【248】**  $y = x(a - x)^2(a + x)^3 \quad (a > 0)$ .

解 当  $x = 0, a, -a$  时,  $y = 0$ .  $(-a, 0)$  及  $(a, 0)$  为切点.

当  $x > 0$  及  $x < -a$  时,  $y > 0$ ; 当  $-a < x < 0$  时,  $y < 0$ .

如图 1.30 所示.

作出下列分式线性函数的图像(双曲线):

**【249】**  $y = \frac{1}{x}$ .

解 如图 1.31 所示.

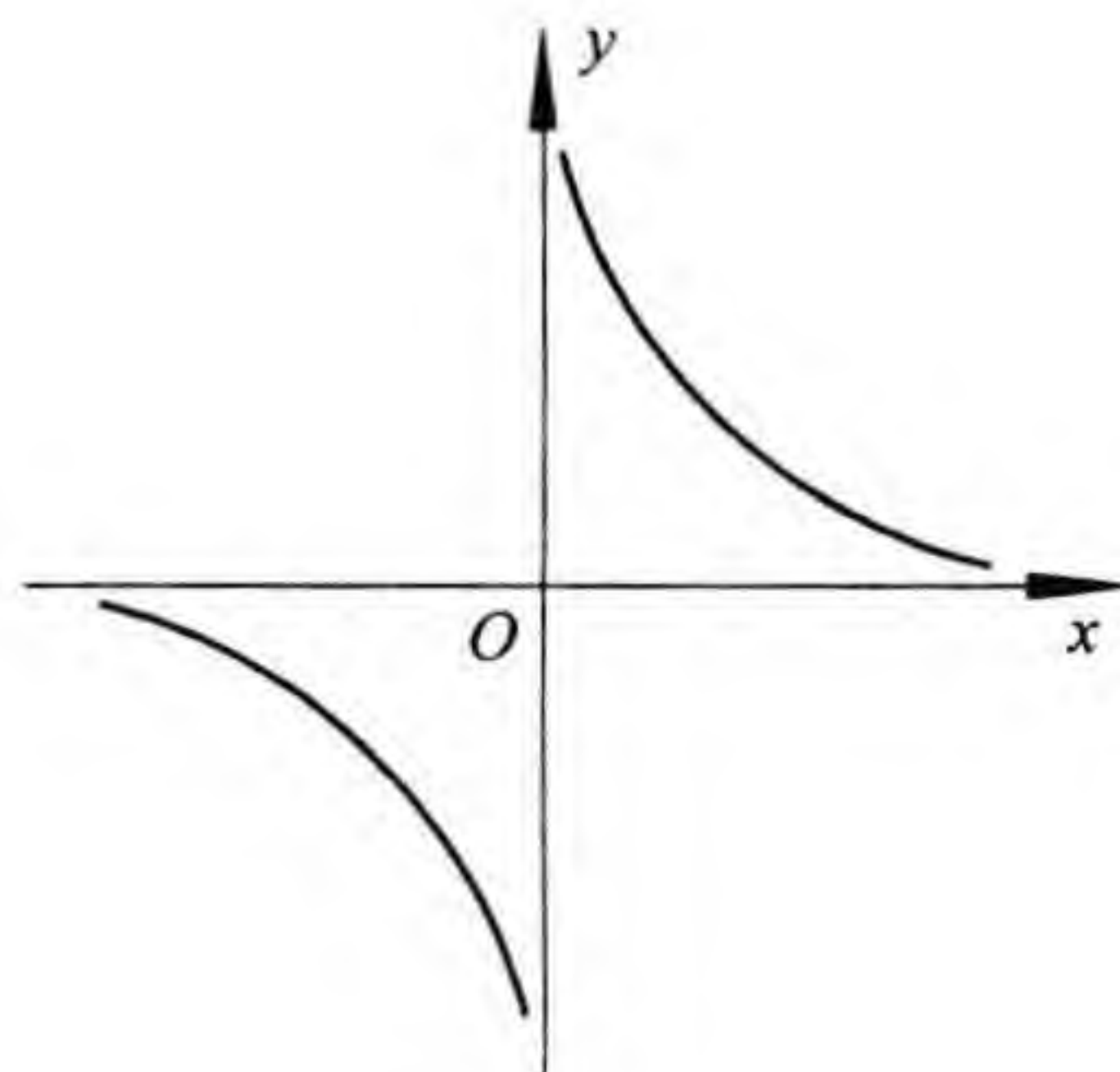


图 1.31



**【250】**  $y = \frac{1-x}{1+x}$ .

提示 对称中心为  $(-1, -1)$ .

解  $y = -1 + \frac{2}{1+x}$ ,

图像的对称中心为  $(-1, -1)$ , 如图 1.32 所示.

**【251】** 把分式线性函数

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0, c \neq 0).$$

化为以下形式  $y = y_0 + \frac{m}{x-x_0}$ . 再作它的图像.

研究例子  $y = \frac{3x+2}{2x-3}$ .

解  $y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x - (-\frac{d}{c})} = y_0 + \frac{m}{x-x_0}$ , 其中  $x_0 = -\frac{d}{c}$ ,  $y_0 = \frac{a}{c}$ ,  $m = \frac{bc-ad}{c^2}$ , 如图 1.33 所示.

对于  $y = \frac{3x+2}{2x-3}$ , 有  $x_0 = y_0 = \frac{3}{2}$ , 如图 1.34 所示.

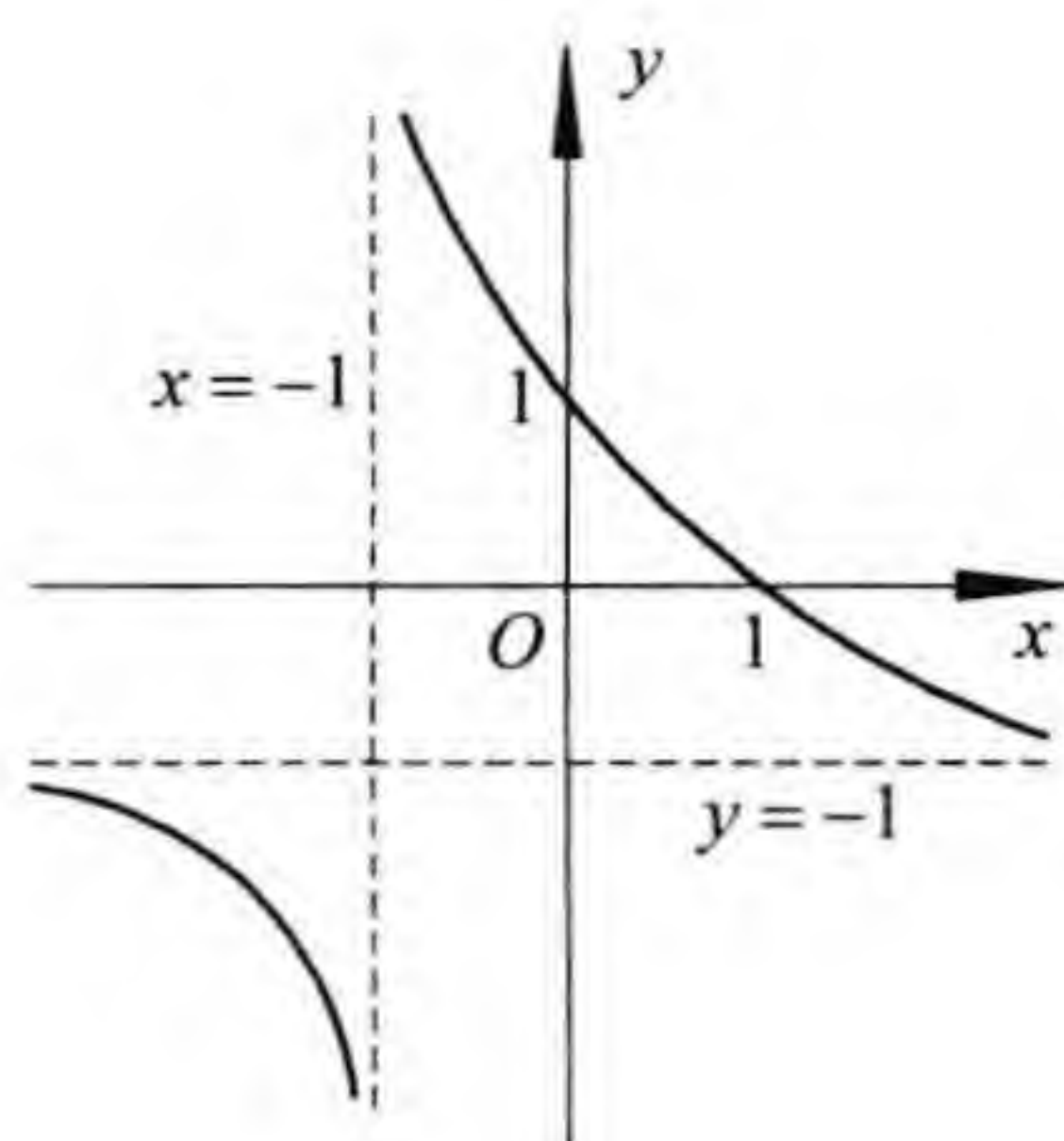


图 1.32

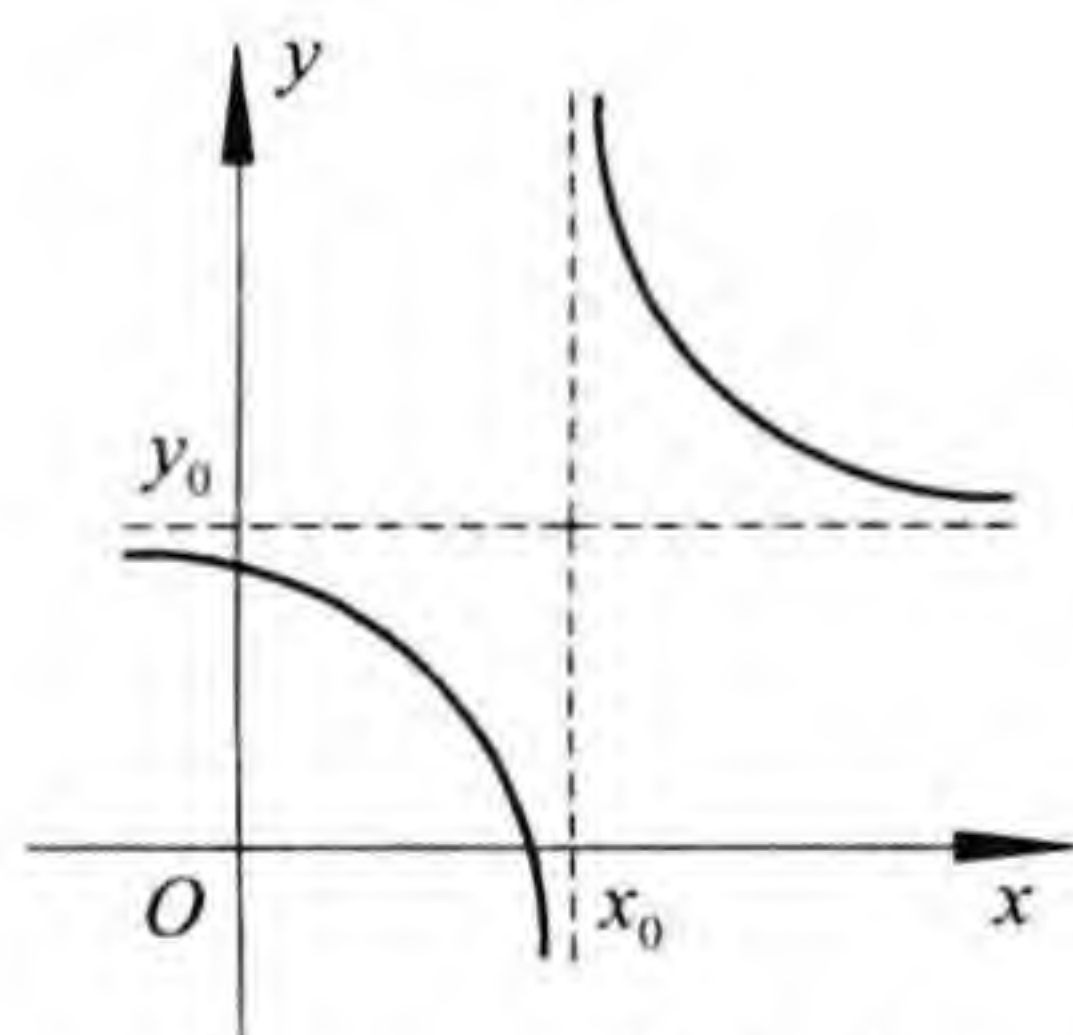


图 1.33

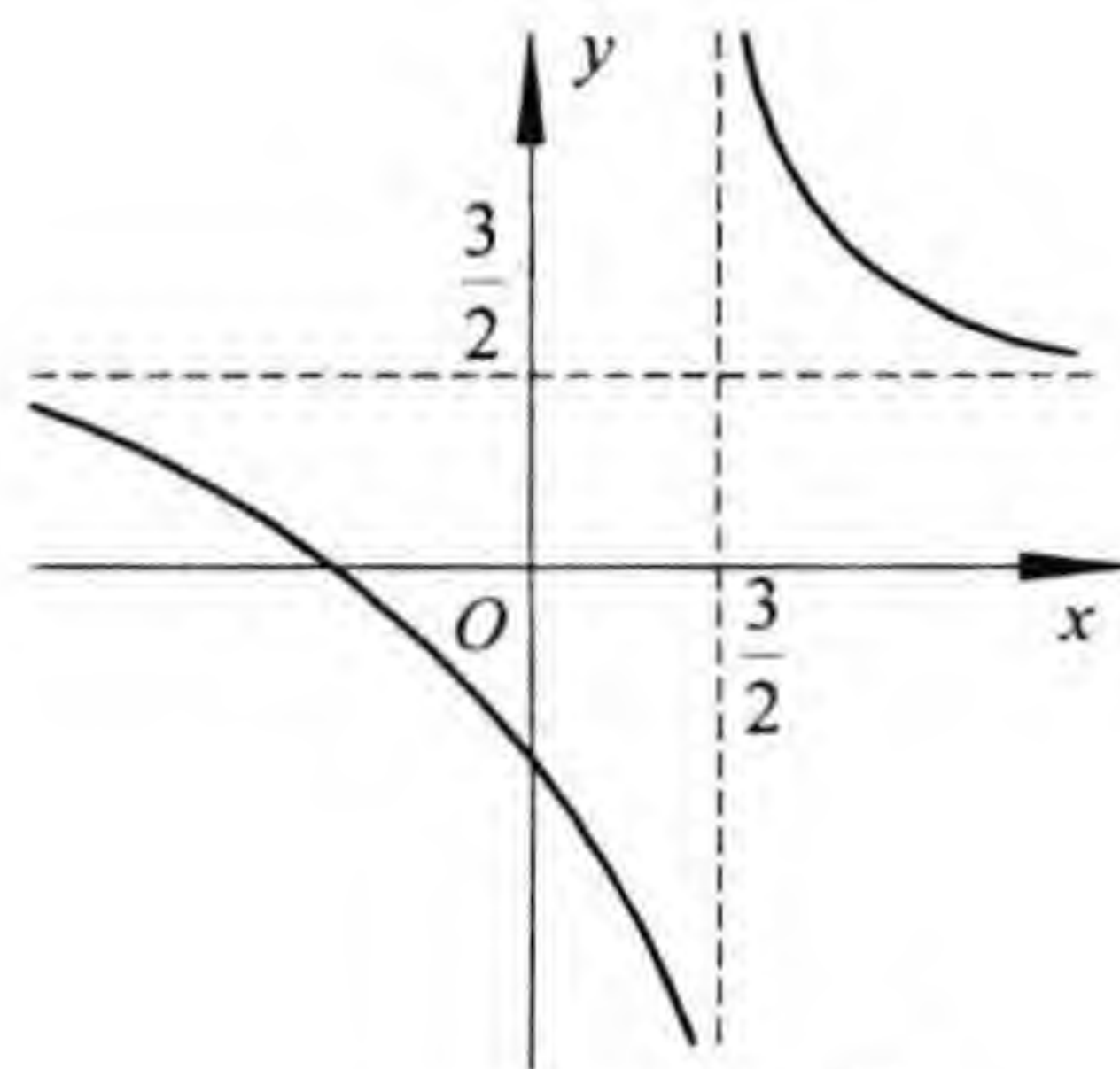


图 1.34

**【252】** 设气体当压强  $p_0 = 1\text{Pa}$  时占有体积  $V_0 = 12\text{m}^3$ . 若气体的温度保持不变, 作出气体体积  $V$  对压强  $p$  的依赖关系的图像(玻意耳—马略特定律).

解 当温度  $T = k$  (常数) 时, 气体体积  $V$  与压力  $p$  成反比, 即

$$pV = C,$$

其中  $C$  为常数.

当  $p_0 = 1$  时,  $V_0 = 12$ , 故  $C = 12$ , 从而  $pV = 12$ , 如图 1.35 所示.

作出下列有理分式函数的图像:

**【253】**  $y = x + \frac{1}{x}$  (双曲线).

提示 利用图像相加法, 将  $y = x$  及  $y = \frac{1}{x}$  的图像叠加即得

$y = x + \frac{1}{x}$  的图像.

注意, 254 题, 255 题及 260 题均可仿本题的解法.

解 将  $y = x$  及  $y = \frac{1}{x}$  的图像叠加即得, 如图 1.36 中黑粗线所示.

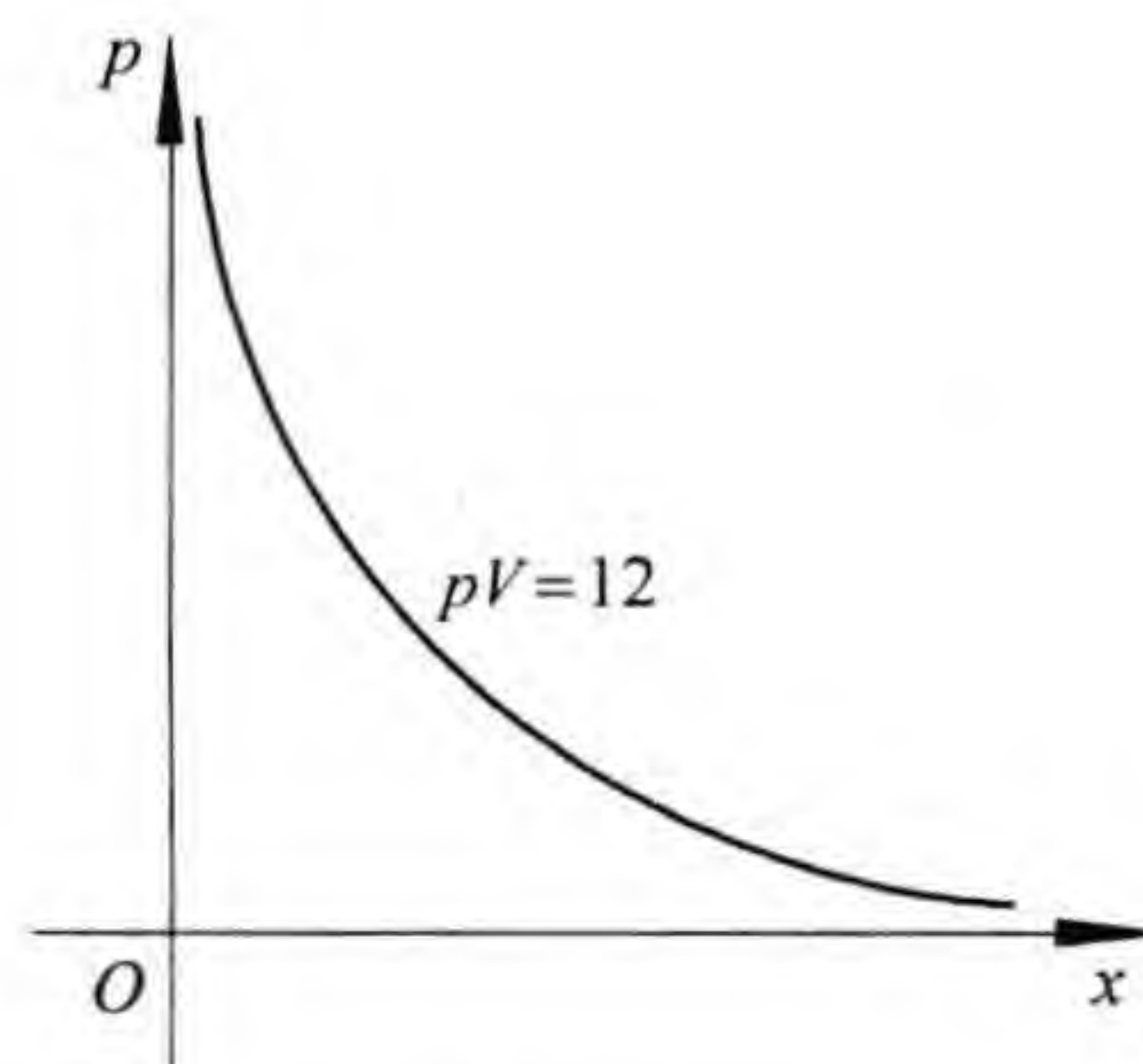


图 1.35



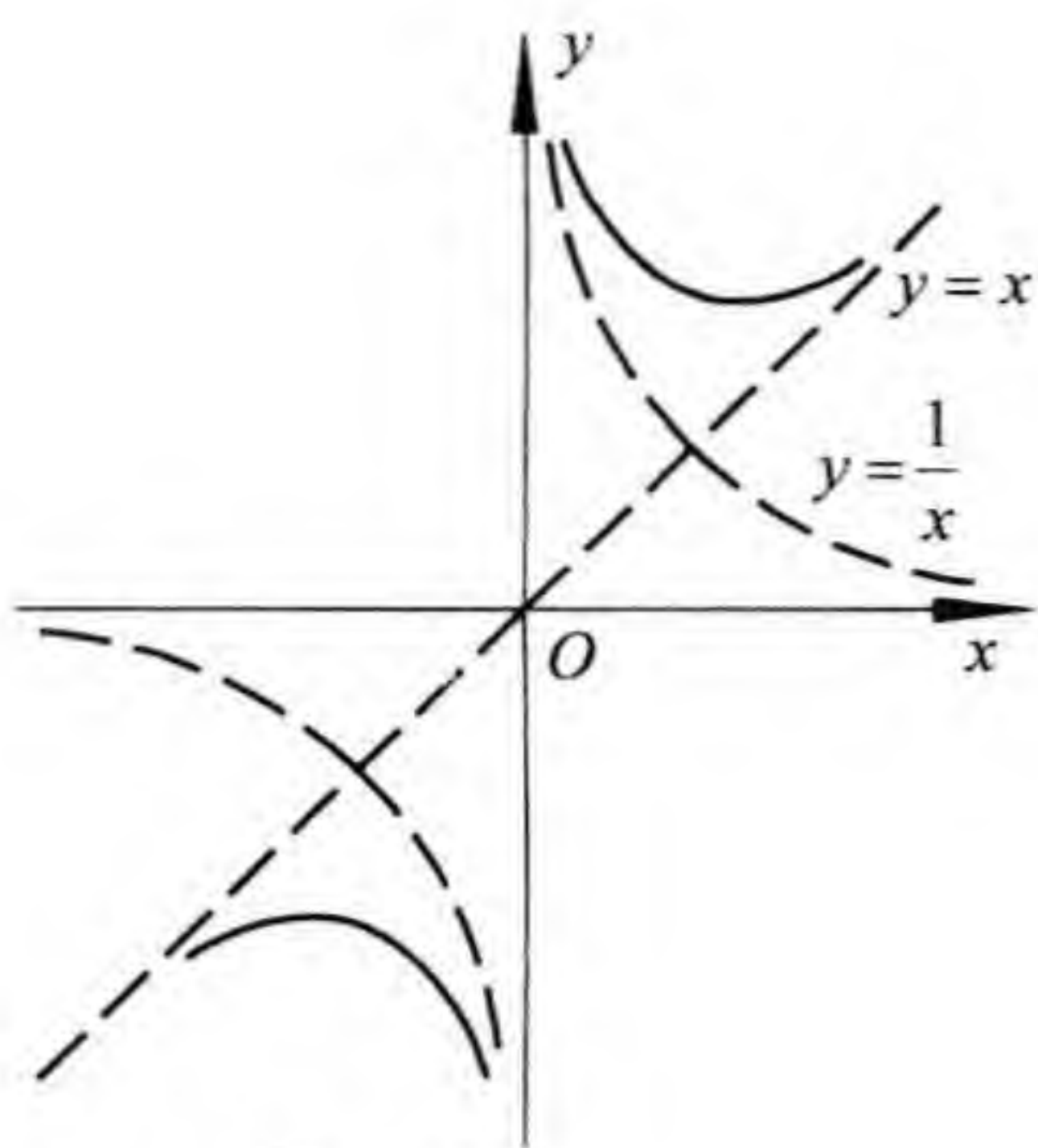


图 1.36

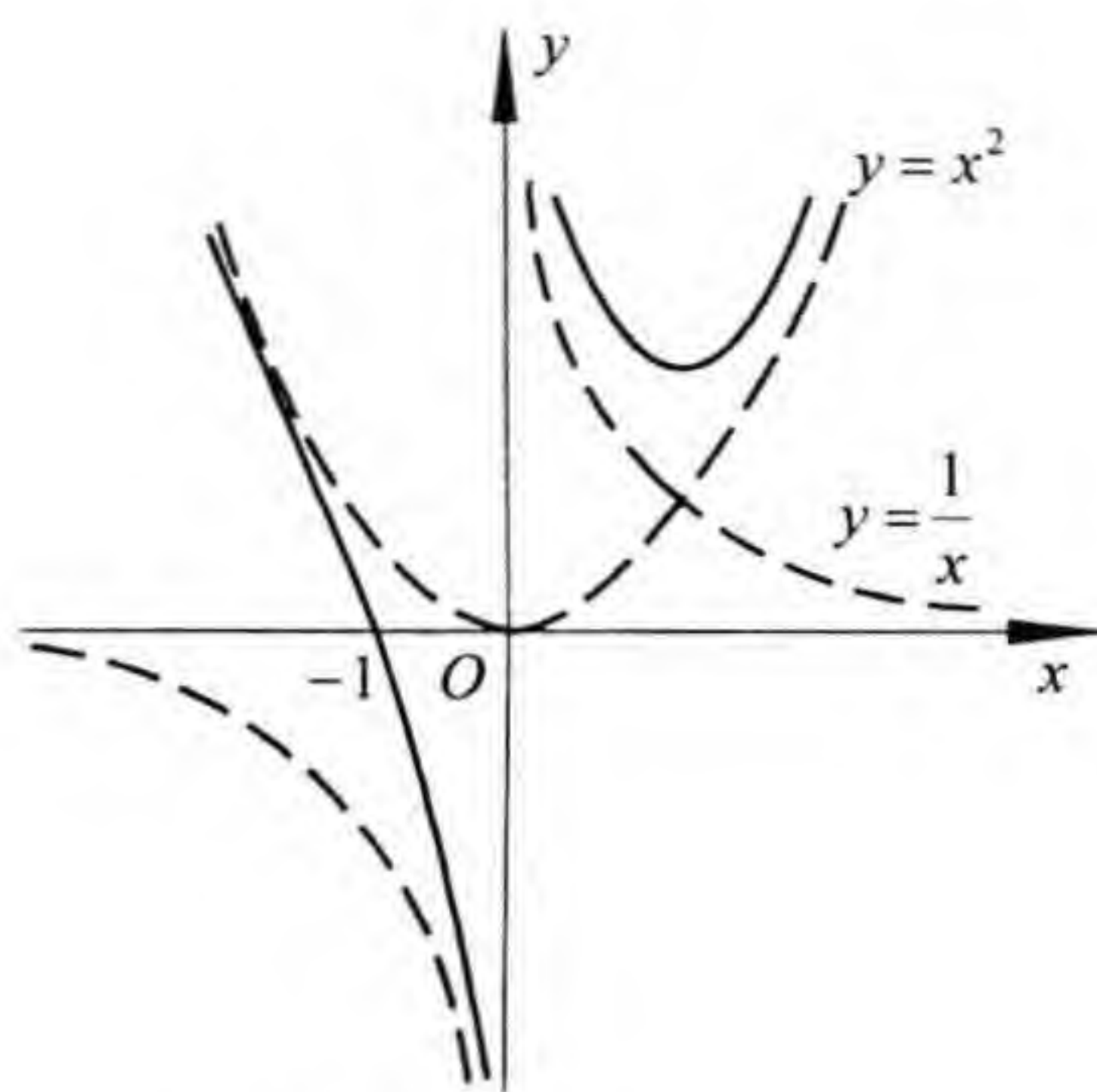


图 1.37

【254】  $y=x^2+\frac{1}{x}$  (牛顿三叉线).

解 将  $y=x^2$  及  $y=\frac{1}{x}$  的图像叠加即得,如图 1.37 中黑粗线所示.

【255】  $y=x+\frac{1}{x^2}$

解 如图 1.38 中黑粗线所示.

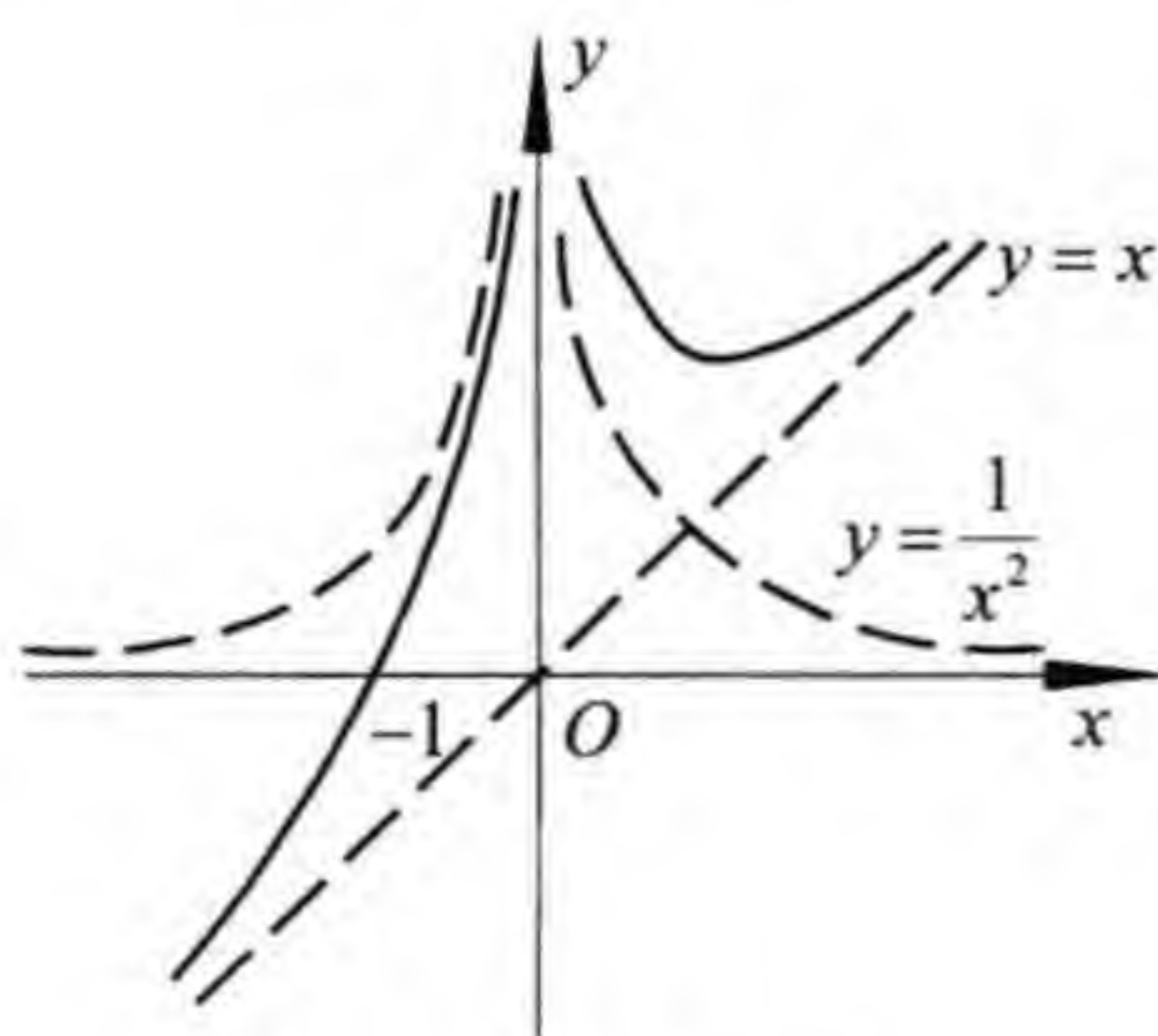


图 1.38

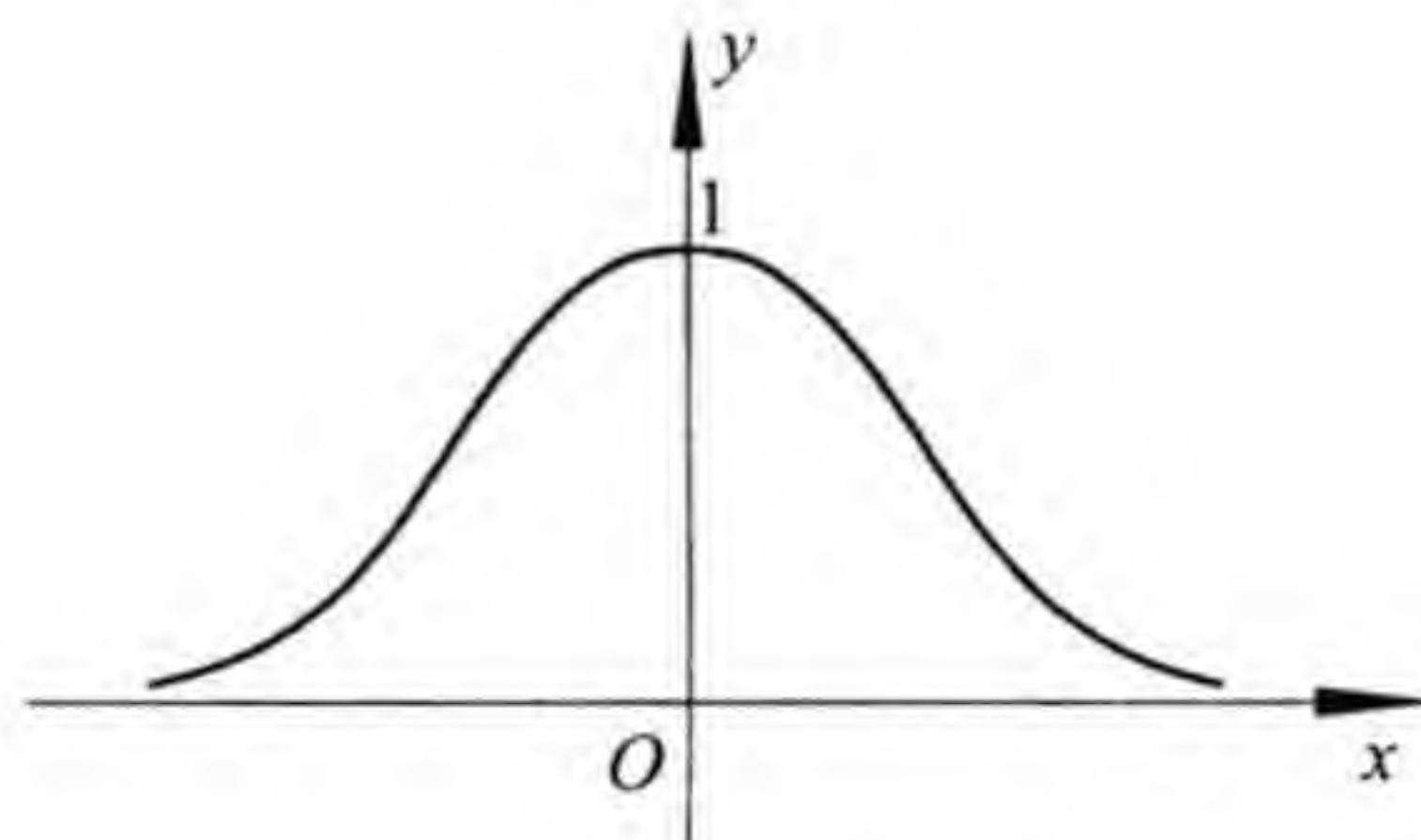


图 1.39

【256】  $y=\frac{1}{1+x^2}$  (箕舌线).

解 图像对称于  $Oy$  轴,位于  $Ox$  轴上方,最高点为  $(0,1)$ . 当  $x$  的绝对值无限增大时,  $y$  值无限变小. 如图 1.39 所示.

【257】  $y=\frac{2x}{1+x^2}$  (牛顿蛇形线).

解 以  $-x$  换  $x$ ,  $y$  值的绝对值不变但改变符号,故图像对称于原点.

又因  $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$ , 故  $-1 \leq y \leq 1$ .

当  $0 < x < 1$  时,  $y > 0$ , 曲线上升; 当  $1 < x < +\infty$  时,  $y > 0$ , 曲线下降.

图像以  $Ox$  轴为渐近线,如图 1.40 所示.

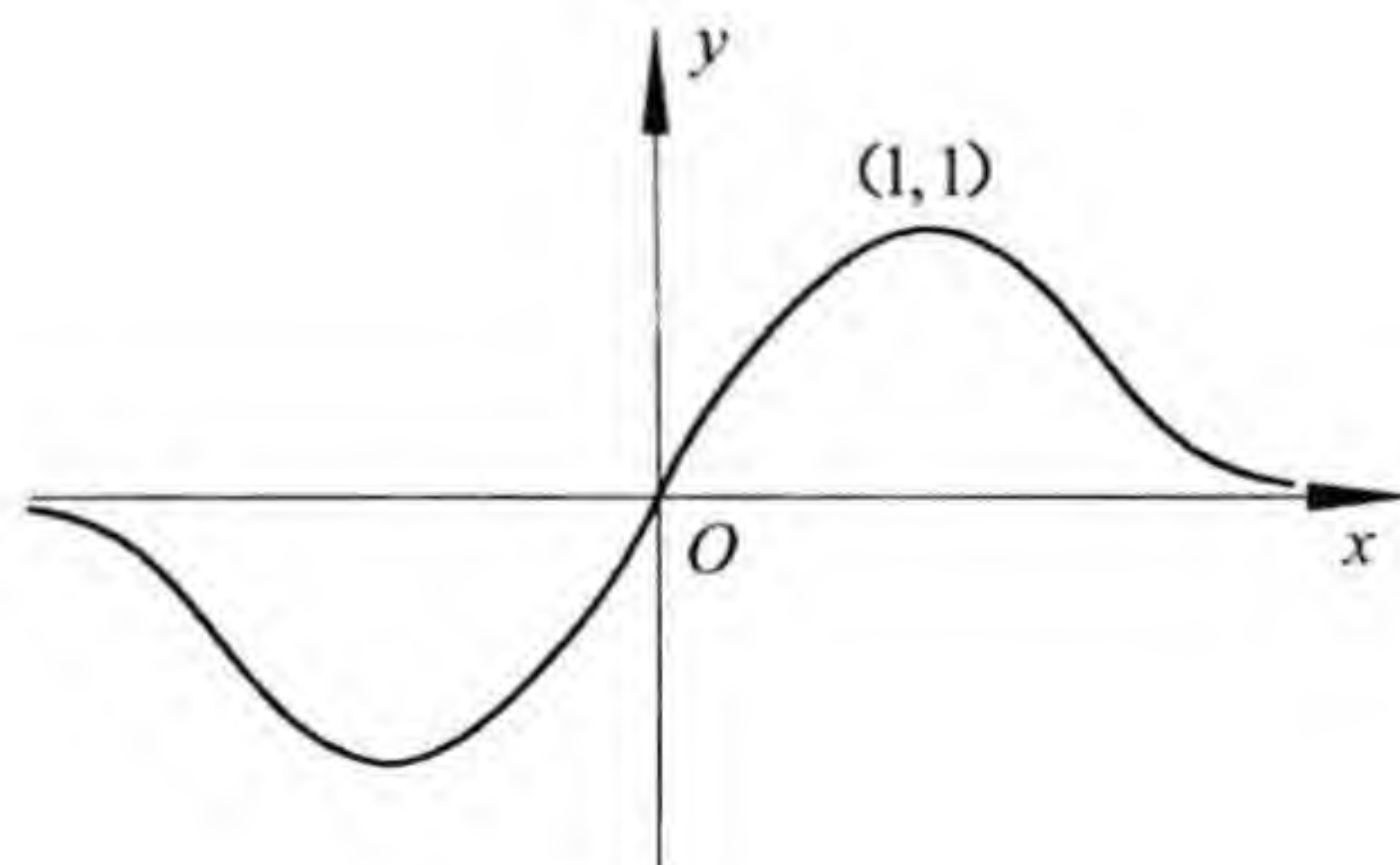


图 1.40

【258】  $y=\frac{1}{1-x^2}$ .

解 图像关于  $Oy$  轴对称,且经过点  $(0,1)$ .

当  $0 < x < 1$  及  $x > 1$  时, 曲线上升, 但当  $x = \pm 1$  时,  $y$  无意义.  $x = \pm 1$  为曲线的渐近线. 如图 1.41 所示.



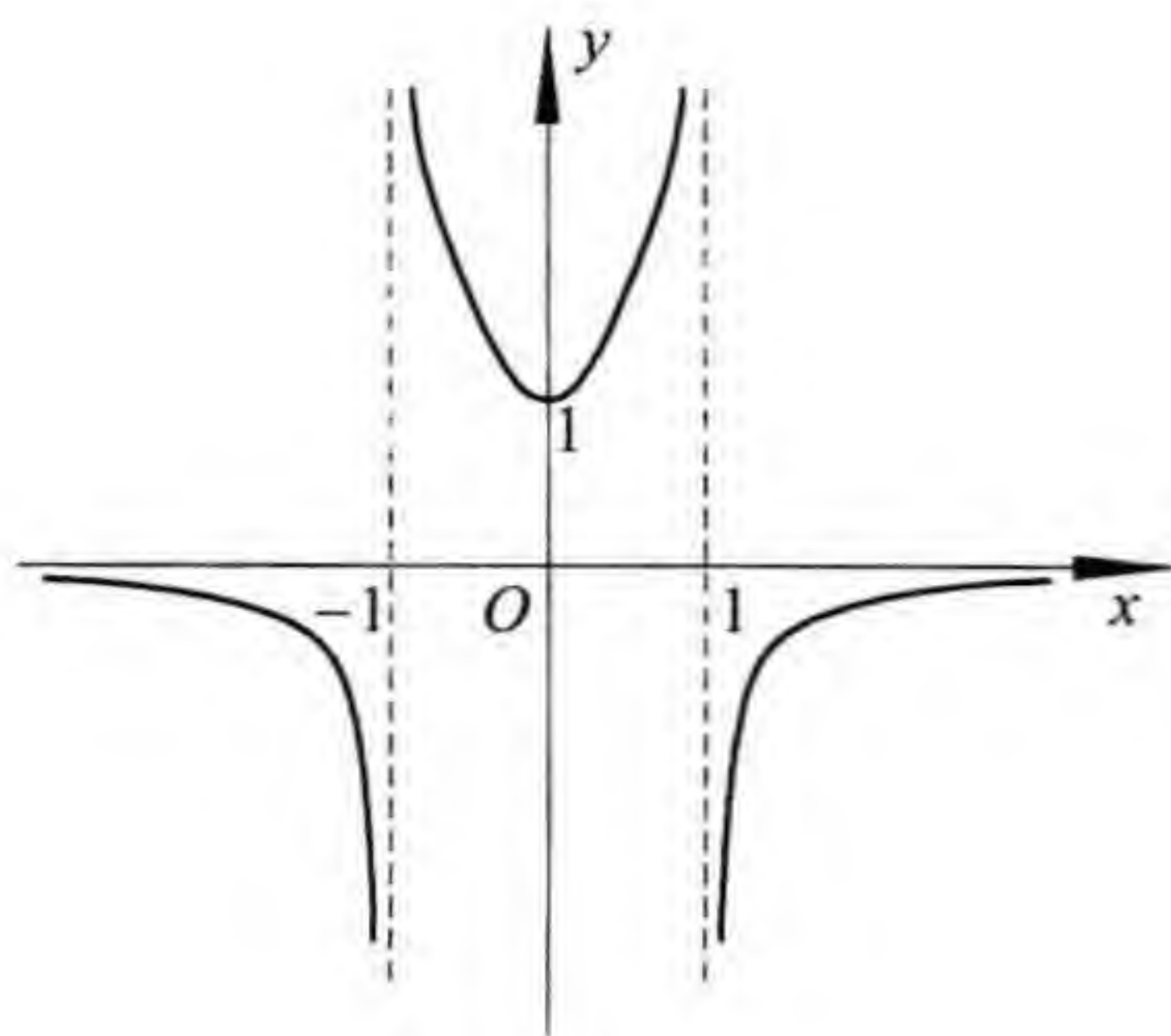


图 1.41

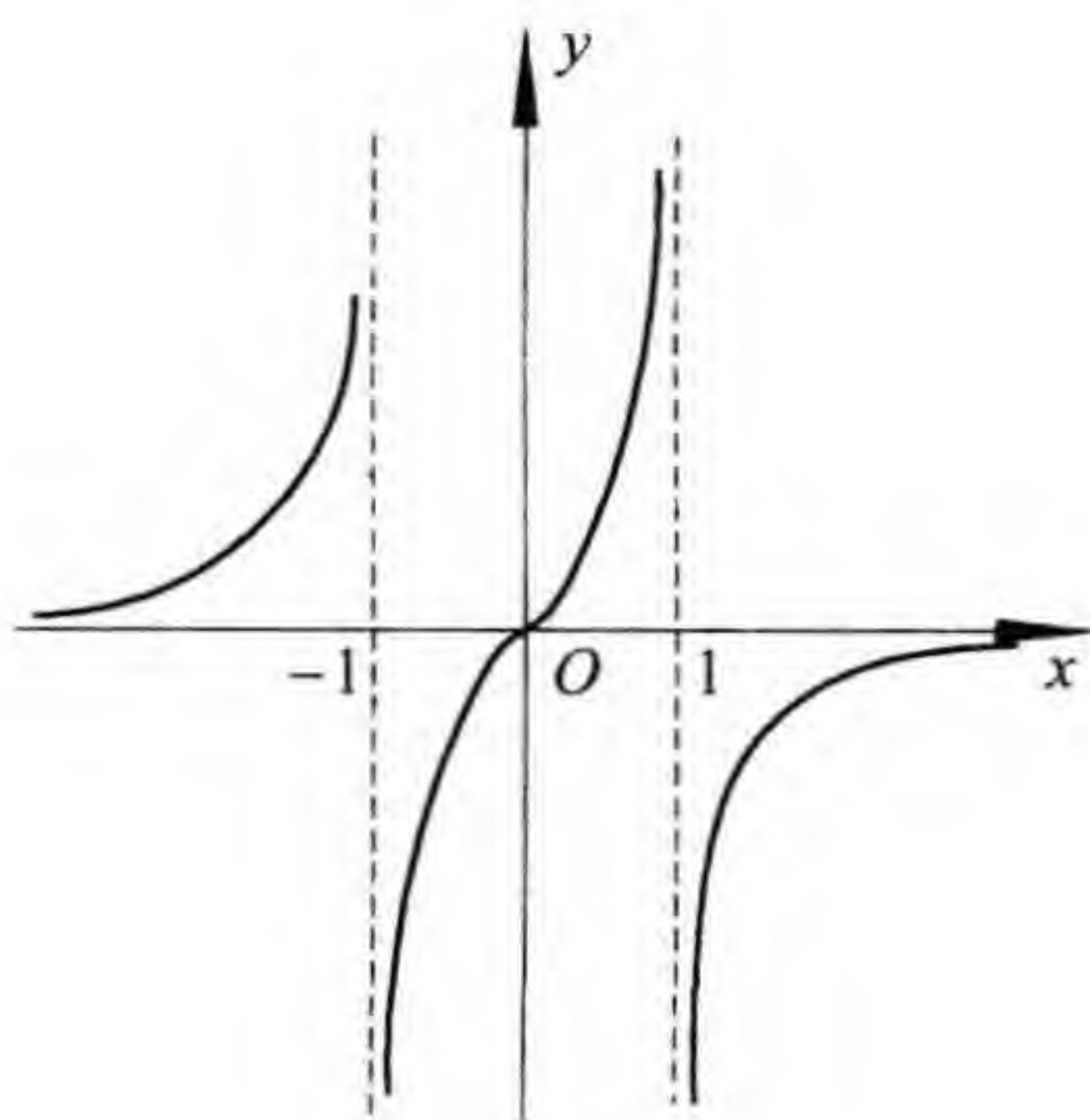


图 1.42

**【259】**  $y = \frac{x}{1-x^2}$ .

解 图像关于原点对称,且经过原点.  $x = \pm 1$  为渐近线,在  $(0, 1)$  及  $(1, +\infty)$  内曲线上升. 如图 1.42 所示.

**【260】**  $y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}$ .

解 将  $y = \frac{1}{1+x}$ ,  $y = -\frac{2}{x}$  及  $y = \frac{1}{1-x}$  的图像叠加即得,渐近线:  $x = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  及  $y = 0$ , 如图 1.43 所示.

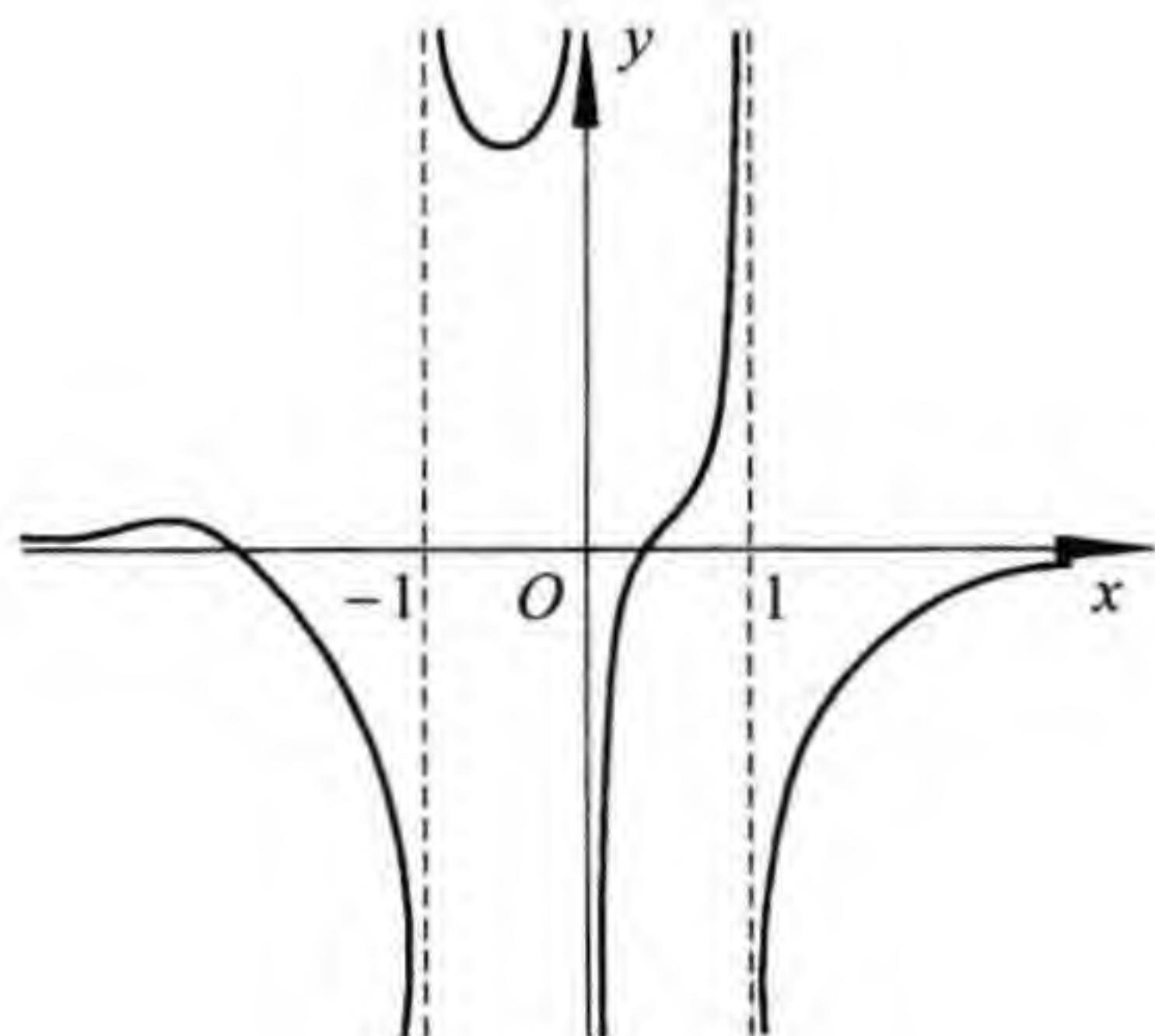


图 1.43

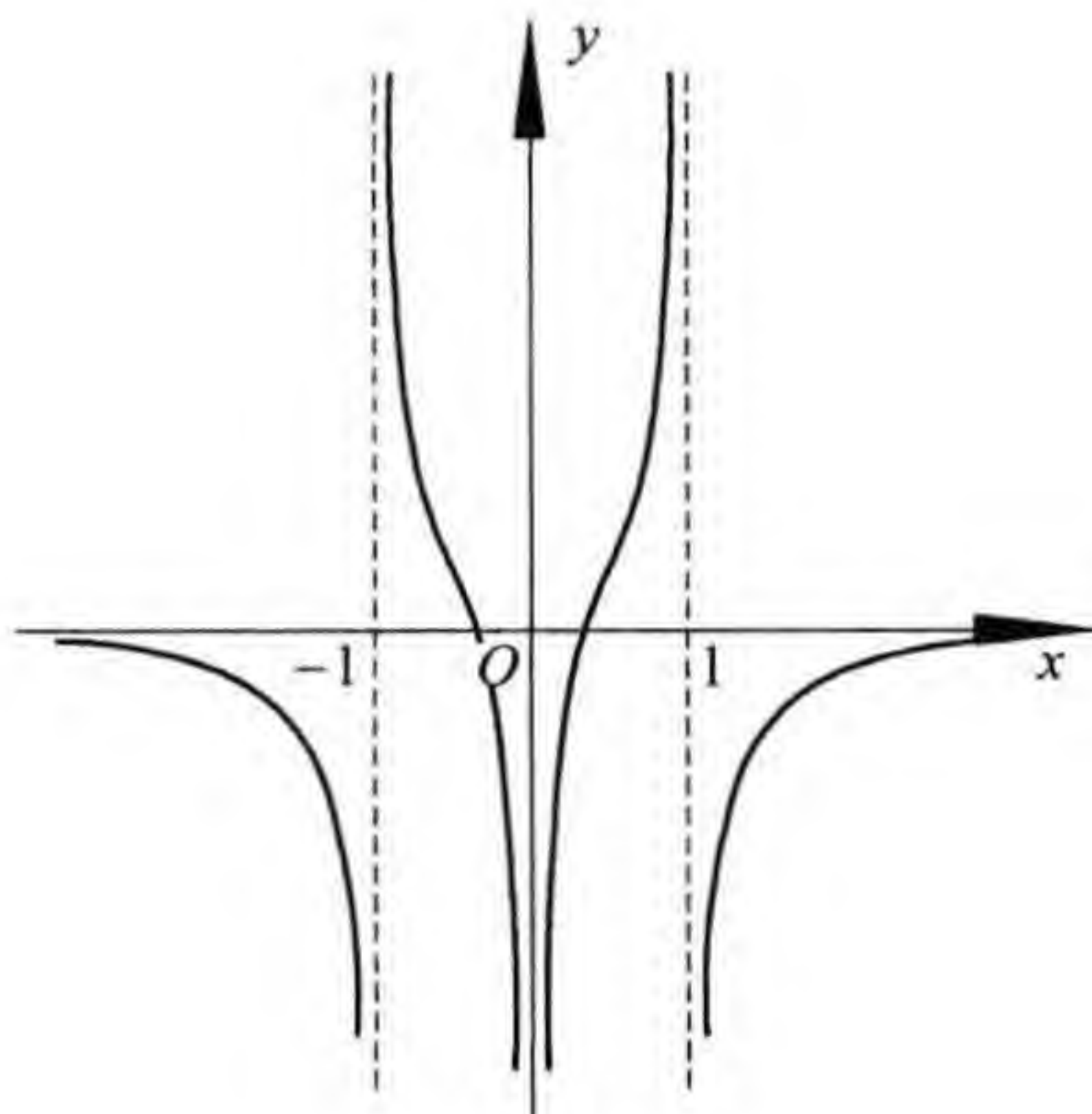


图 1.44

**【261】**  $y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{1-x}$ .

解 图像关于  $Oy$  轴对称,渐近线:  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 0$  及  $y = 0$ . 如图 1.44 所示.

**【262】**  $y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ .

解  $y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} = 1 - \frac{2x}{x^2 + x - 2}$ .

将  $y = 1$  及  $y = -\frac{2x}{(x+2)(x-1)}$  的图像叠加即得.

如图 1.45 所示.

**【263】** 把函数  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1x + b_1}$  ( $a_1 \neq 0$ )

化为以下形式  $y = kx + m + \frac{n}{x - x_0}$ ,

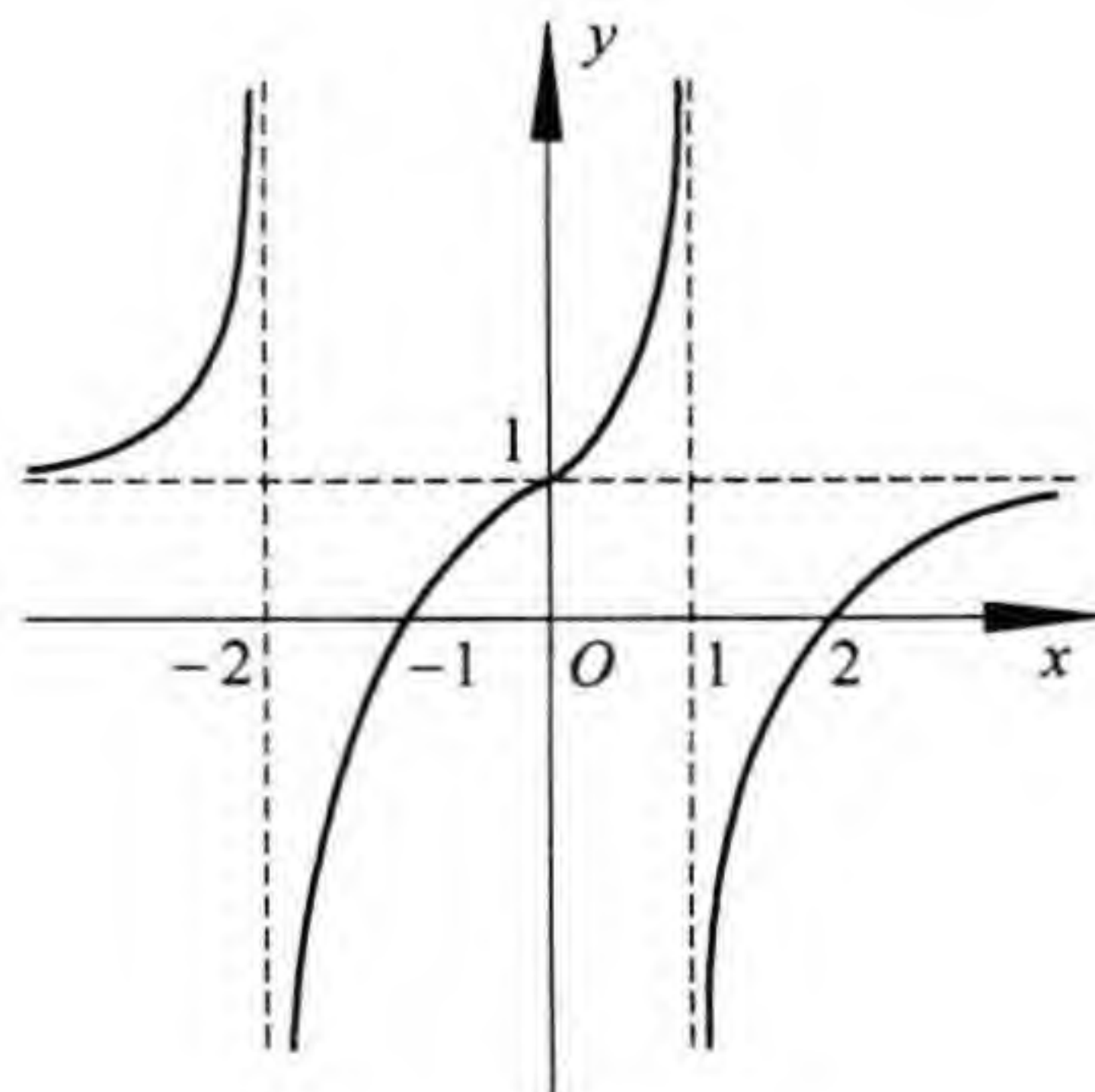


图 1.45



然后作出它的草图. 研究例子  $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= \frac{a}{a_1}x + \frac{a_1b - ab_1}{a_1^2} + \frac{\frac{c}{a_1} - \frac{b_1}{a_1^3}(a_1b - ab_1)}{x - \left(-\frac{b_1}{a_1}\right)} \\ &= kx + m + \frac{n}{x - x_0} \end{aligned}$$

其中  $k = \frac{a}{a_1}$ ,  $m = \frac{a_1b - ab_1}{a_1^2}$ ,  $x_0 = -\frac{b_1}{a_1}$ ,  $n = \frac{c}{a_1} - \frac{b_1}{a_1^3}(a_1b - ab_1)$ .

如图 1.46 中黑粗线所示.

对于

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1} \\ &= x - 5 + \frac{8}{x + 1}, \end{aligned}$$

如图 1.47 中黑粗线所示.

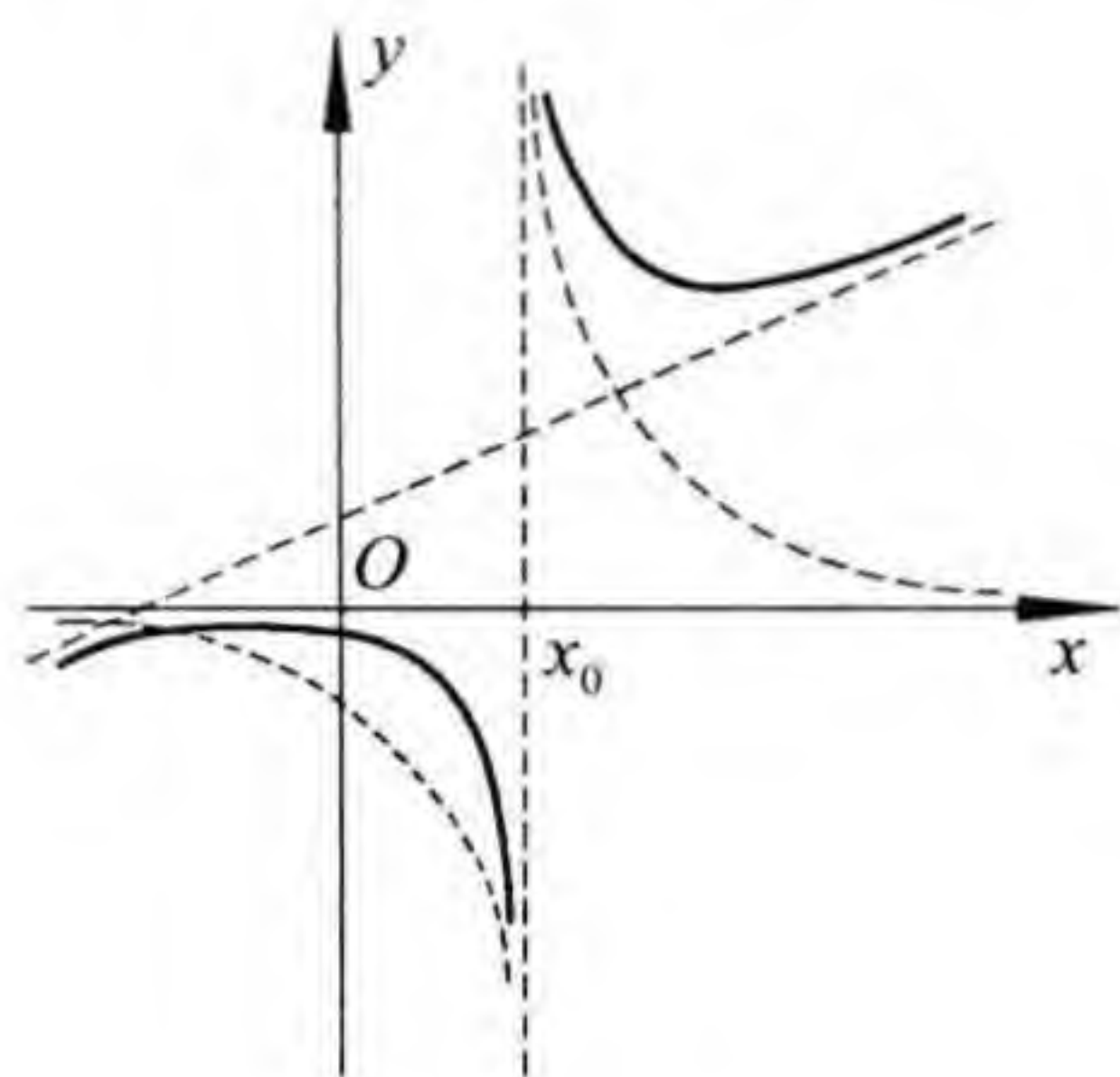


图 1.46

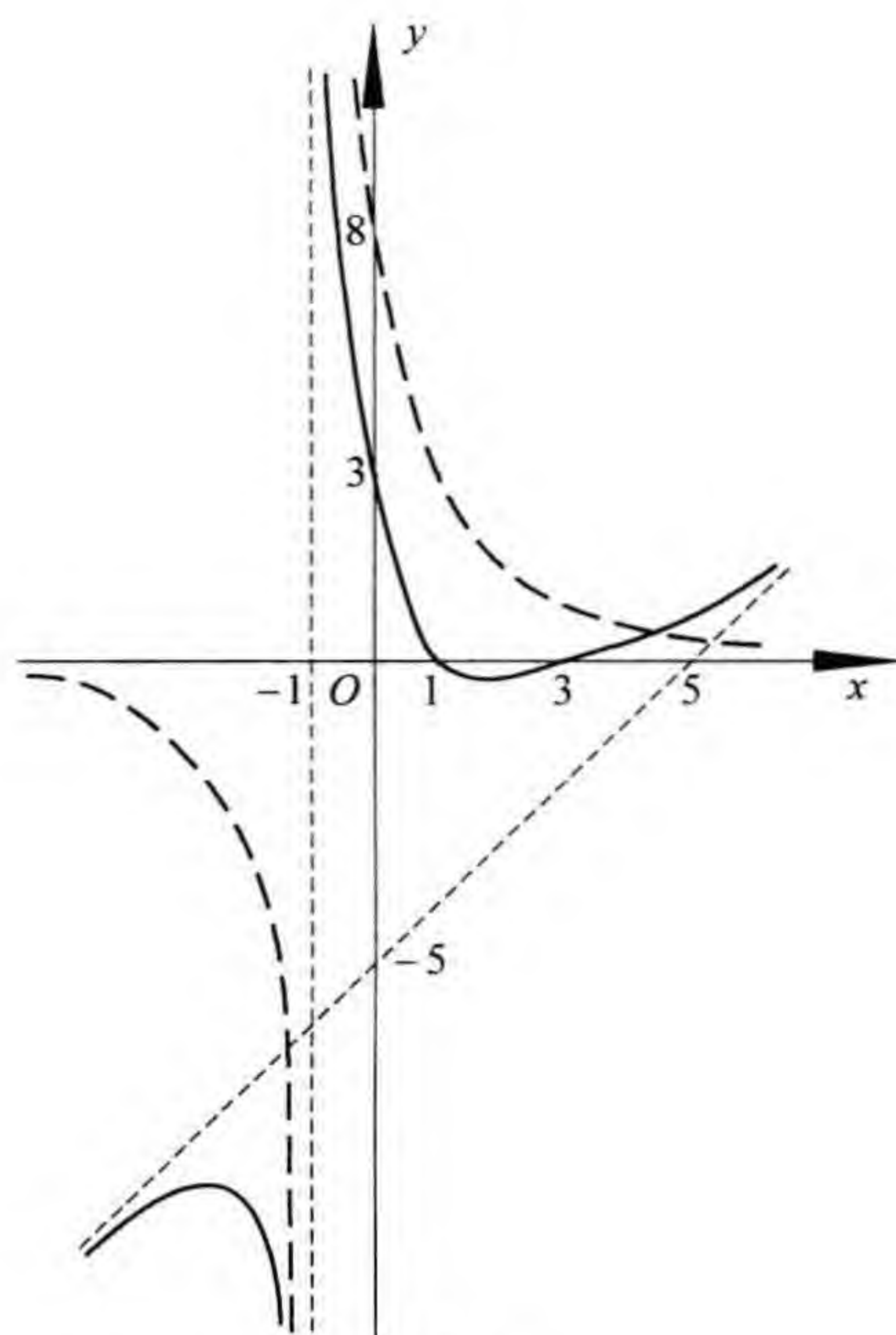


图 1.47

**【264】** 一质点与引力中心相距  $x$ . 质点所受引力的大小为  $F$ , 并且当  $x = 1\text{m}$  时  $F = 10\text{N}$ , 作出引力  $F$  的图像(牛顿定律).

解 由万有引力定律知

$$F = \frac{k}{x^2},$$

其中  $k$  为常数.

当  $x = 1$  时,  $F = 10$ , 从而  $k = 10$ , 于是,  $F = \frac{10}{x^2}$ ,

如图 1.48 所示.

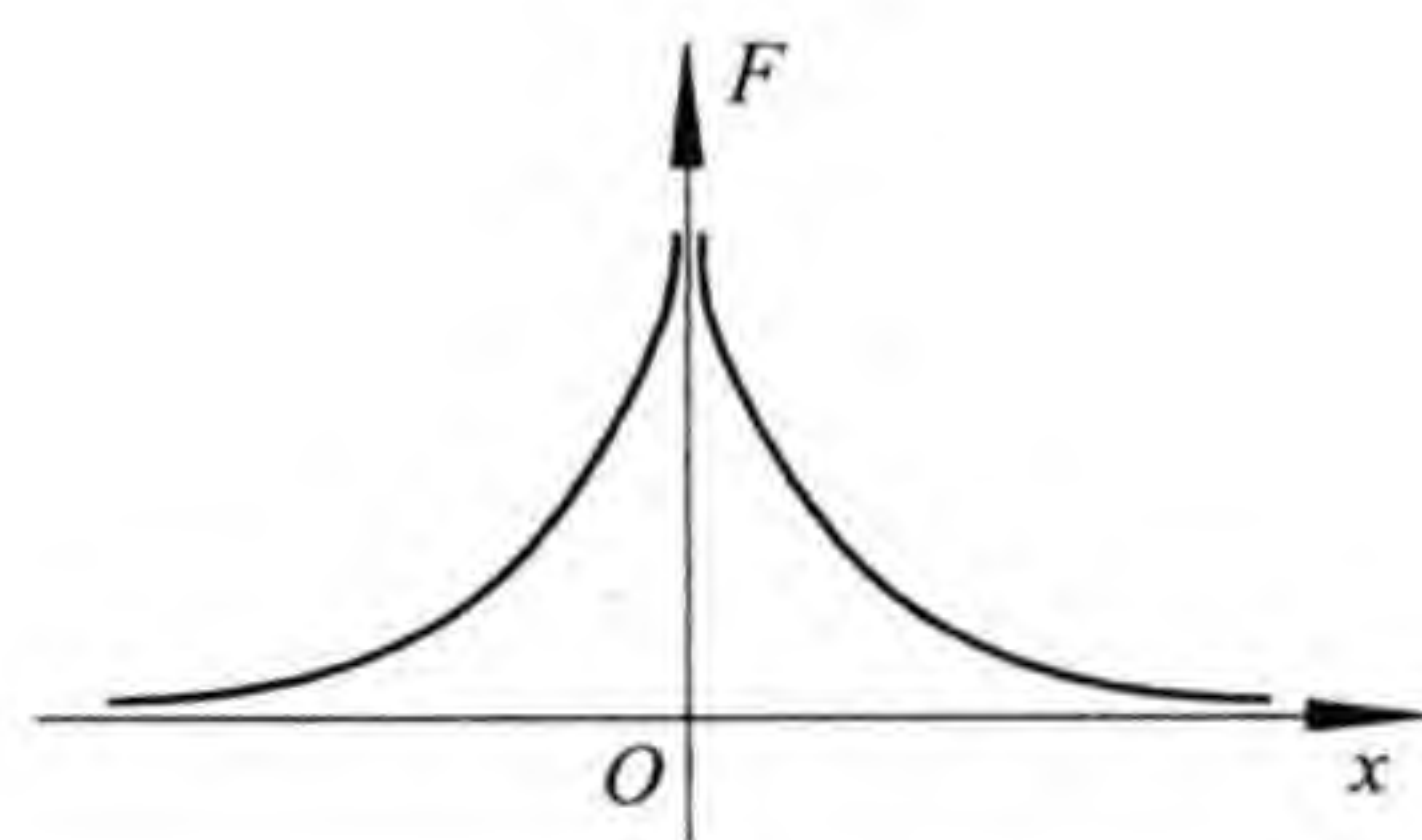


图 1.48

**【265】** 根据范德瓦耳斯定律, 当温度不变时, 真实气体的体积  $V$  和压强  $p$  以关系式

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = c$$

相联系. 若  $a = 2$ ,  $b = 0.1$  及  $c = 10$ , 作出函数  $p = p(V)$  的图像.

解 由于

$$p = \frac{10}{V - 0.1} - \frac{2}{V^2},$$

将  $p = \frac{10}{V - 0.1}$  及  $p = \frac{2}{V^2}$  的图像叠加即得.

如图 1.49 所示.

作出下列无理函数的图像:

**【266】**  $y = \pm \sqrt{-x - 2}$  (抛物线).

解  $y^2 = -(x + 2)$ , 如图 1.50 所示.

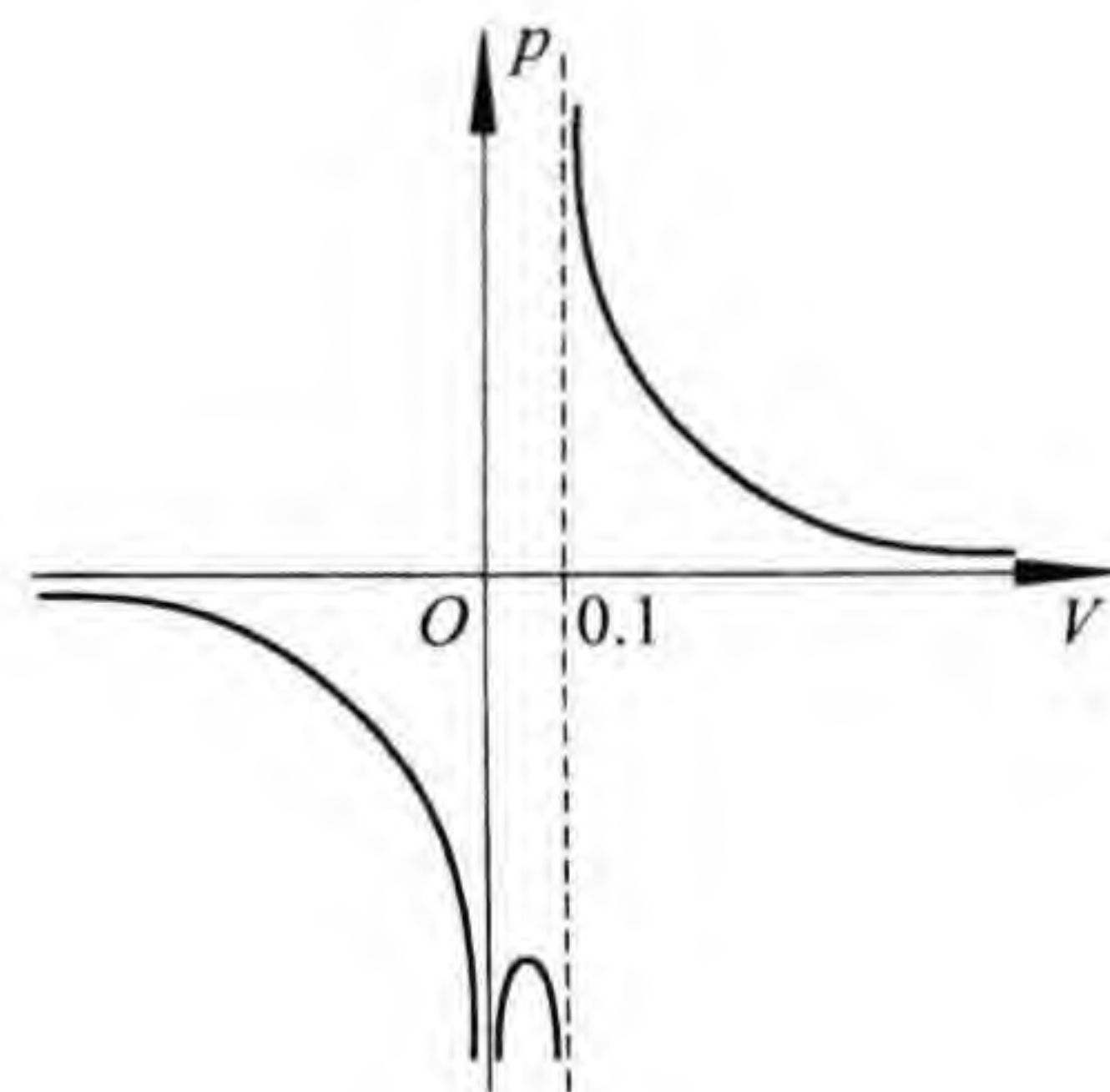


图 1.49



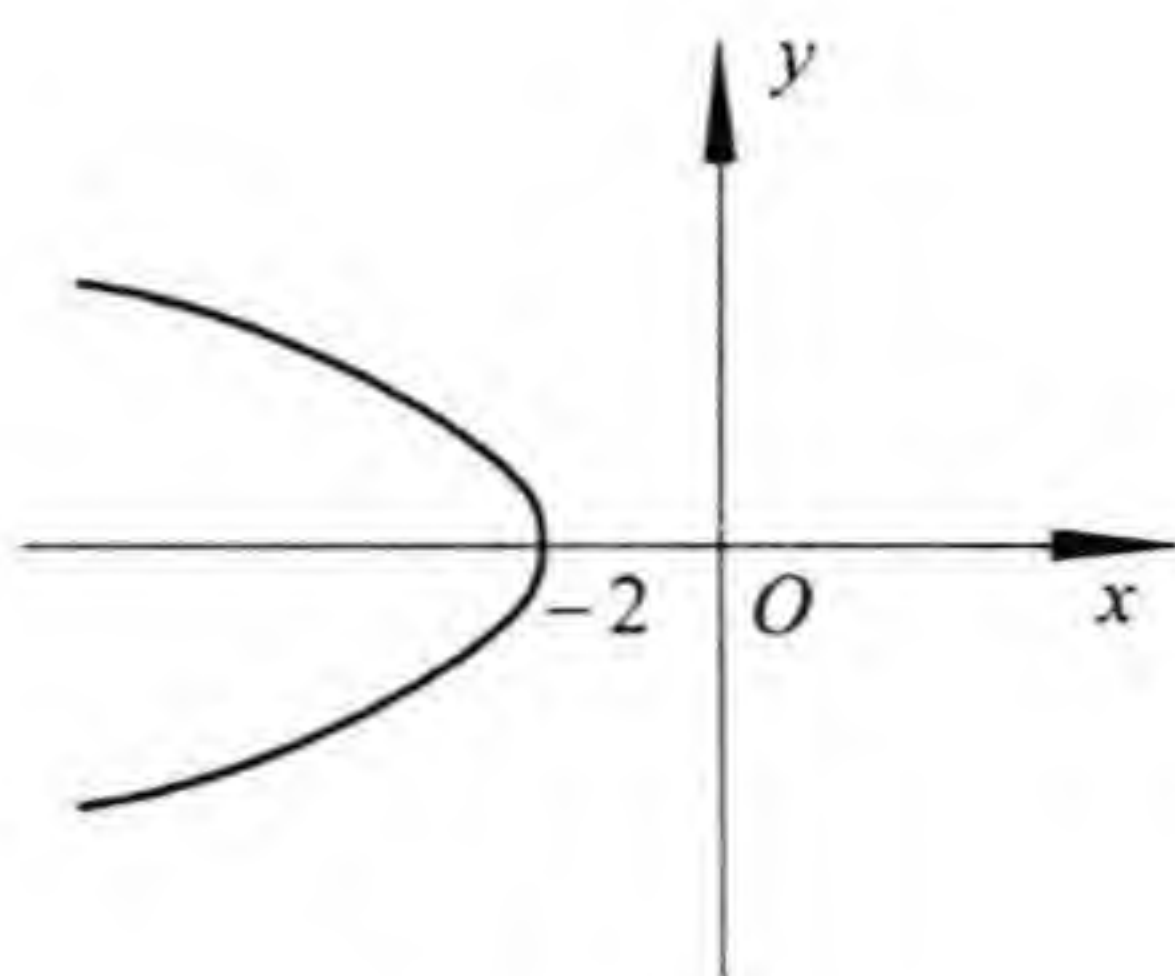


图 1.50

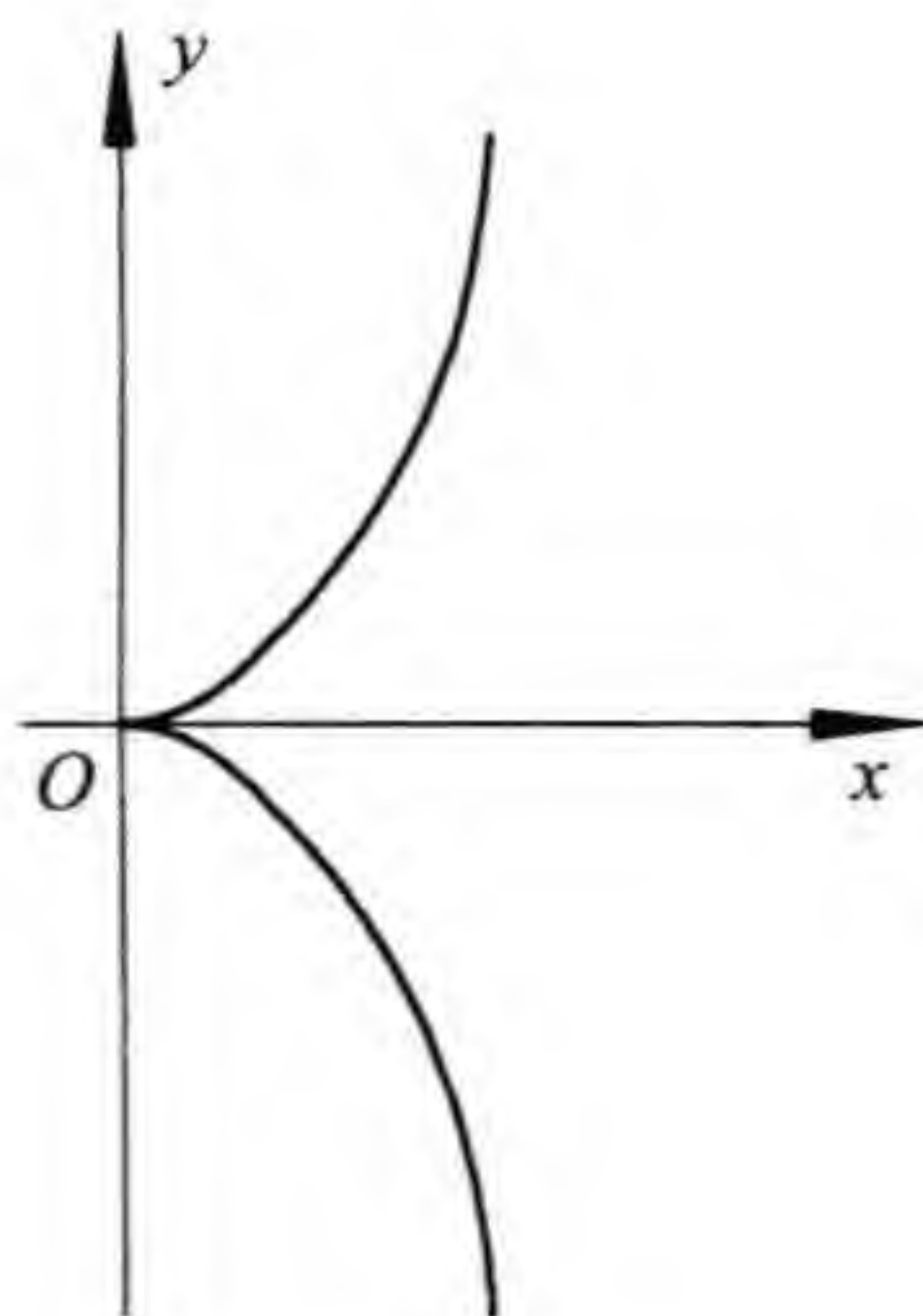


图 1.51

【267】  $y = \pm x\sqrt{x}$  (半三次抛物线).

解  $y^2 = x^3$ , 如图 1.51 所示.

【268】  $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$  (椭圆).

解  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ , 如图 1.52 所示.

【269】  $y = \pm \sqrt{x^2-1}$  (双曲线).

解  $x^2 - y^2 = 1$ ,

如图 1.53 所示.

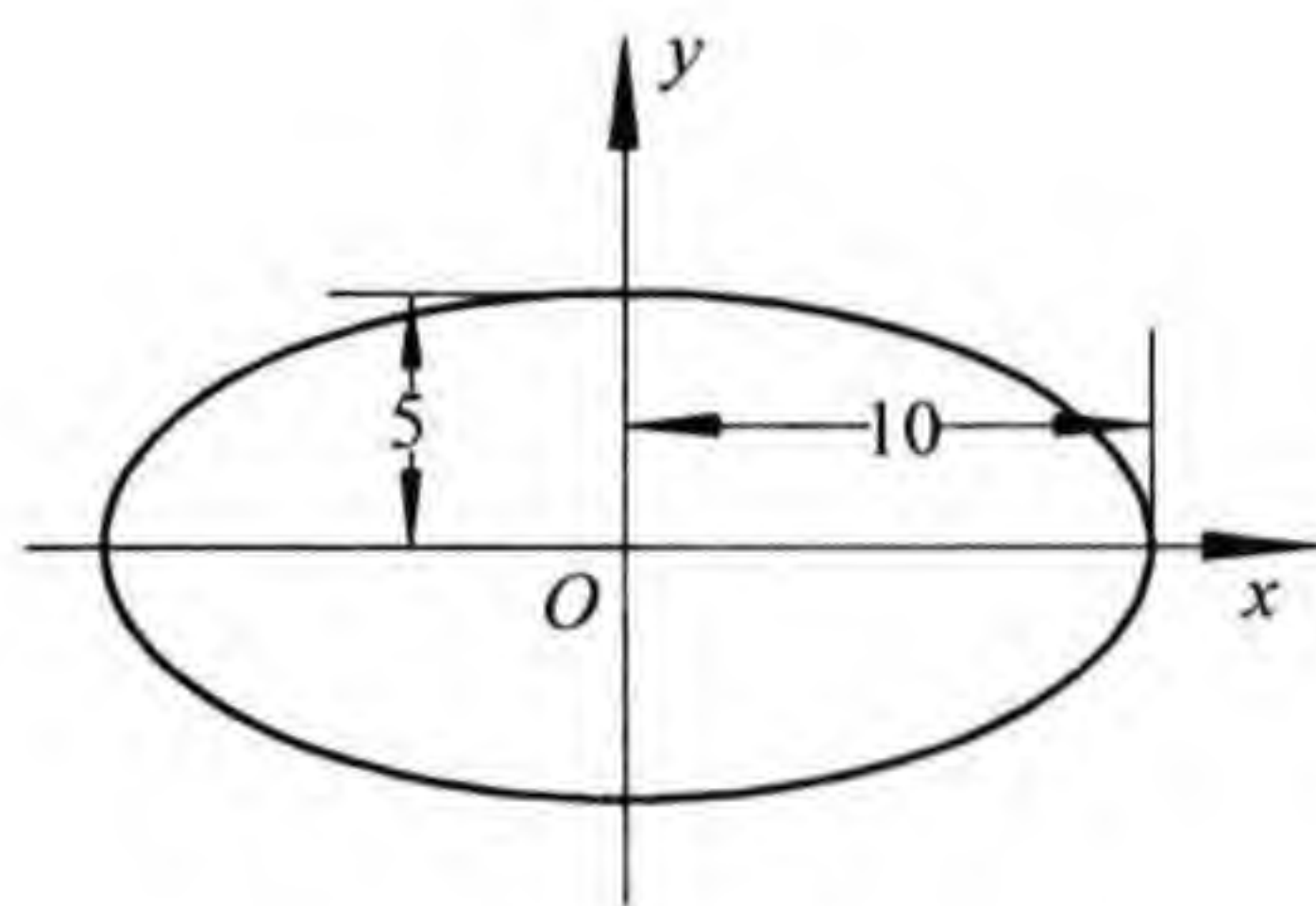


图 1.52

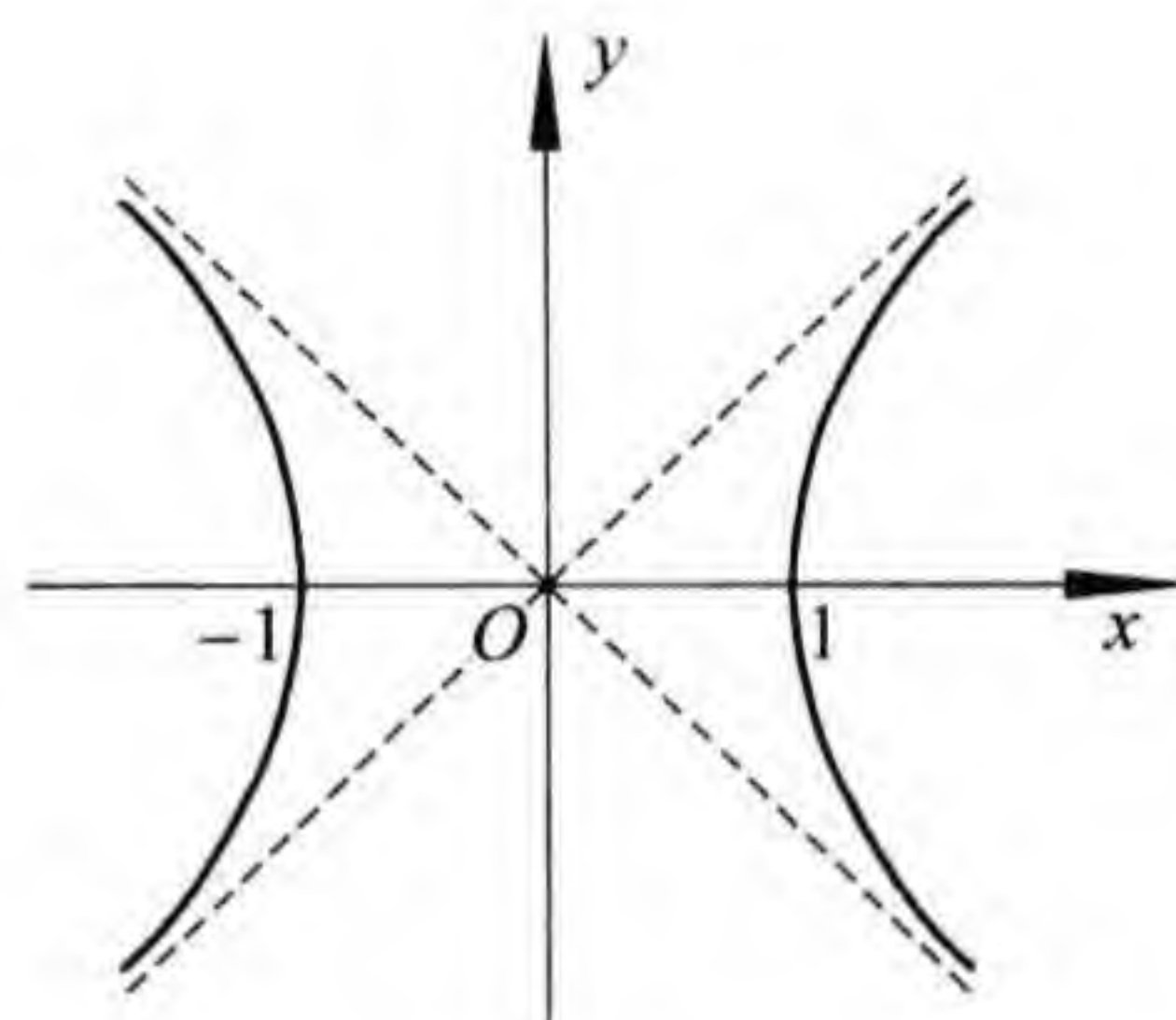


图 1.53

【270】  $y = \pm \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ .

提示 注意  $x = -1 + \frac{2}{1+y^2}$ , 渐近线为  $x = -1$ . 利用图像相加法即得所需图像 ( $-1 < x \leq 1$ ).

解  $y^2 = \frac{1-x}{1+x}$ ,  $x = -1 + \frac{2}{1+y^2}$ ,

将  $x = -1$  及  $x = \frac{2}{1+y^2}$  的图像叠加即得, 如图 1.54 所示 ( $-1 < x \leq 1$ ).

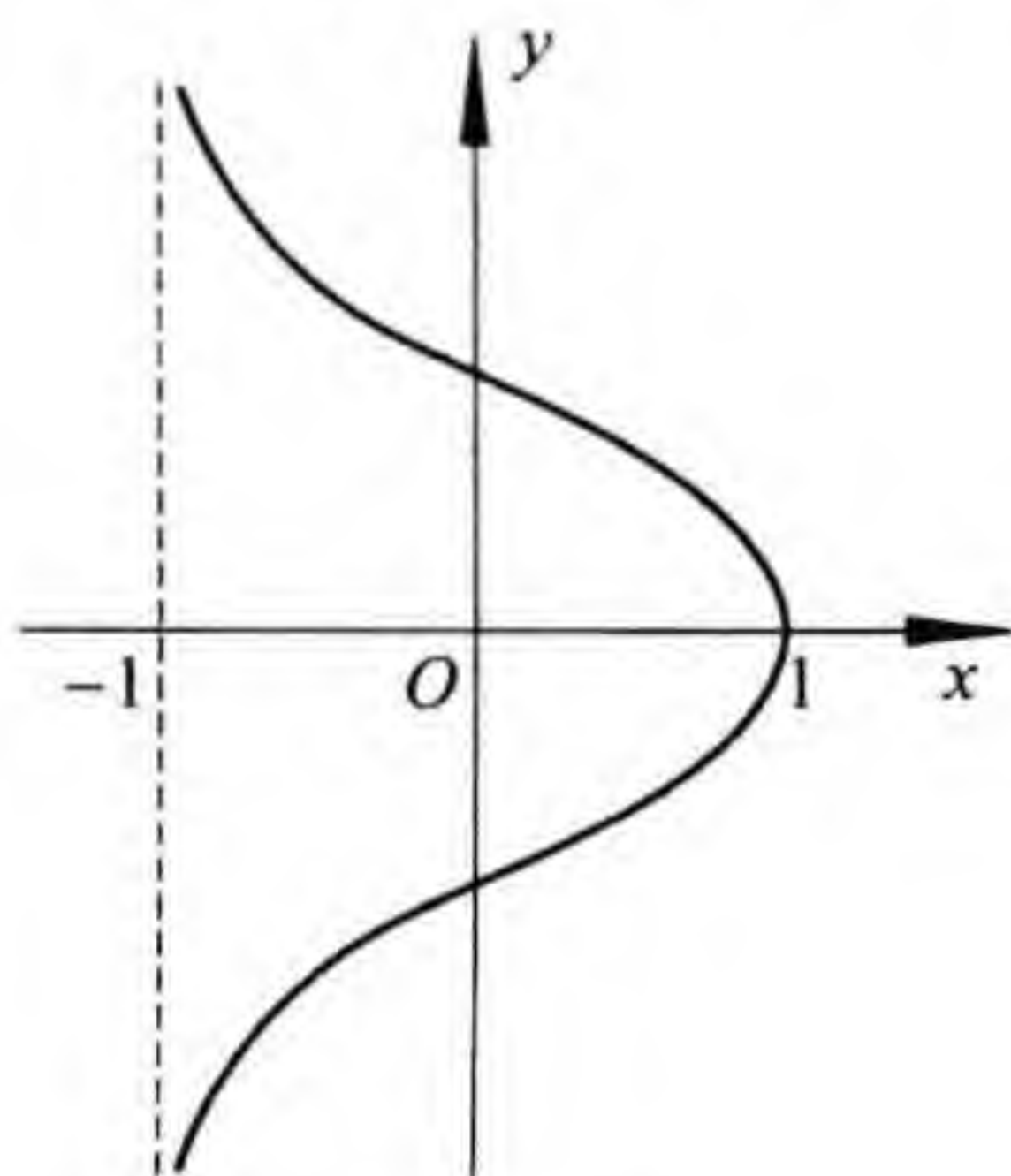


图 1.54

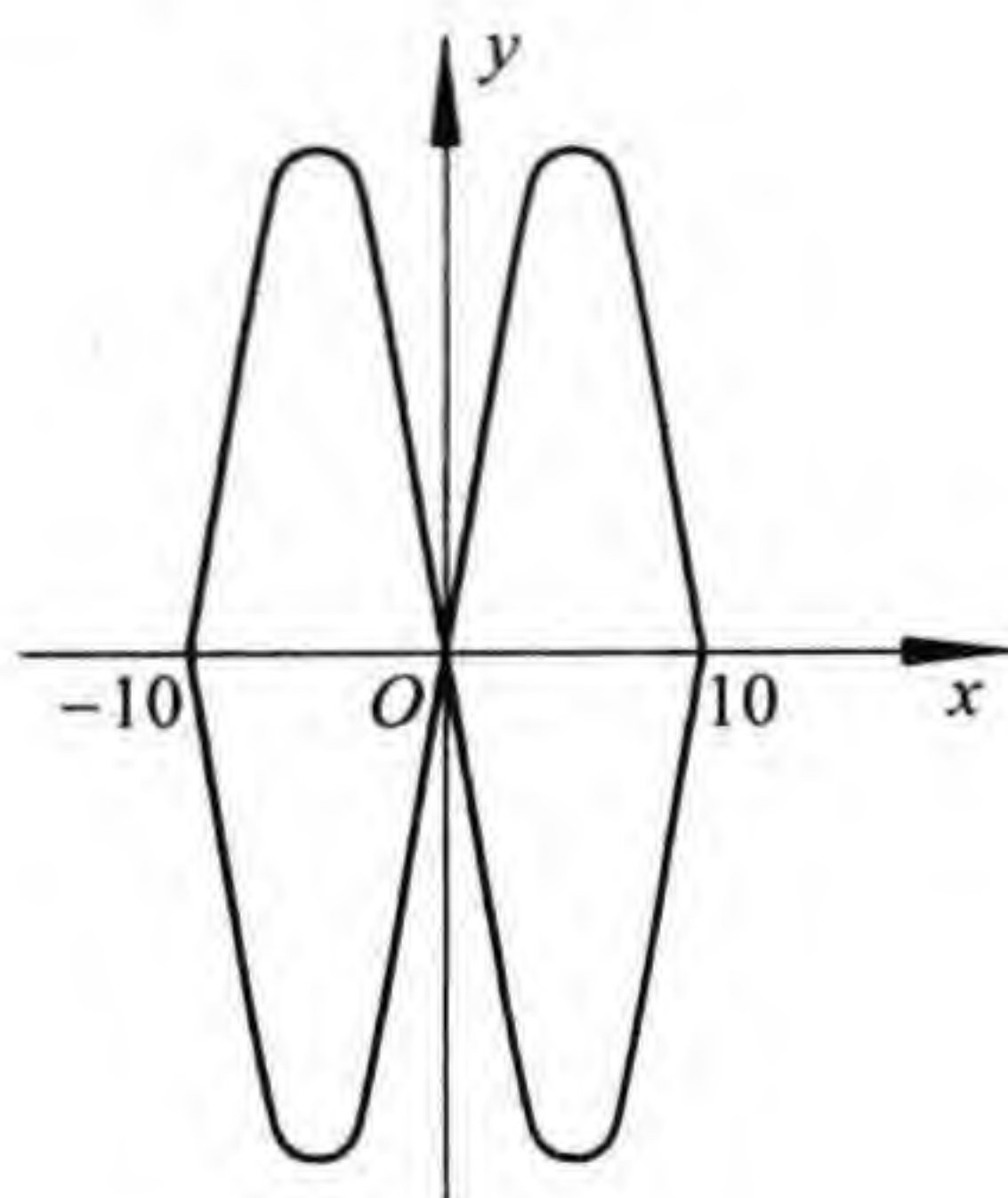


图 1.55

【271】  $y = \pm x\sqrt{100-x^2}$ .

解 当  $x = 0, \pm 10$  时,  $y = 0$ .

将  $y = x$  和  $y = \sqrt{100-x^2}$  的图像上点的纵坐标相乘, 即可描出图像. 如图 1.55 所示.

【272】  $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$  (蔓叶线).



解  $y^2(10-x)=x^3$ , 如图 1.56 所示.

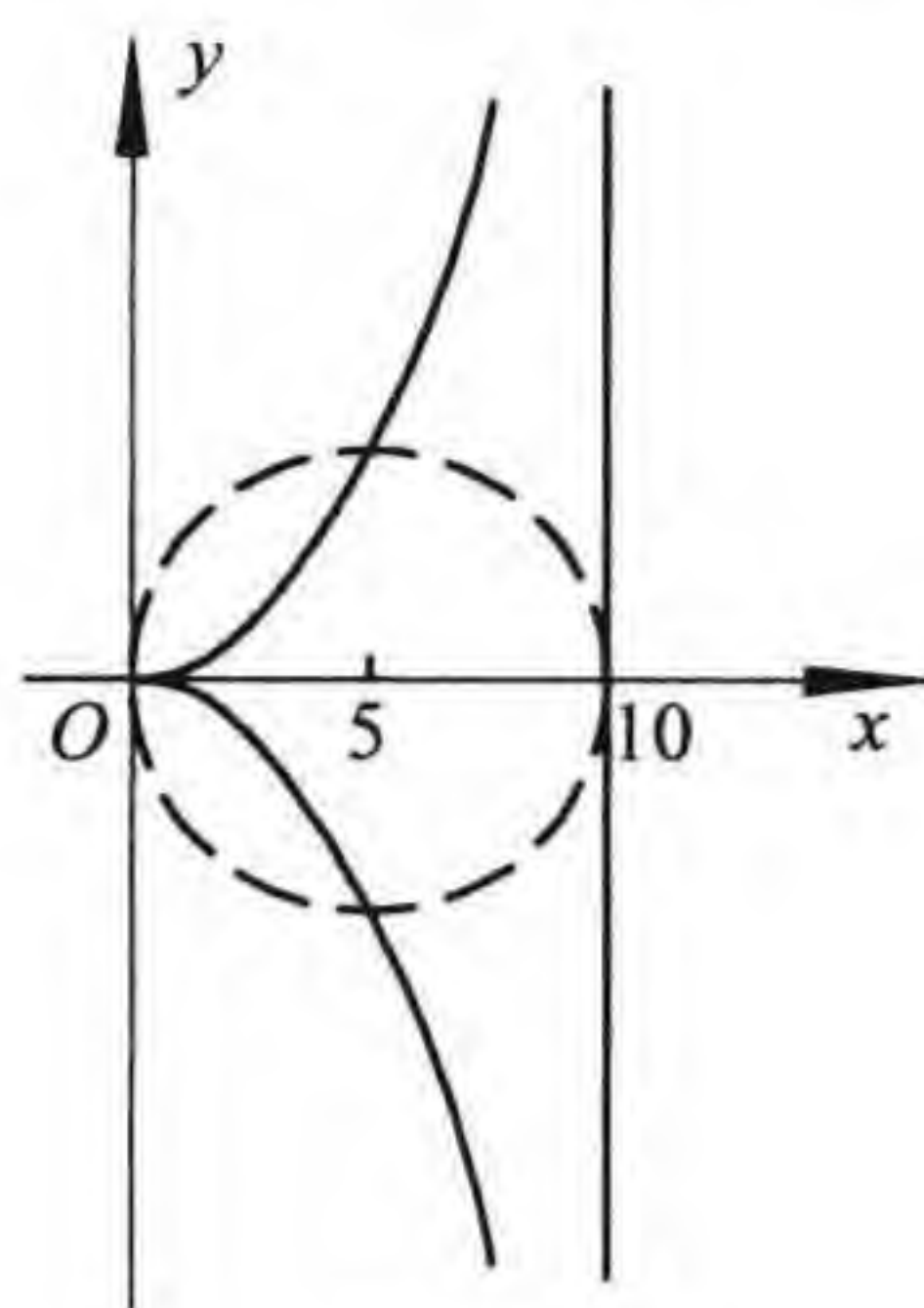


图 1.56

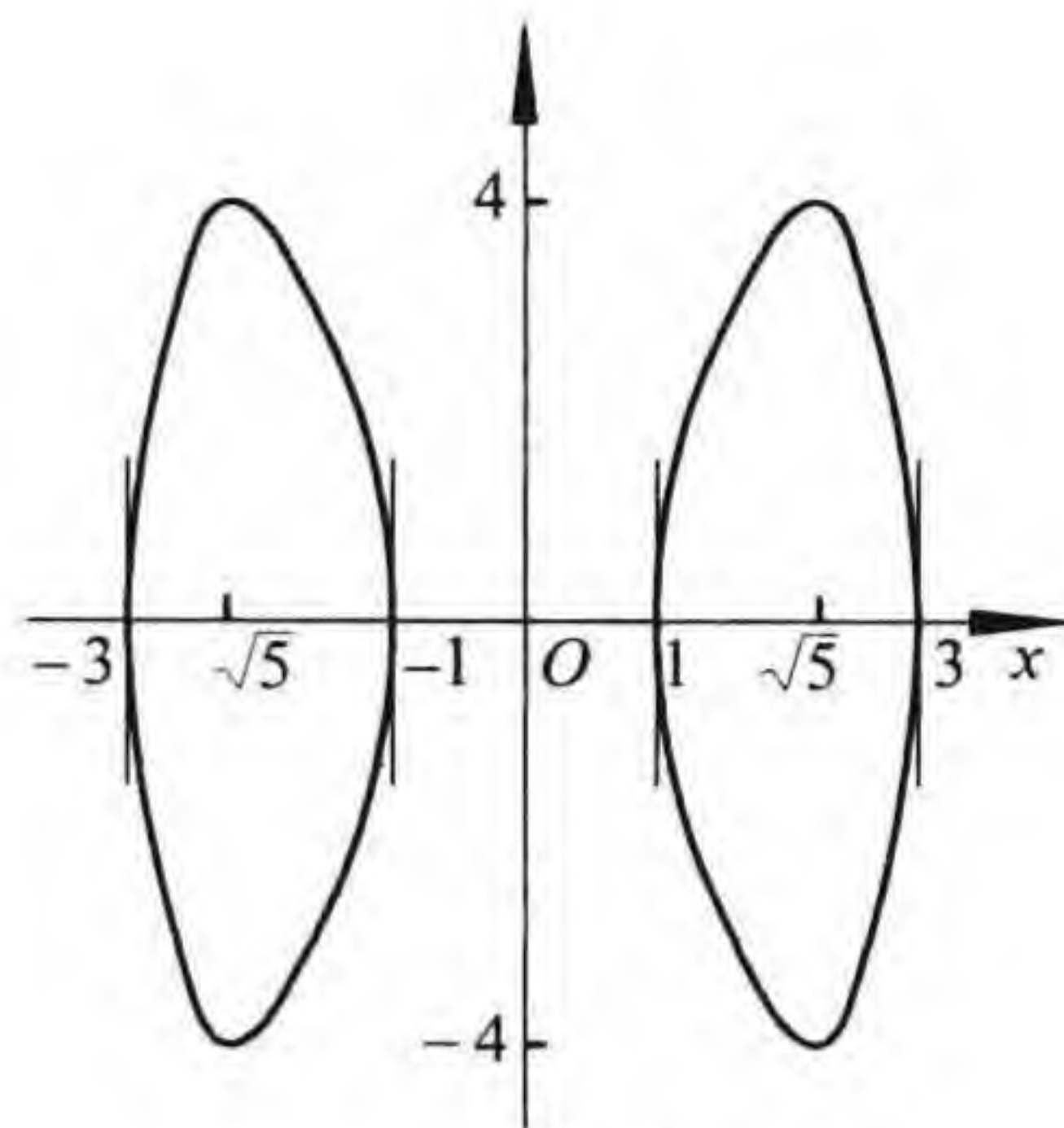


图 1.57

【273】  $y = \pm \sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$ .

解  $y = \pm \sqrt{16-(x^2-5)^2}$ . 如图 1.57 所示.

【274】 作幂函数  $y=x^n$  当: (1)  $n=1, 3, 5$ ; (2)  $n=2, 4, 6$  时的图像.

解 如图 1.58 所示.

【275】 作幂函数  $y=x^n$  当: (1)  $n=-1, -3$ ; (2)  $n=-2, -4$  时的图像.

解 如图 1.59 所示. 1.  $y=\frac{1}{x}$ , 2.  $y=\frac{1}{x^2}$ , 3.  $y=\frac{1}{x^3}$ , 4.  $y=\frac{1}{x^4}$ .

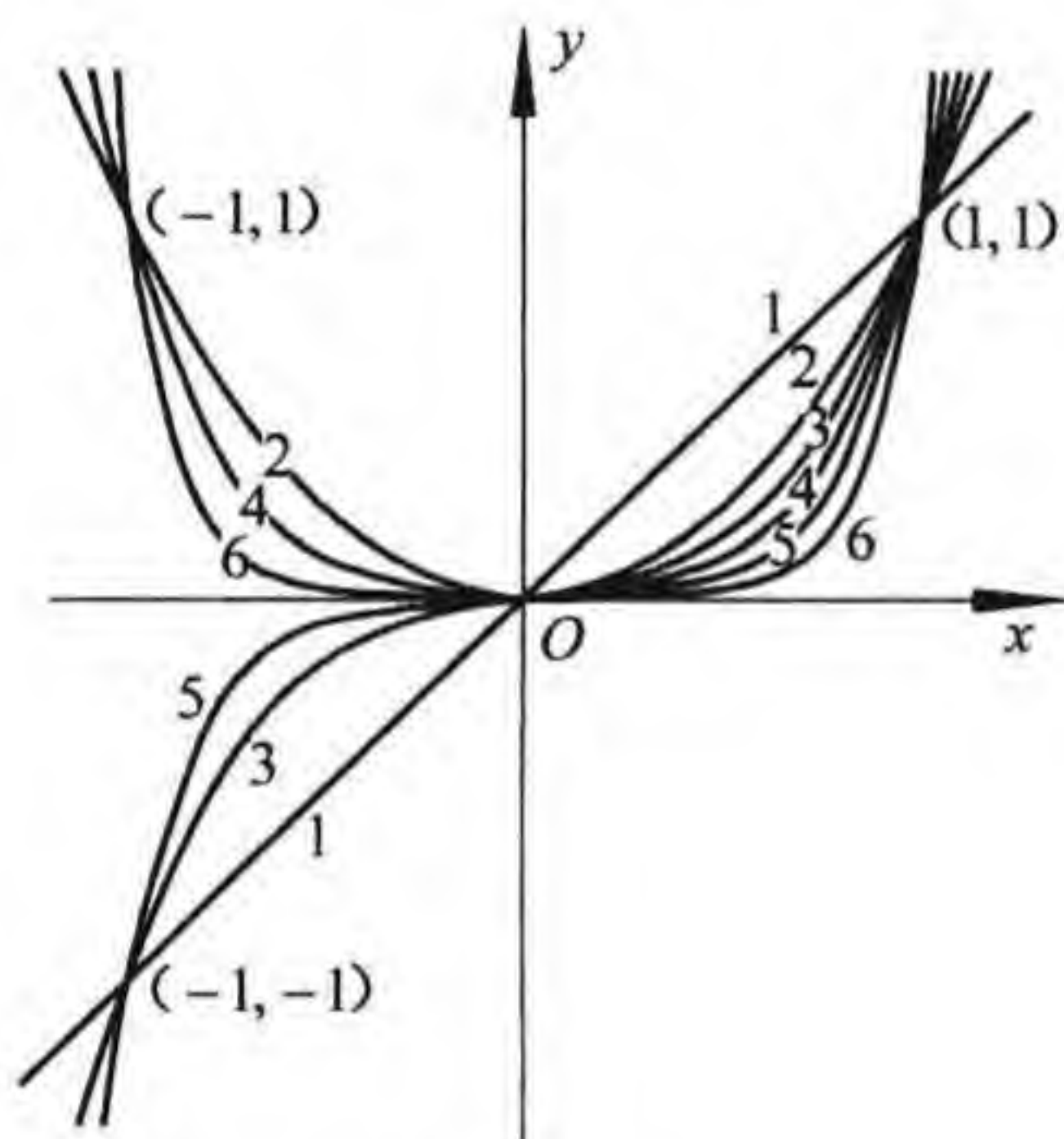


图 1.58

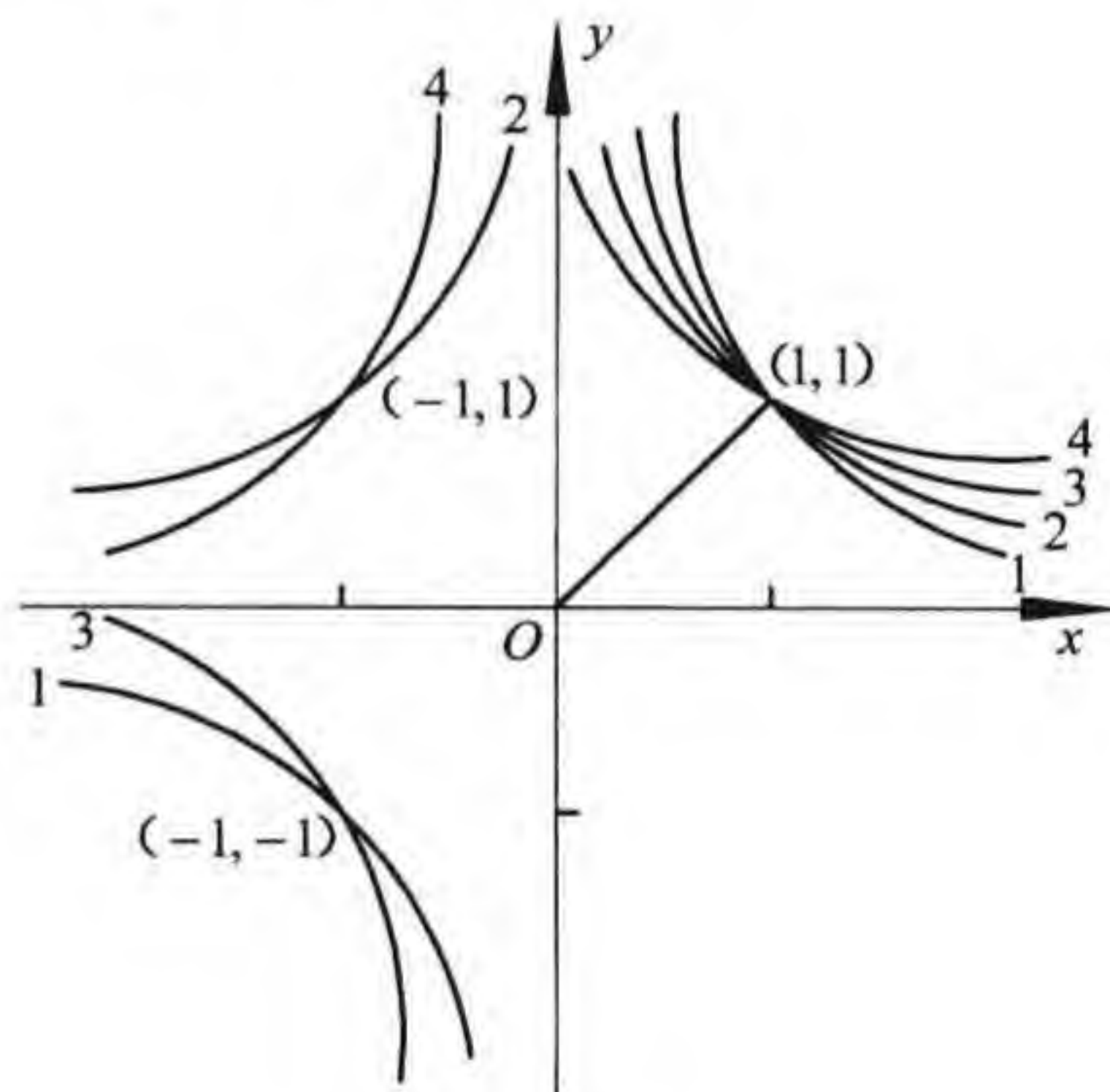


图 1.59

【276】 作根式  $y=\sqrt[m]{x}$  当: (1)  $m=2, 4$ ; (2)  $m=3, 5$  时的图像.

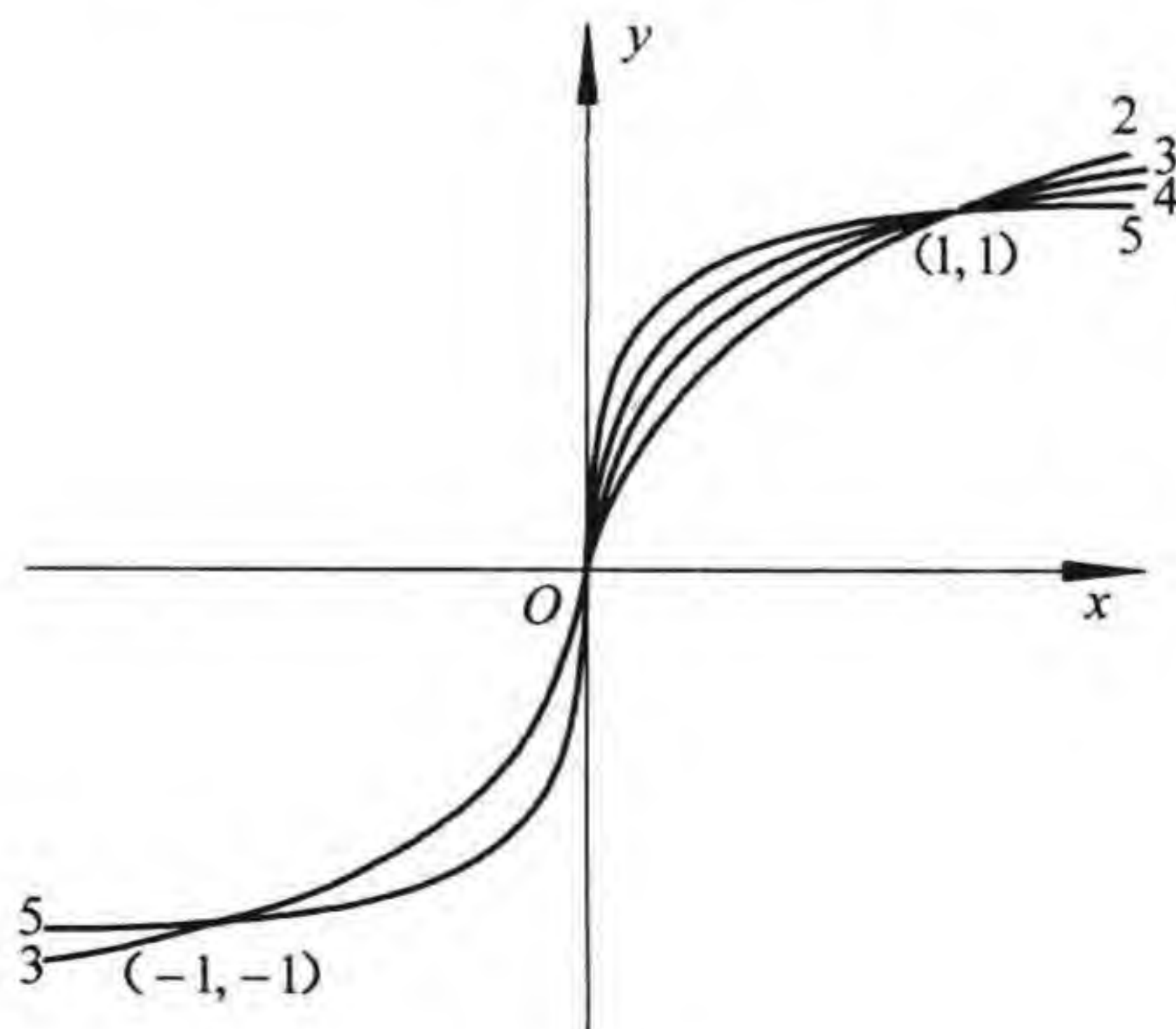


图 1.60

解 如图 1.60 所示.



【277】 设: (1)  $m=2, k=1$ ; (2)  $m=2, k=3$ ; (3)  $m=3, k=1$ ; (4)  $m=3, k=2$ ;  
(5)  $m=3, k=4$ ; (6)  $m=4, k=2$ ; (7)  $m=4, k=3$ .

作根式  $y = \sqrt[m]{x^k}$  的图像.

解 将所给数据代入  $y = \sqrt[m]{x^k}$ , 可知:

- (1) 即  $y = \sqrt{x}$  的图像, 见图 1.60;  
(2)  $y = x\sqrt{x}$ , 如图 1.61 所示: 1;  
(3) 即  $y = \sqrt[3]{x}$  的图像, 见图 1.60;  
(4)  $y = \sqrt[3]{x^2}$ , 如图 1.61 所示: 2;  
(5)  $y = x\sqrt[3]{x}$ , 如图 1.61 所示: 3;  
(6) 即  $y = \sqrt{|x|}$  的图像;  
(7)  $y = \sqrt[4]{x^3}$ , 如图 1.61 所示: 4.

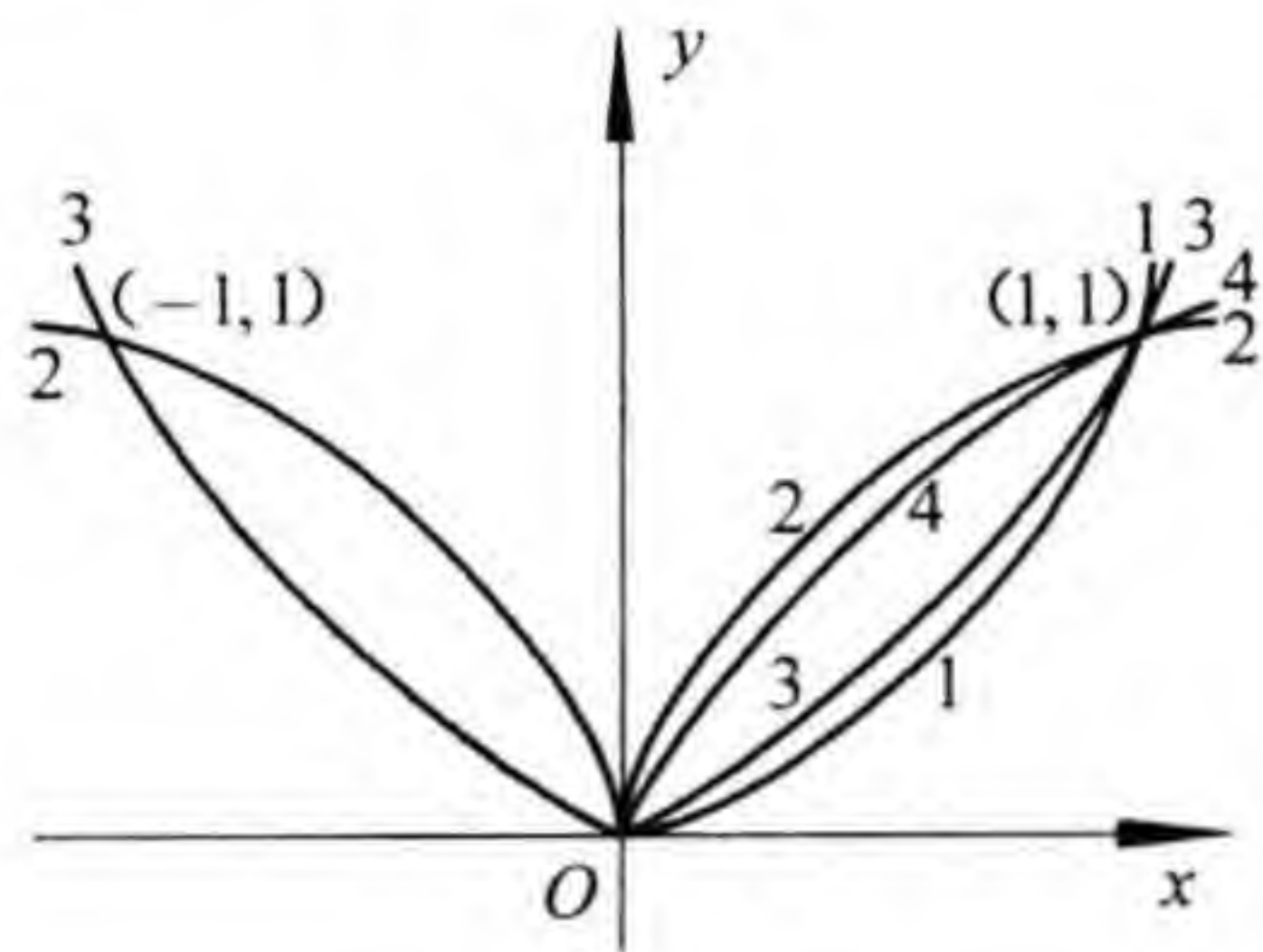


图 1.61

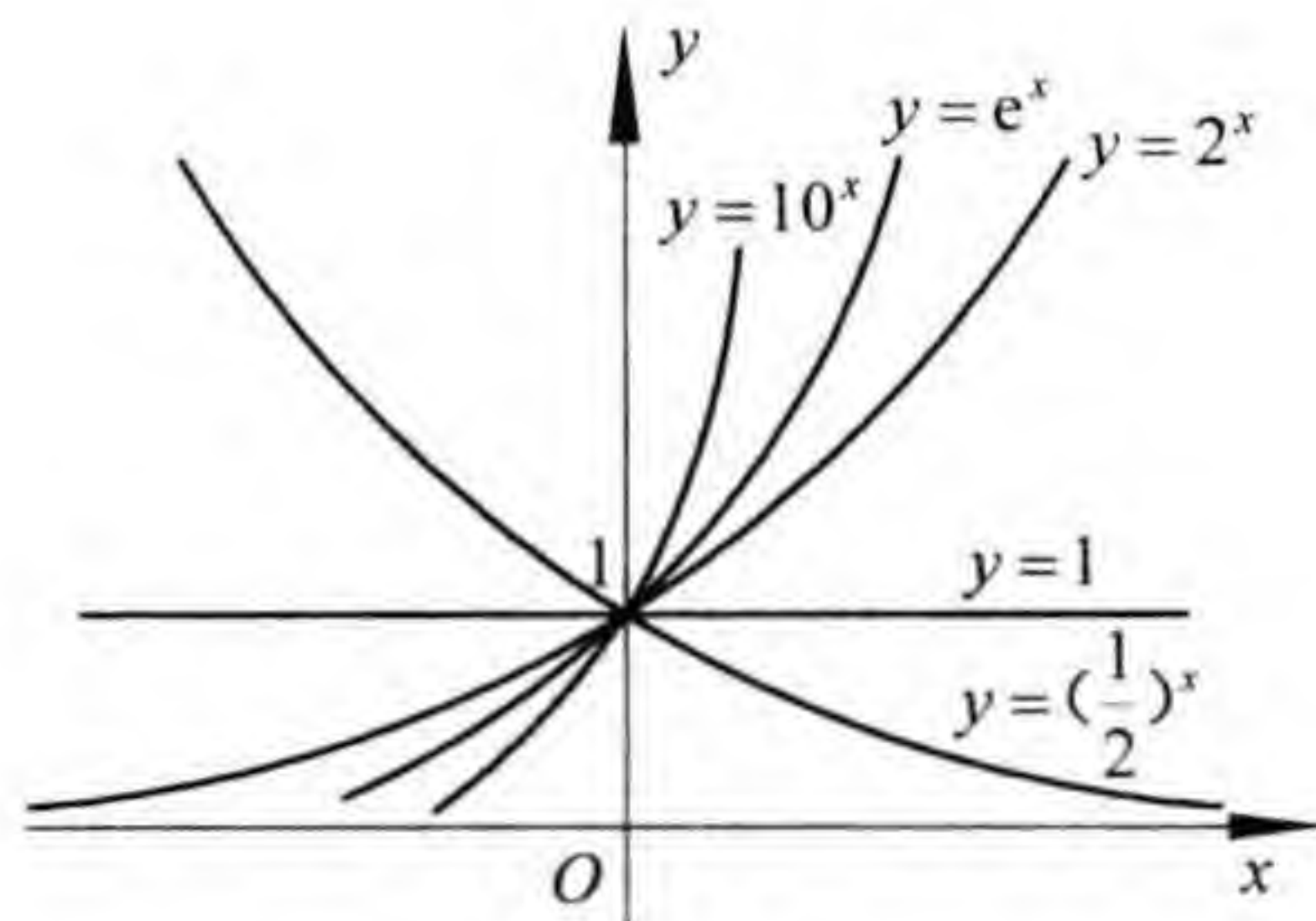


图 1.62

【278】 作指数函数  $y = a^x$  当  $a = \frac{1}{2}, 1, 2, e, 10$  时的图像.

解 如图 1.62 所示.

【279】 作复合指数函数  $y = e^{y_1}$  的图像, 设:

- (1)  $y_1 = x^2$ ; (2)  $y_1 = -x^2$ ; (3)  $y_1 = \frac{1}{x}$ ; (4)  $y_1 = \frac{1}{x^2}$ ; (5)  $y_1 = -\frac{1}{x^2}$ ; (6)  $y_1 = \frac{2x}{1-x^2}$ .

解 (1) 如图 1.63 所示; (2) 如图 1.64 所示; (3) 如图 1.65 所示;  
(4) 如图 1.66 所示; (5) 如图 1.67 所示; (6) 如图 1.68 所示.

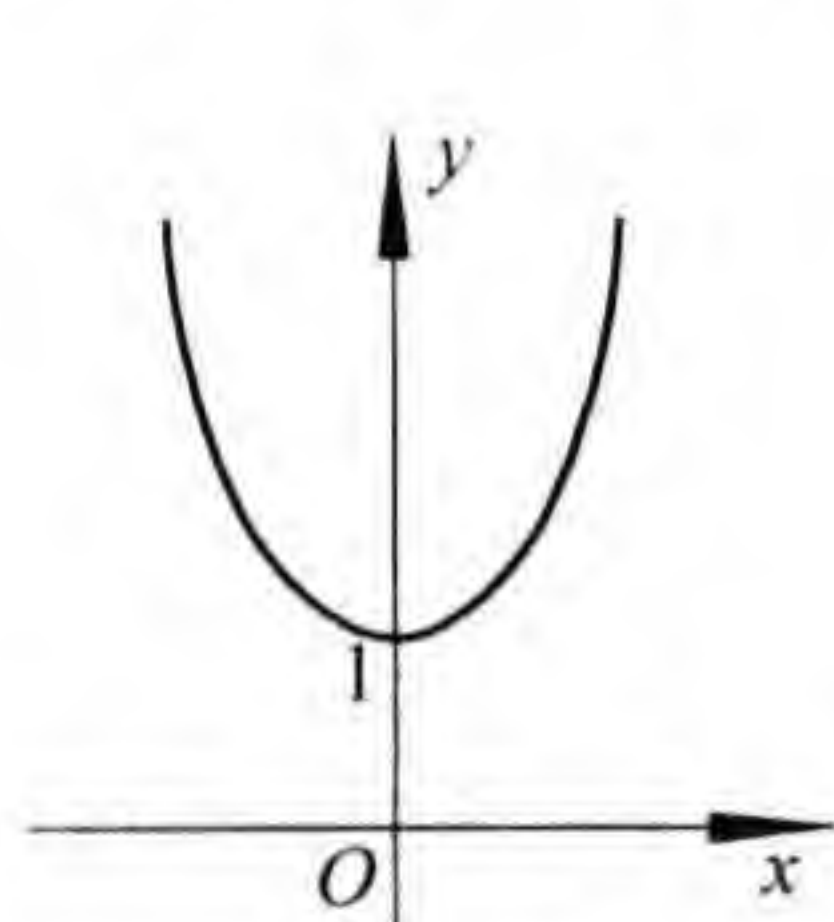


图 1.63

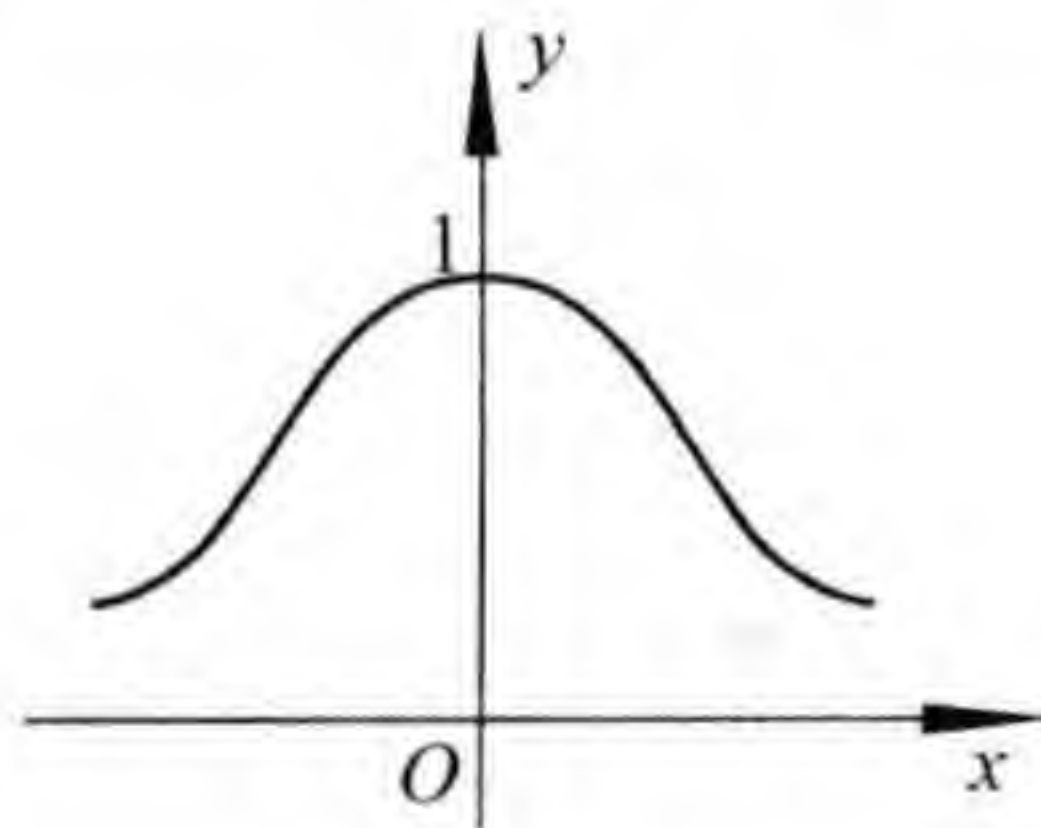


图 1.64

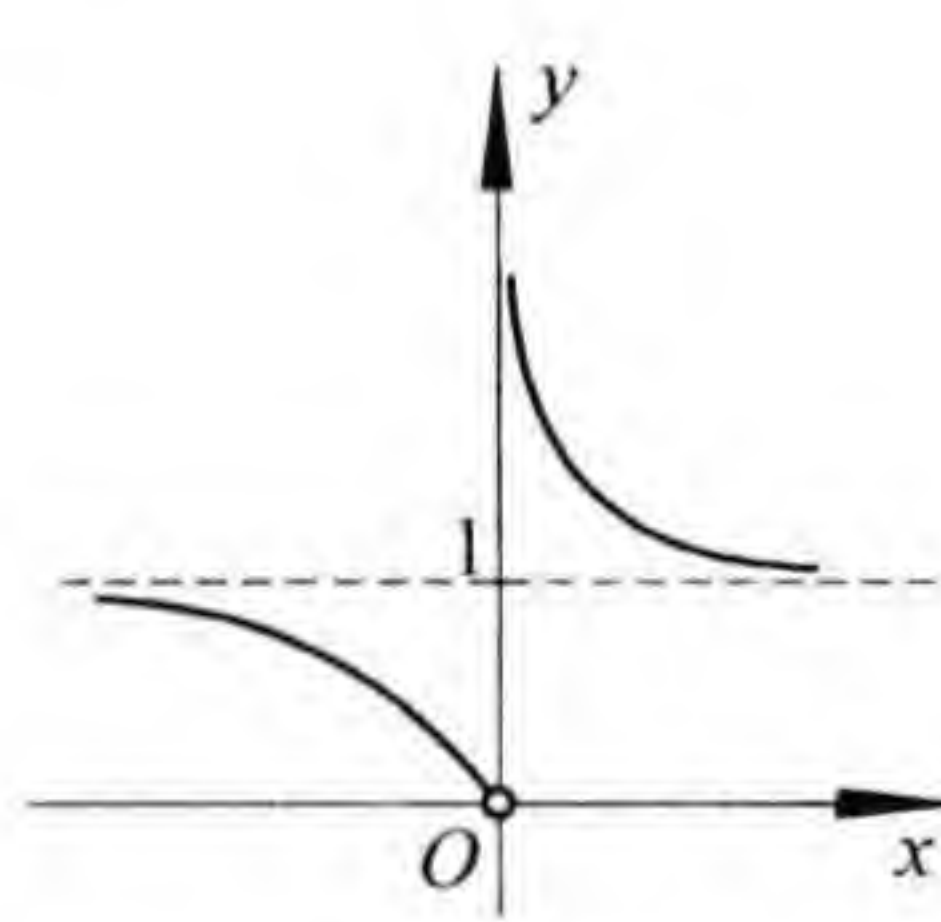


图 1.65

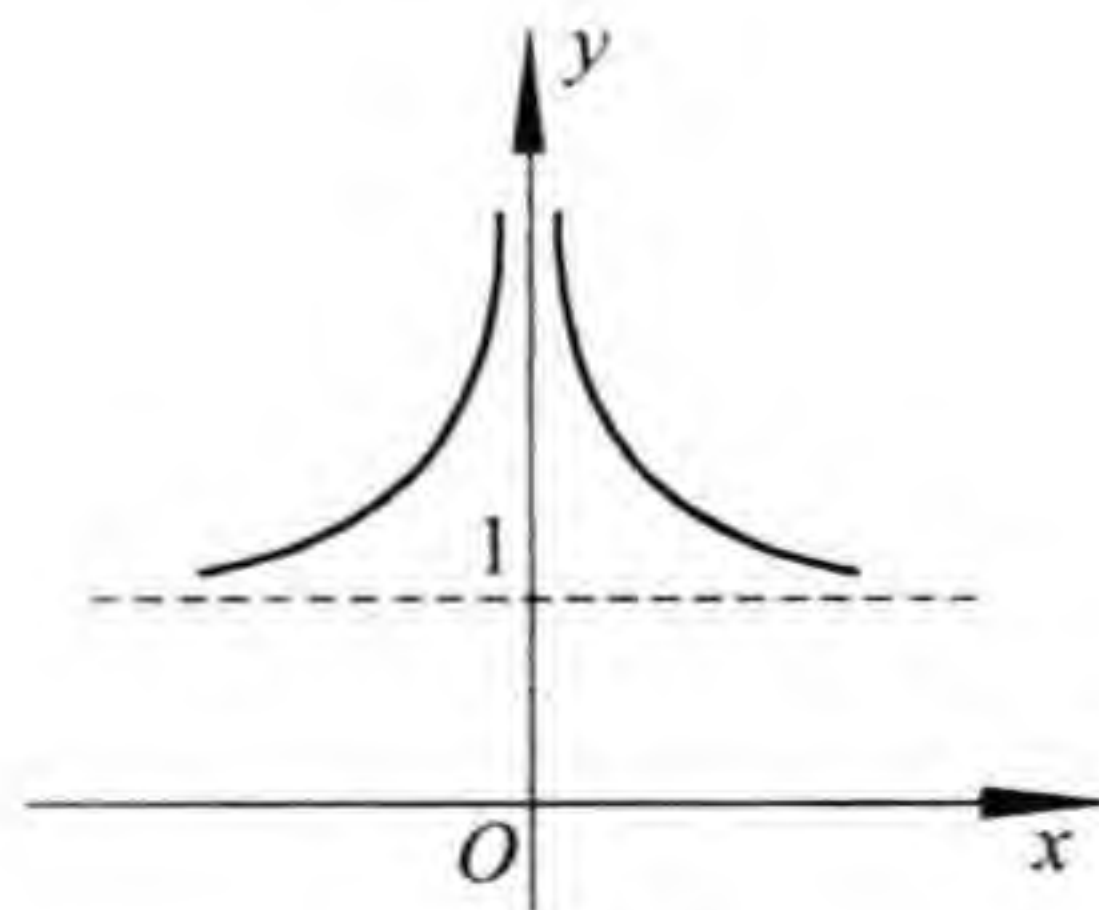


图 1.66

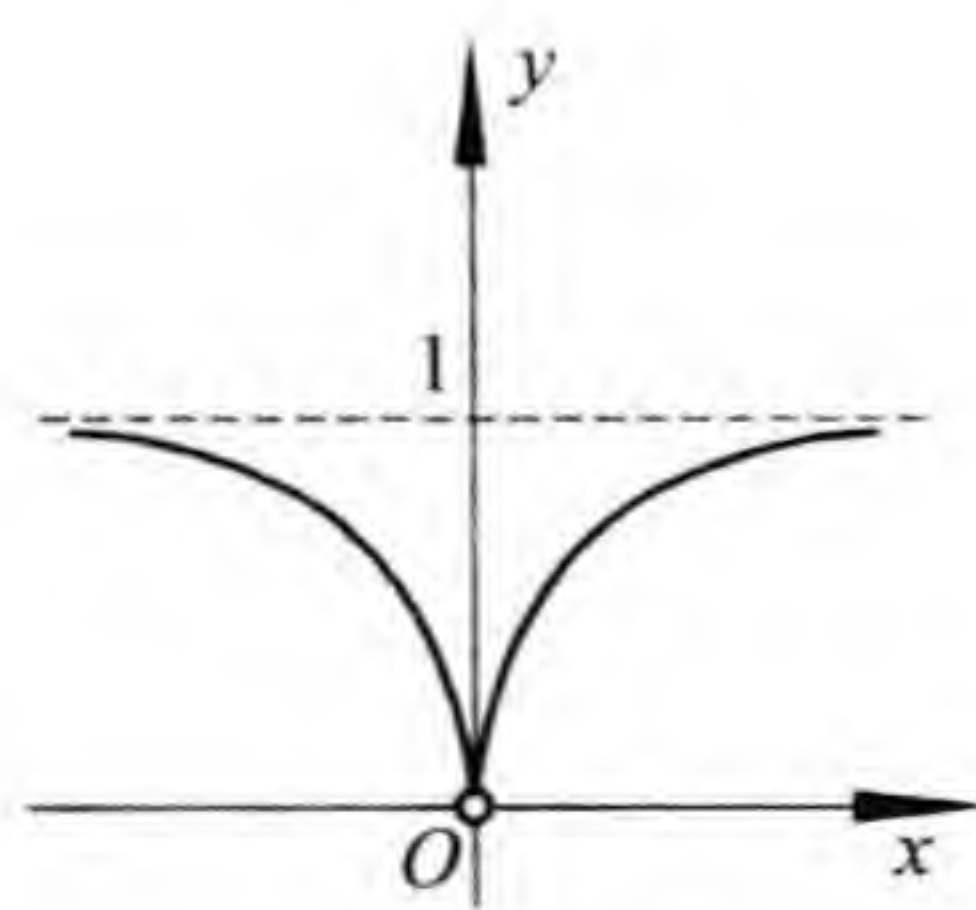


图 1.67

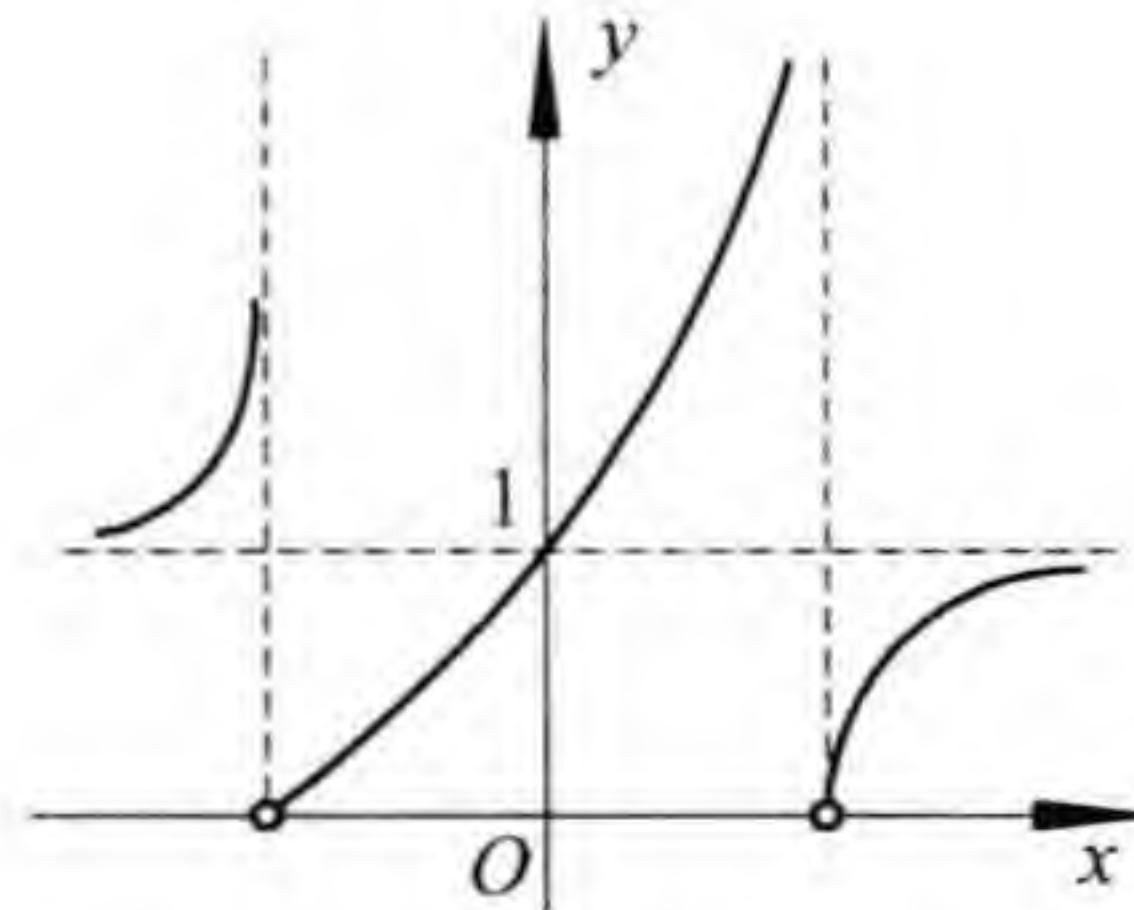


图 1.68

【280】 作对数函数  $y = \log_a x$  当  $a = \frac{1}{2}, 2, e, 10$  时的图像.

解 如图 1.69 所示.



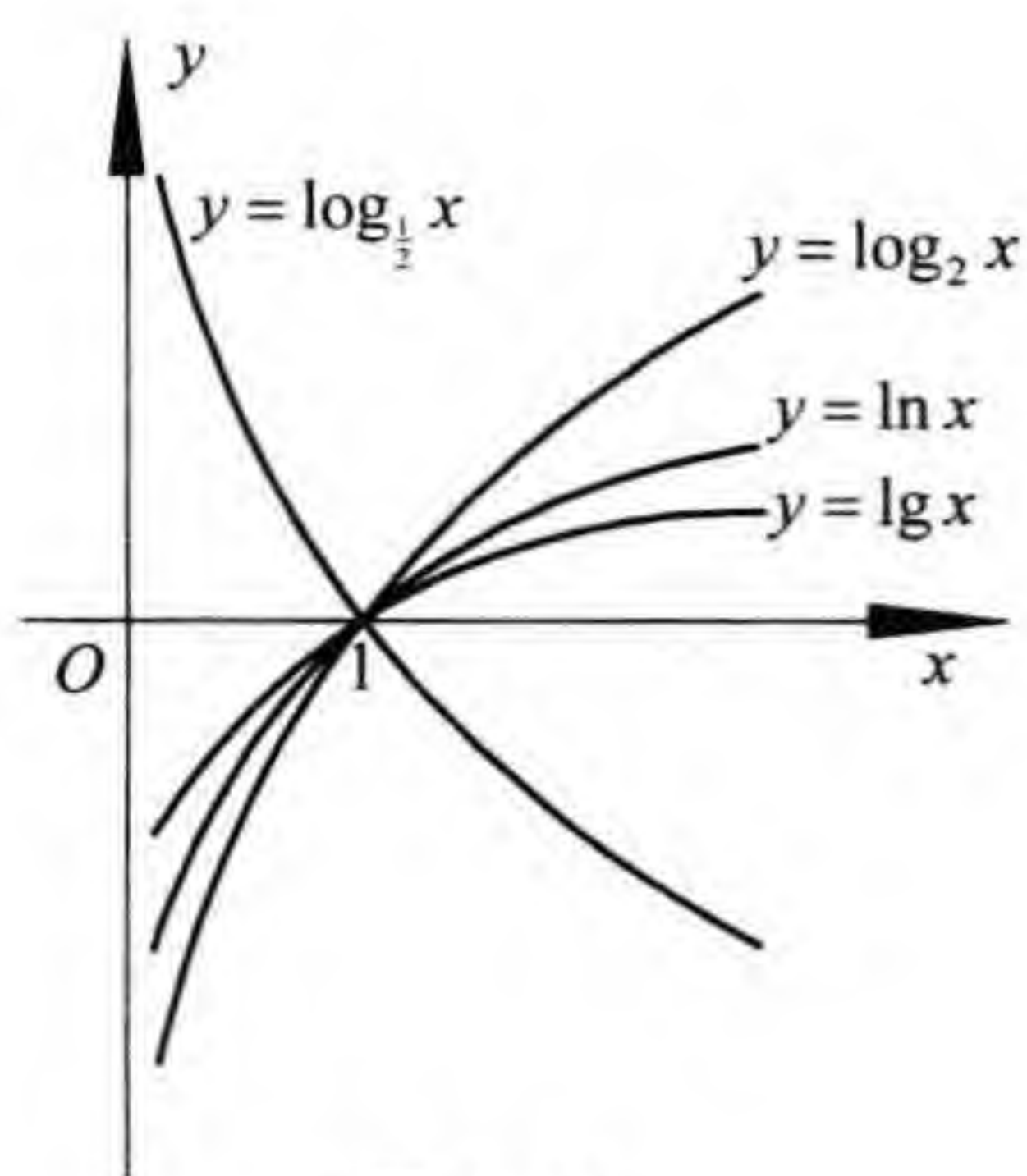


图 1.69

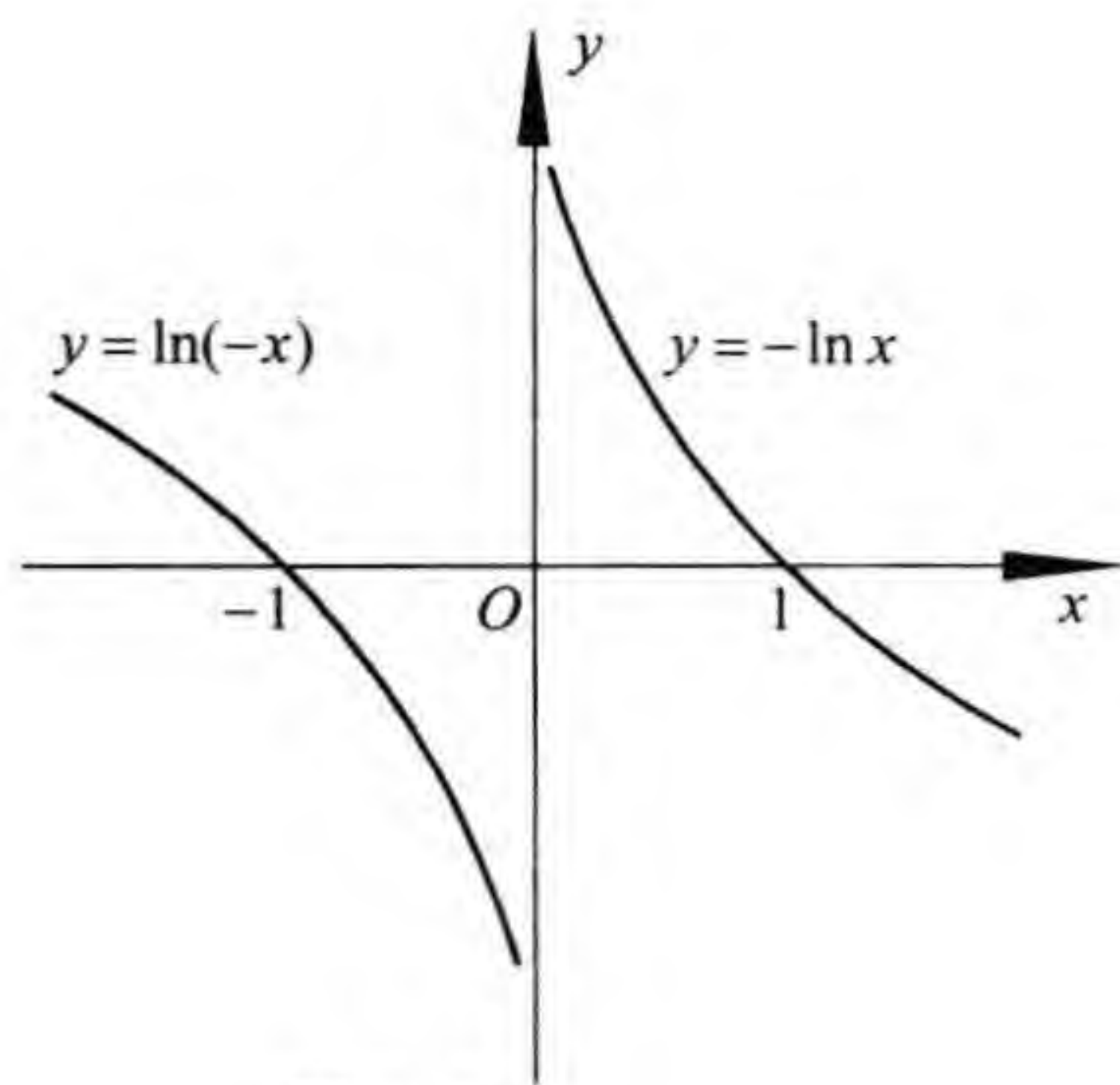


图 1.70

【281】 作下列函数的图像: (1)  $y = \ln(-x)$ ; (2)  $y = -\ln x$ .

解 如图 1.70 所示.

【282】 设:

(1)  $y_1 = 1 + x^2$ ; (2)  $y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$ ; (3)  $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$ ; (4)  $y_1 = \frac{1}{x^2}$ ; (5)  $y_1 = 1 + e^x$ .

作出对数复合函数  $y = \ln y_1$  的图像.

解 (1) 如图 1.71 所示;

(2) 存在域:  $x > 3$  或  $x < 1$ .  $y = \ln|x-1| + 2\ln|x-2| + 3\ln|x-3|$ , 将此三个函数的图像叠加即得, 如图 1.72 所示;

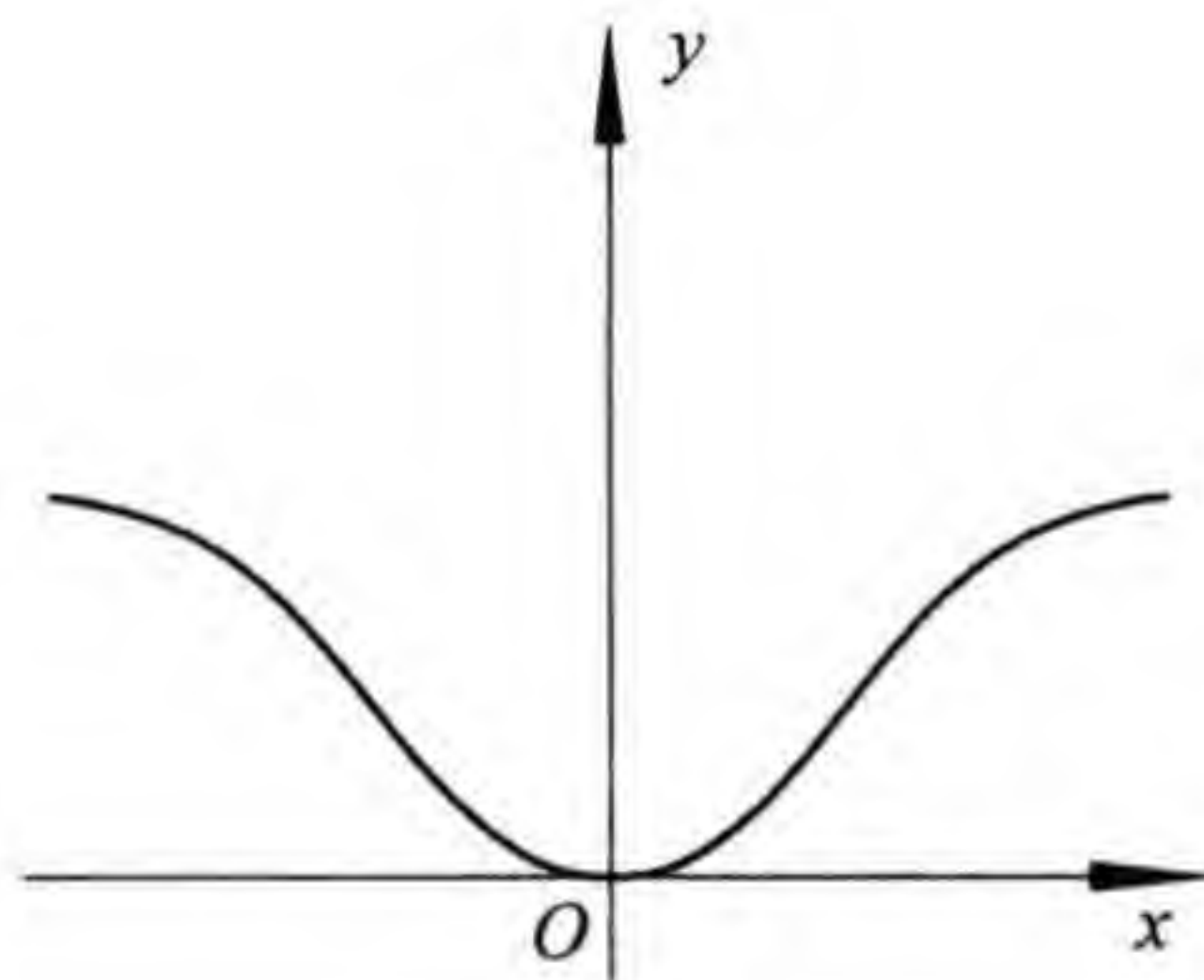


图 1.71

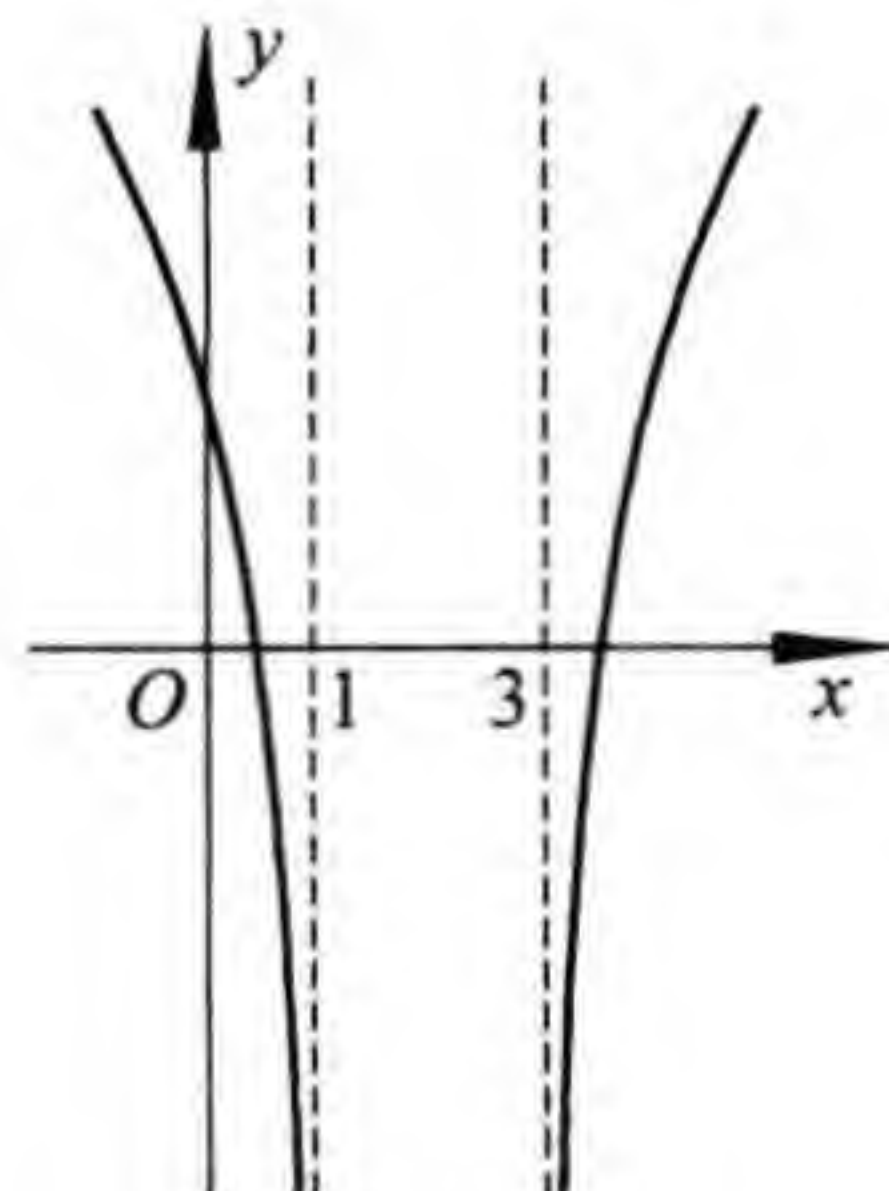


图 1.72

(3)  $y = \ln(1-x) - \ln(1+x)$ , 将  $y = \ln(1-x)$  及  $y = -\ln(1+x)$  的图像叠加即得, 如图 1.73 所示 ( $-1 < x < 1$ );

(4)  $y = \ln \frac{1}{x^2}$ , 如图 1.74 所示, 图像关于  $Oy$  轴对称;

(5) 如图 1.75 所示.

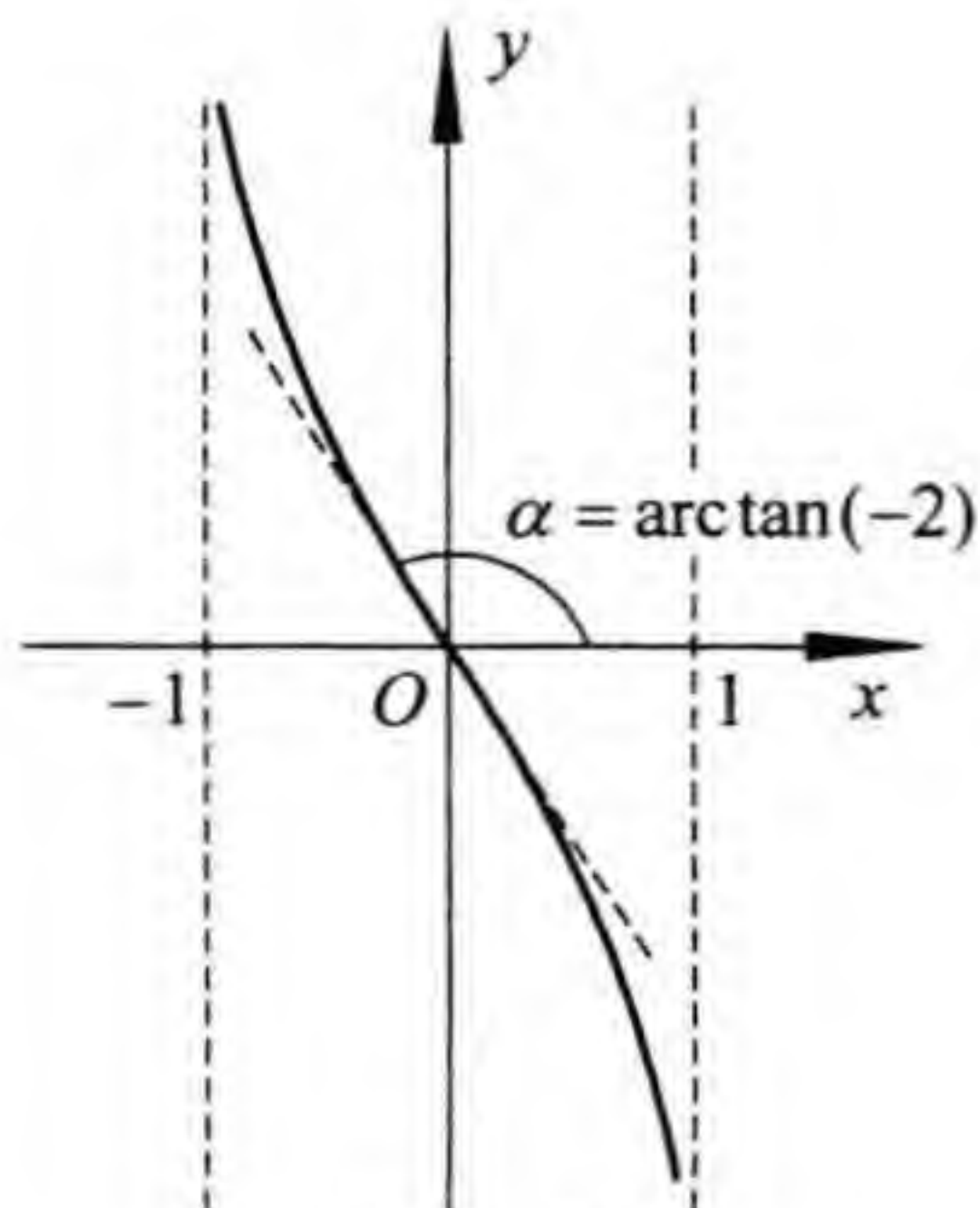


图 1.73

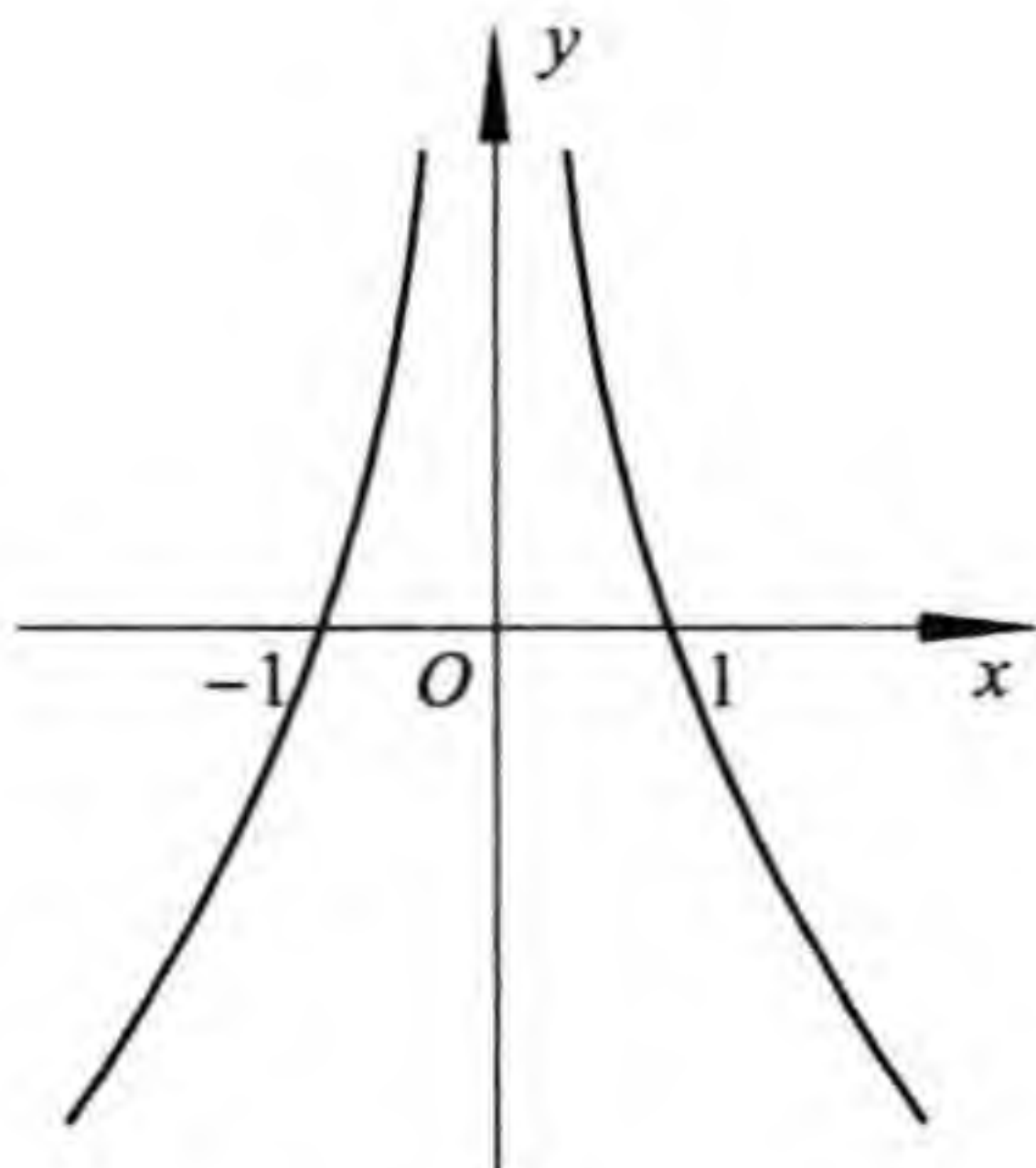


图 1.74

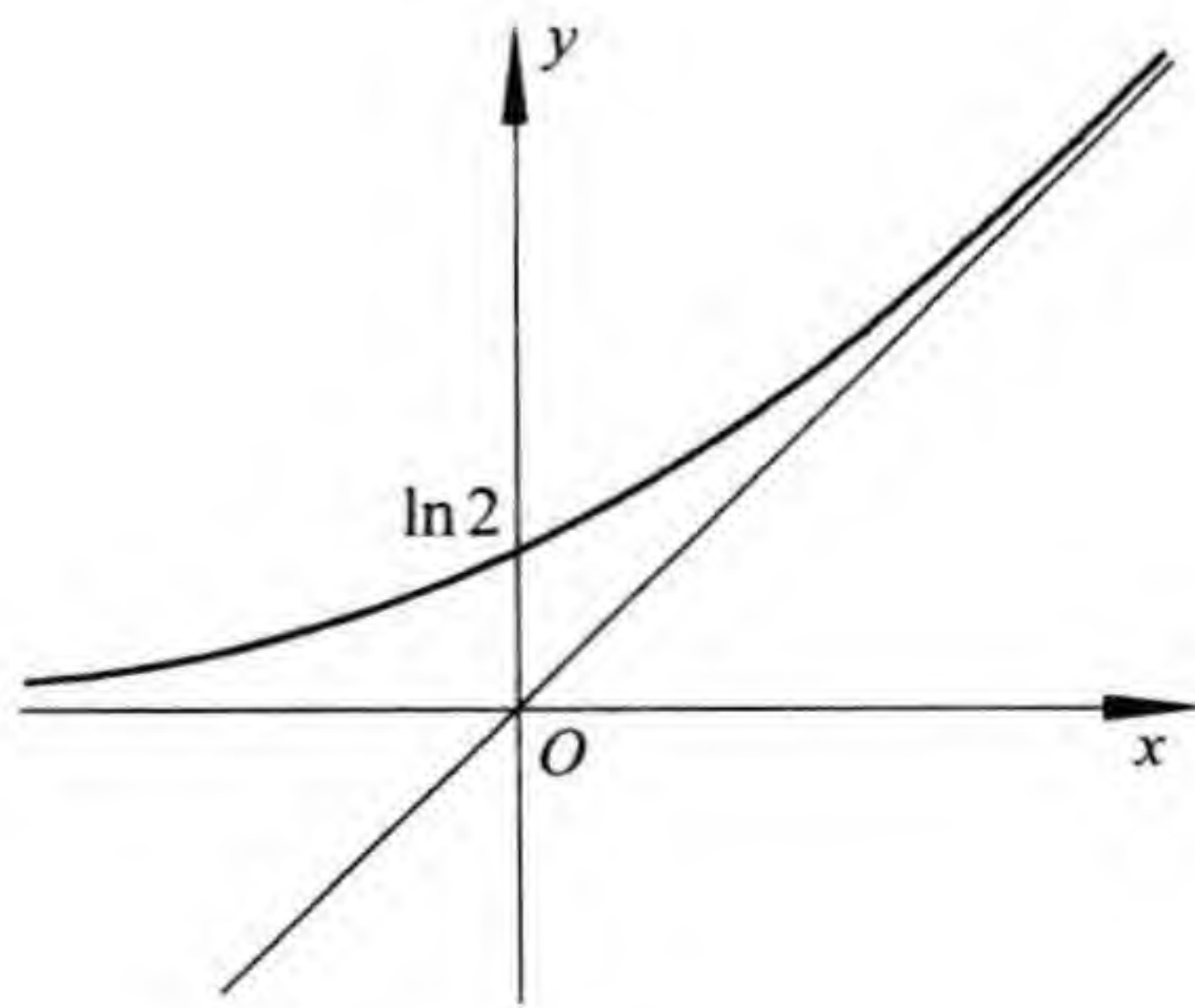


图 1.75



【283】 作函数  $y = \log_x 2$  的图像.

解 如图 1.76 所示.

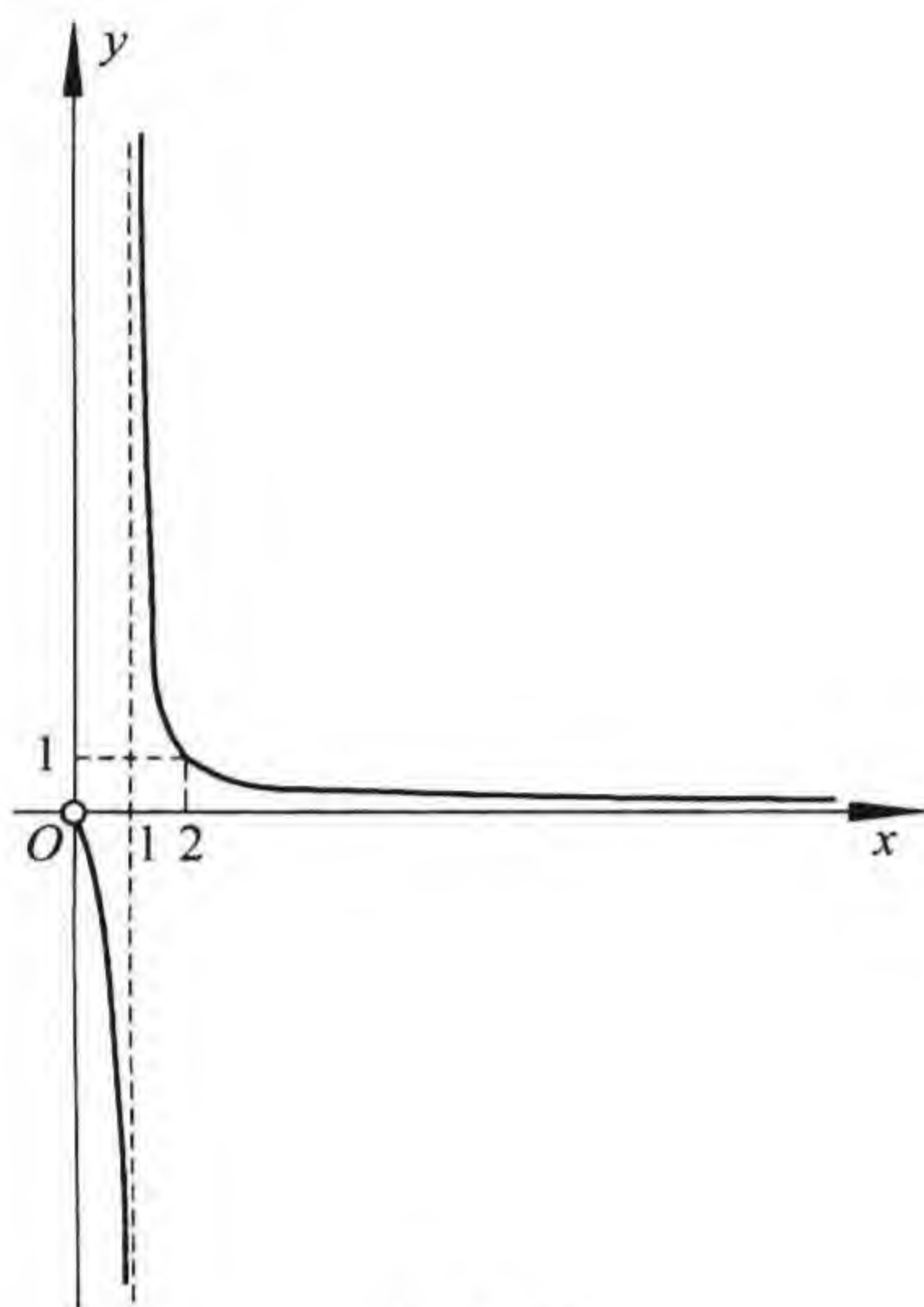


图 1.76

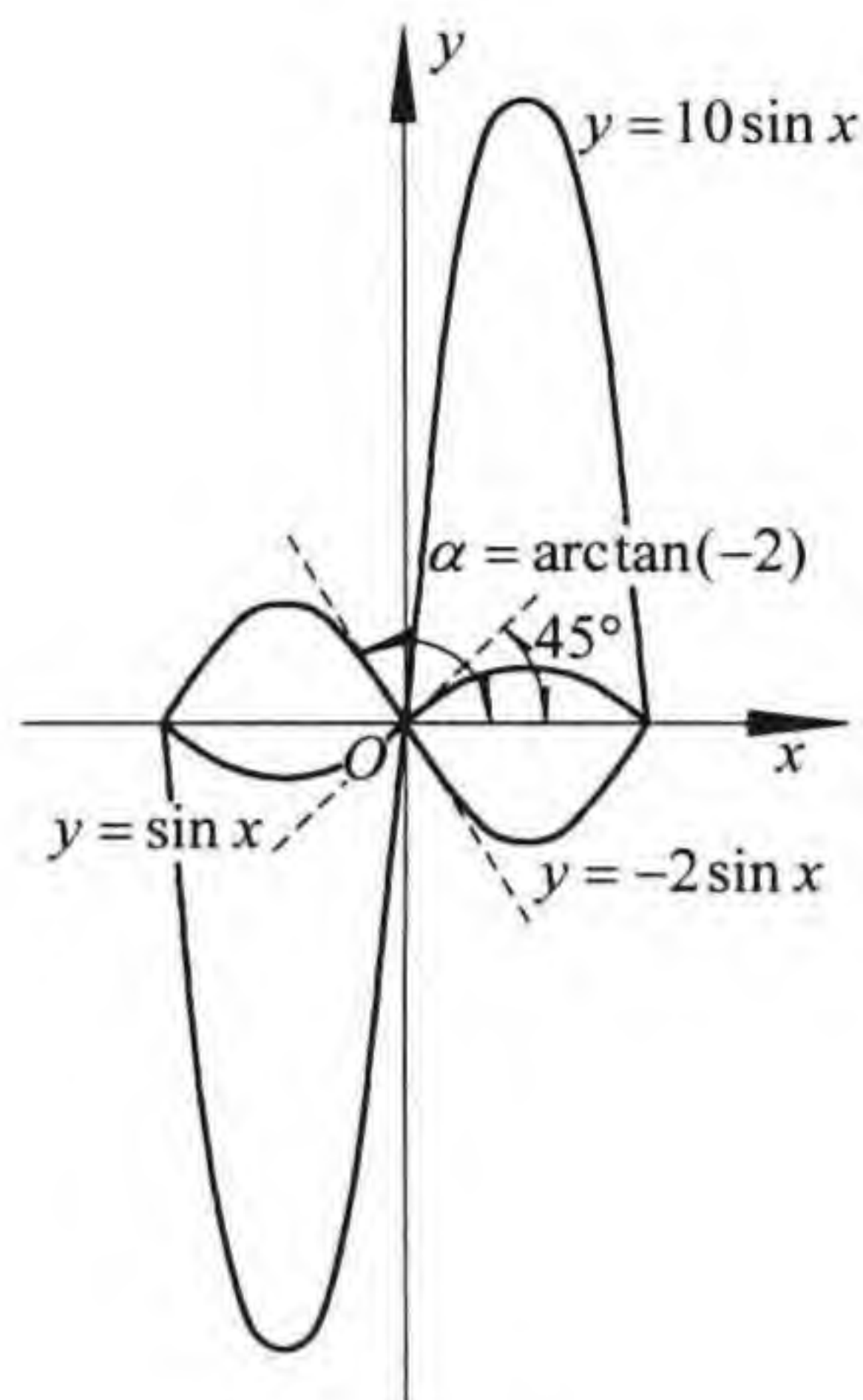


图 1.77

【284】 作函数  $y = A \sin x$  当  $A = 1, 10, -2$  时的图像.

解 如图 1.77 所示.

【285】 作函数  $y = \sin(x - x_0)$  当  $x_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$  时的图像.

解 只要将  $y = \sin x$  的图像向右平移距离  $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$  即得, 如图 1.78 所示.

1.  $y = \sin x$ ; 2.  $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ ; 3.  $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ ; 4.  $y = \sin(x - \frac{3\pi}{4})$ ; 5.  $y = \sin(x - \pi)$ .

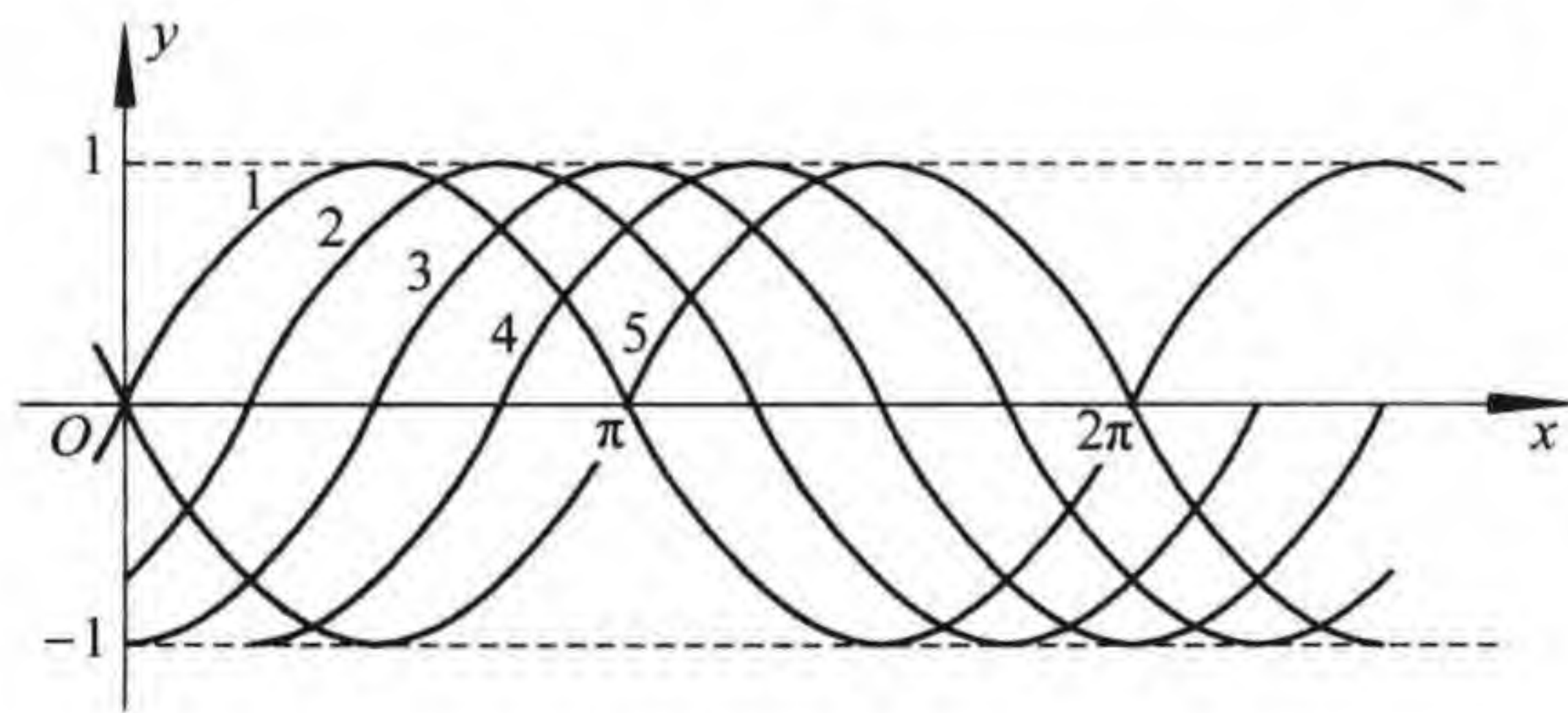


图 1.78

【286】 作函数  $y = \sin nx$  的图像. 设  $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ .

解 如图 1.79 所示. 1.  $y = \sin x$ ; 2.  $y = \sin 2x$ ; 3.  $y = \sin 3x$ ; 4.  $y = \sin \frac{1}{2}x$ ; 5.  $y = \sin \frac{1}{3}x$ .

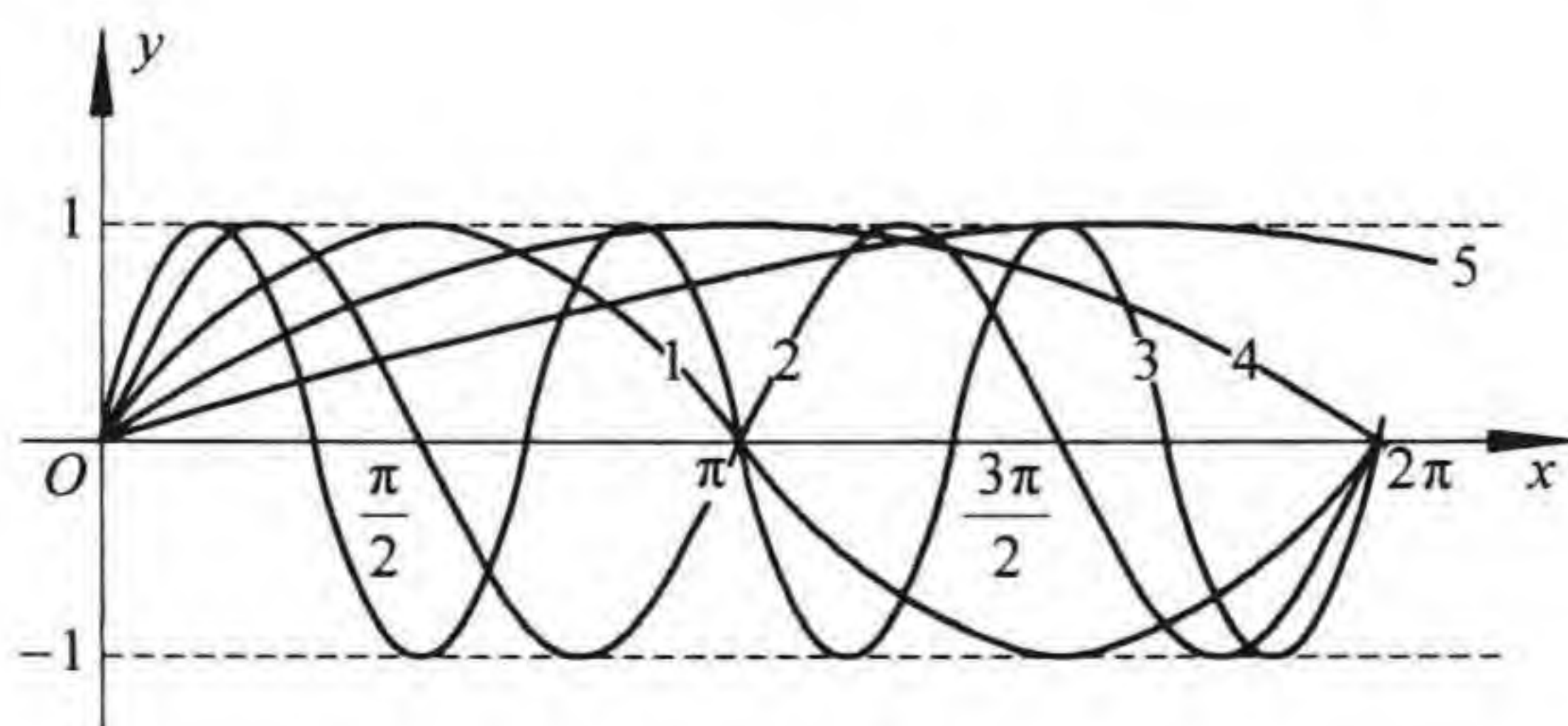


图 1.79



**【287】** 把函数  $y = a\cos x + b\sin x$  化为以下形式:  $y = A\sin(x - x_0)$ , 再作它的图像.

研究例子  $y = 6\cos x + 8\sin x$ .

**提示** 注意, 在式  $y = A\sin(x - x_0)$  中

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (a^2 + b^2 \neq 0), \quad \sin x_0 = -\frac{a}{A}, \quad \cos x_0 = \frac{b}{A}.$$

于是,  $y = a\cos x + b\sin x$  的图像可经下面两个步骤完成: 先把正弦曲线  $y = \sin x$  沿  $Ox$  轴平移距离  $|x_0|$ , 然后再从纵轴“伸长” $A$  倍.

注意  $x_0$  的正负及  $A < 1$  或  $A > 1$ .

**解**  $y = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$ , 由于

$$\left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \quad \text{及} \quad \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1,$$

故可令  $\sin x_0 = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos x_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (1)$

于是,

$$y = A\sin(x - x_0) \quad (2)$$

其中  $A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (a^2 + b^2 \neq 0), x_0$  适合(1)式.

(2)式图像是这样作的: 先把正弦曲线  $y = \sin x$  沿  $Ox$  轴平移距离  $|x_0|$  (若  $x_0 > 0$  时, 则向右移; 若  $x_0 < 0$  时向左移), 然后再从纵轴“伸长” $A$  倍(当  $A < 1$  时为压缩  $\frac{1}{A}$  倍).

对于例子

$$y = 6\cos x + 8\sin x, \quad A = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$\sin x_0 = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}, \quad \cos x_0 = \frac{4}{5}, \quad x_0 = -\arctan \frac{3}{4},$$

如图 1.80 所示.

作下列三角函数的图像:

**【288】**  $y = \cos x$ .

**解** 如图 1.81 所示.

**【289】**  $y = \tan x$ .

**解** 如图 1.82 所示.

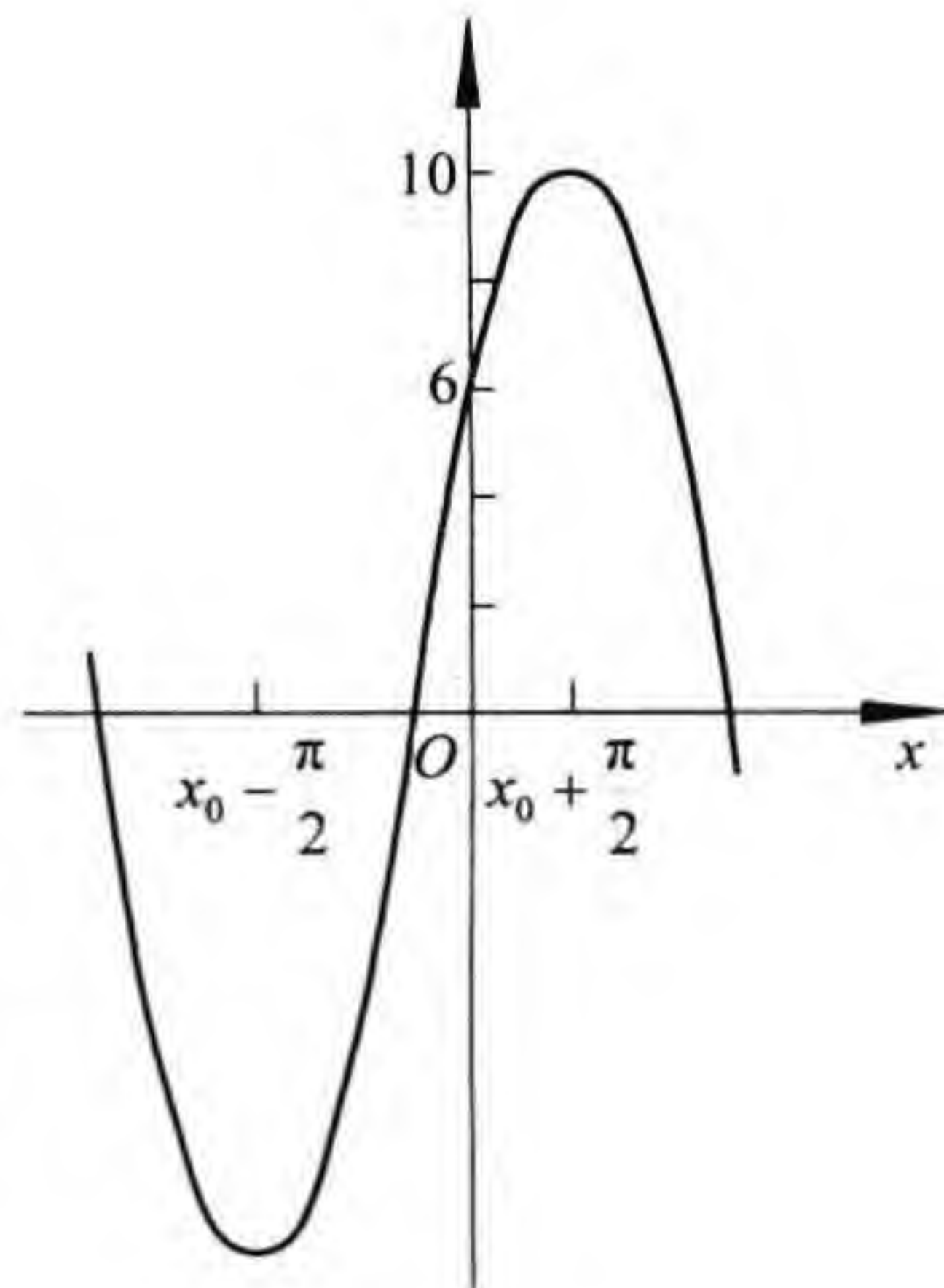


图 1.80

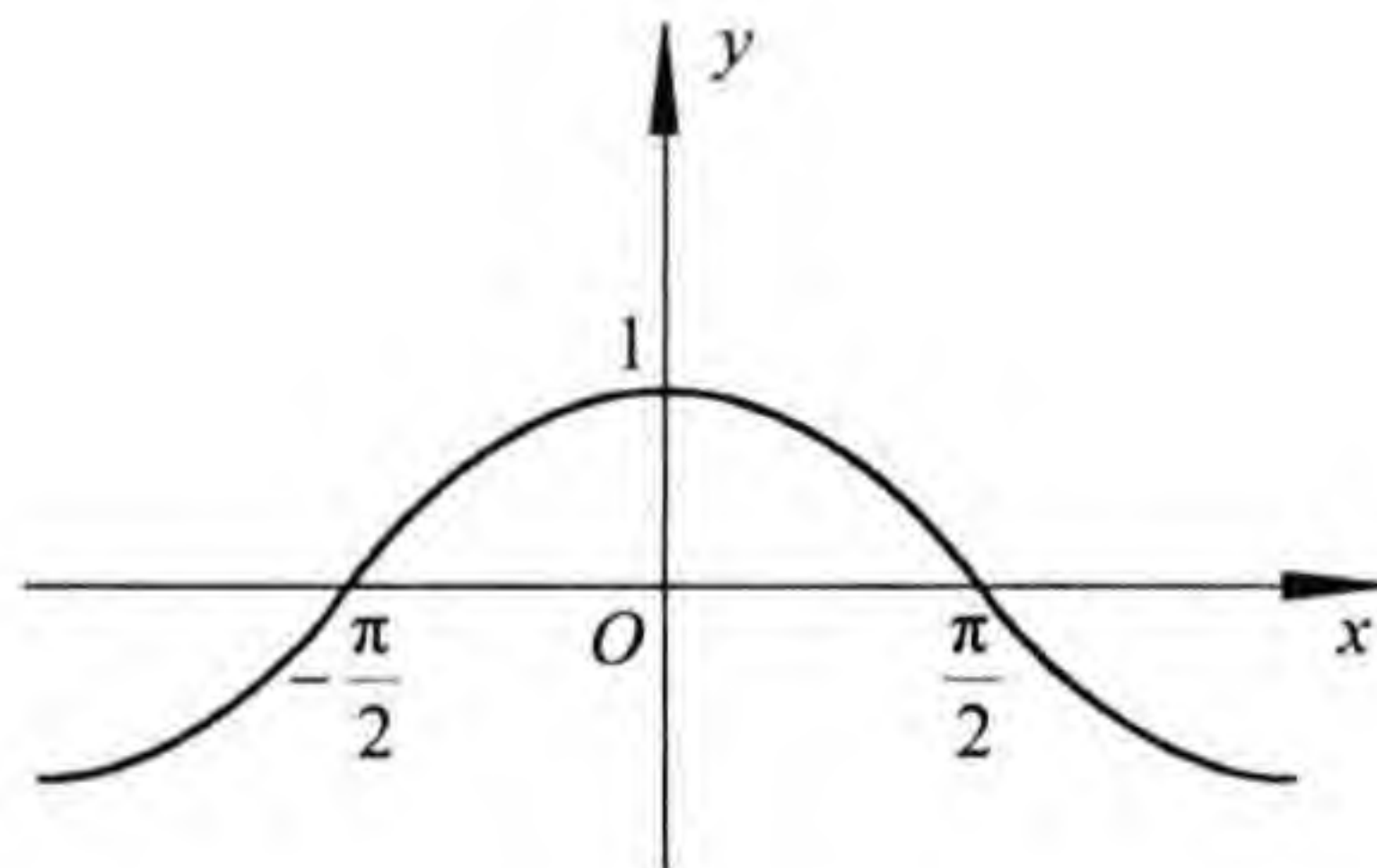


图 1.81

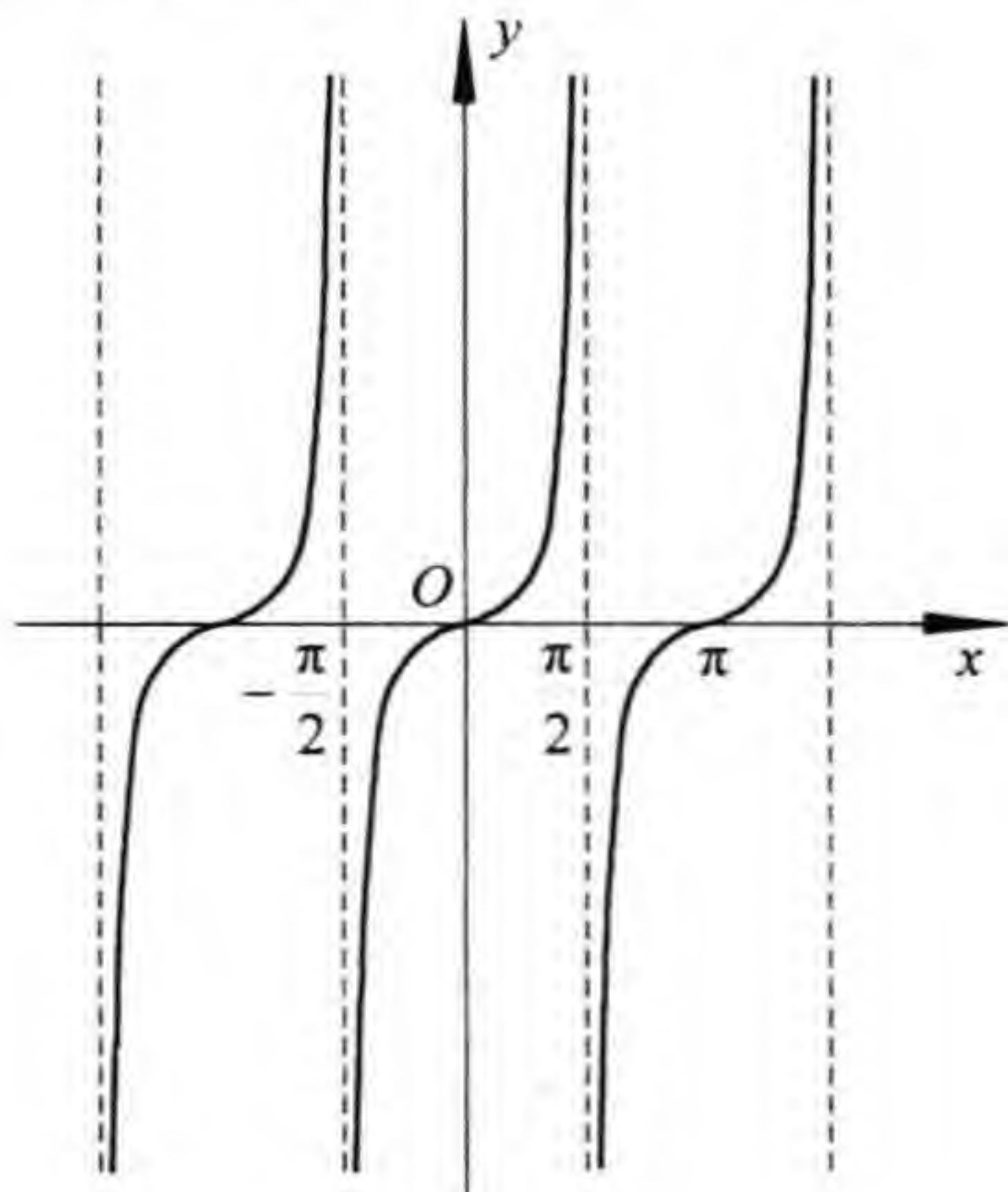


图 1.82

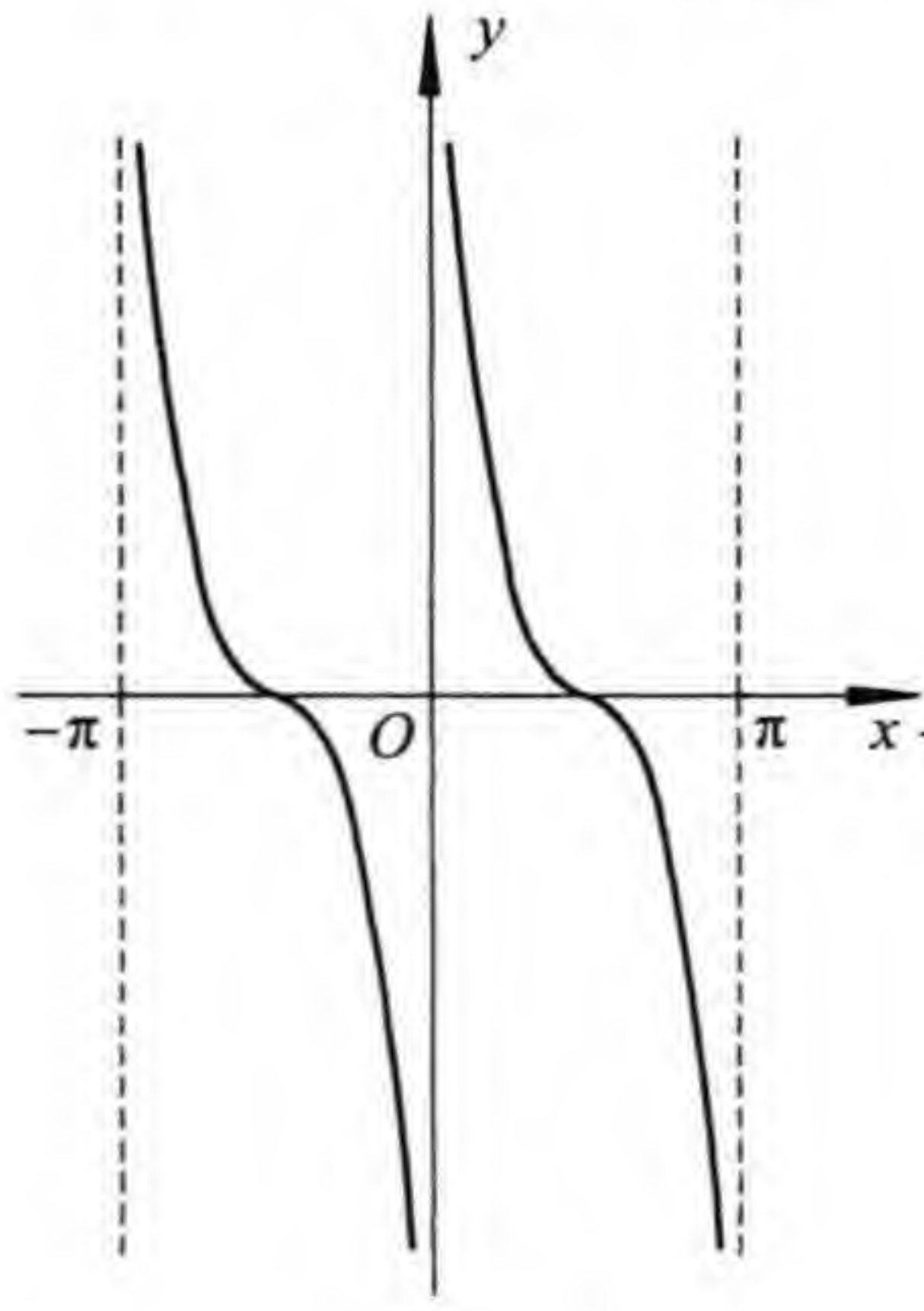


图 1.83



**【290】**  $y = \cot x$ .

解 如图 1.83 所示.

**【291】**  $y = \sec x$ .

解 如图 1.84 所示.

**【292】**  $y = \csc x$ .

解 如图 1.85 所示.

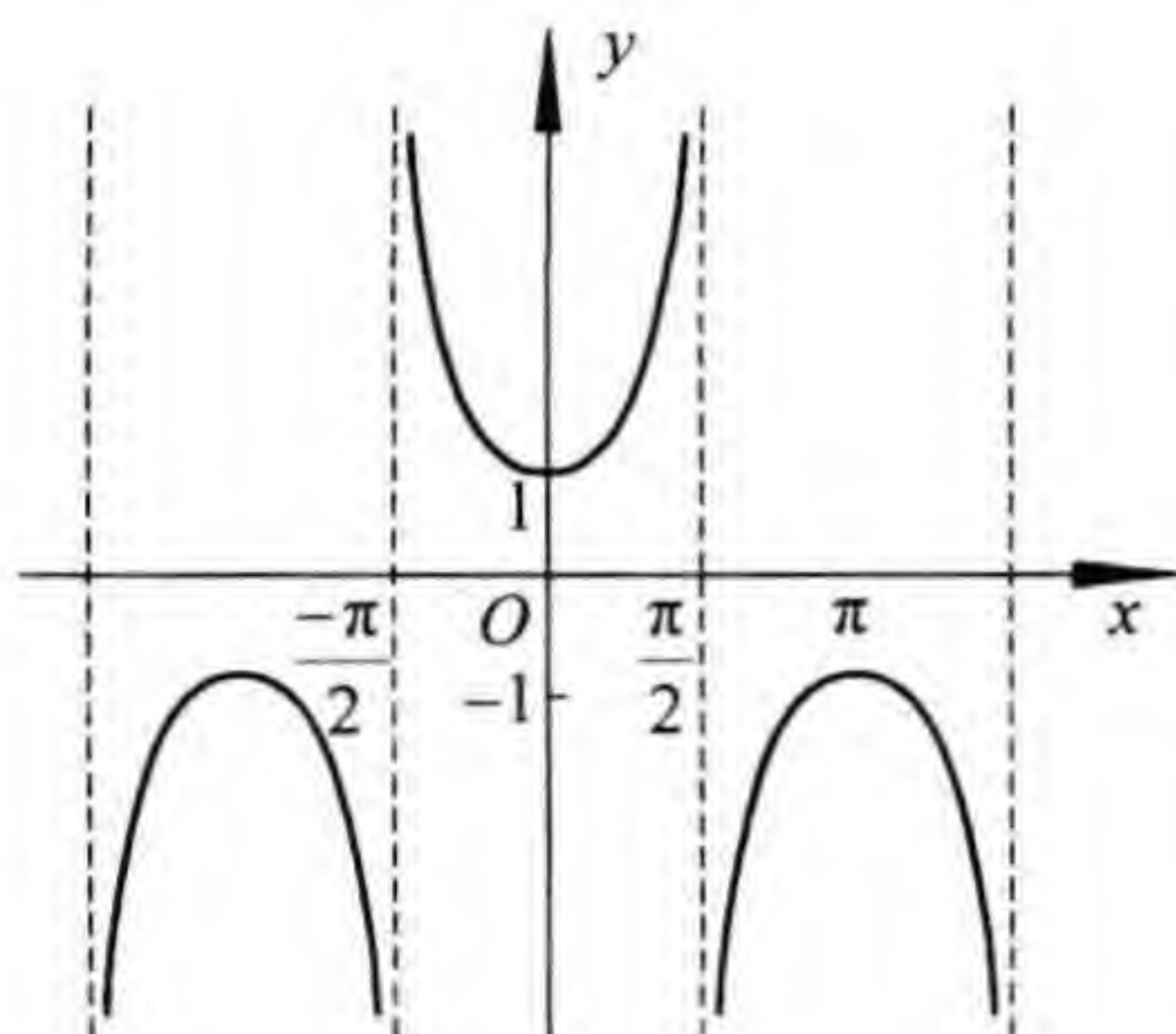


图 1.84

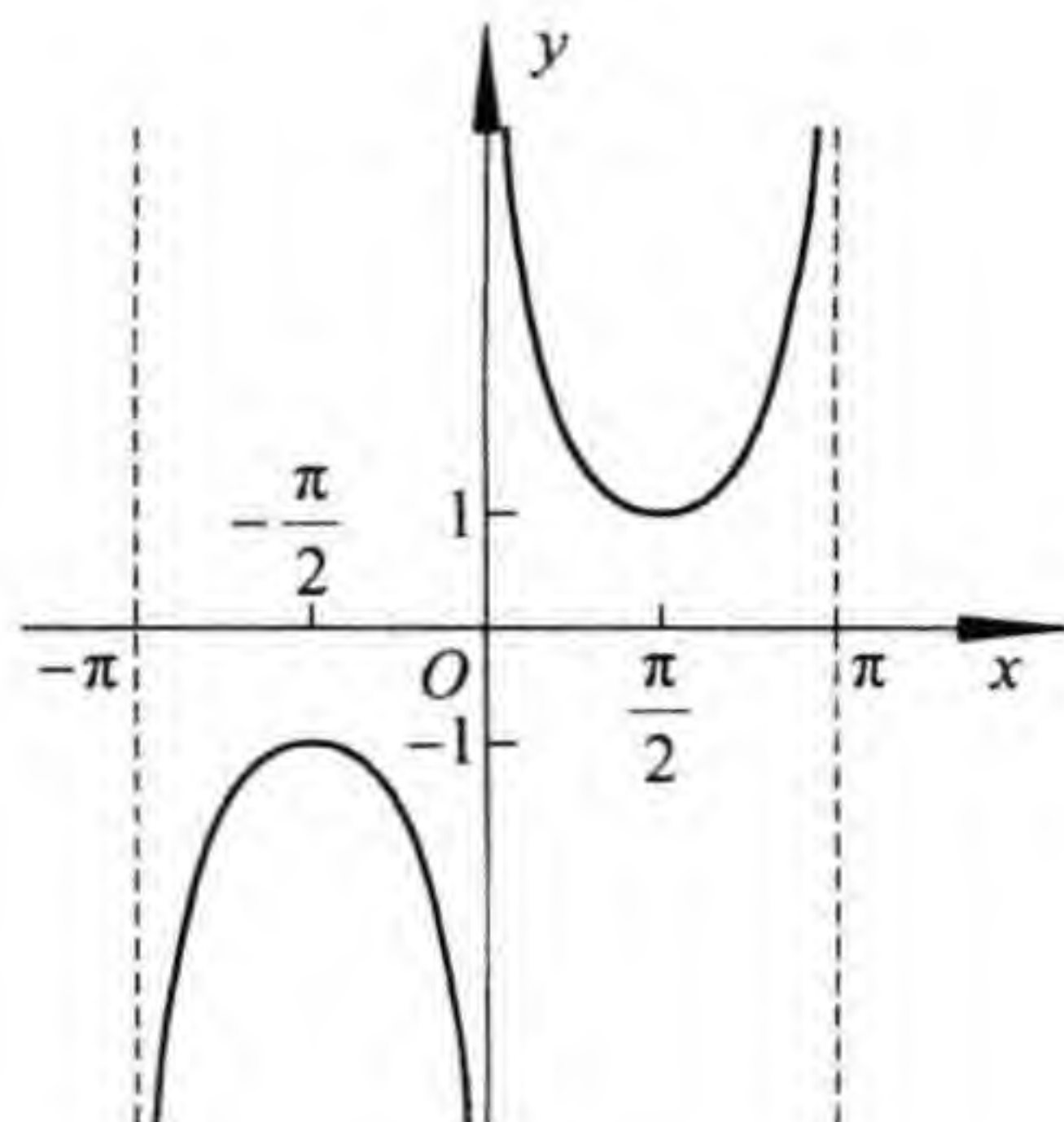


图 1.85

**【293】**  $y = \sin^2 x$

解 如图 1.86 所示.

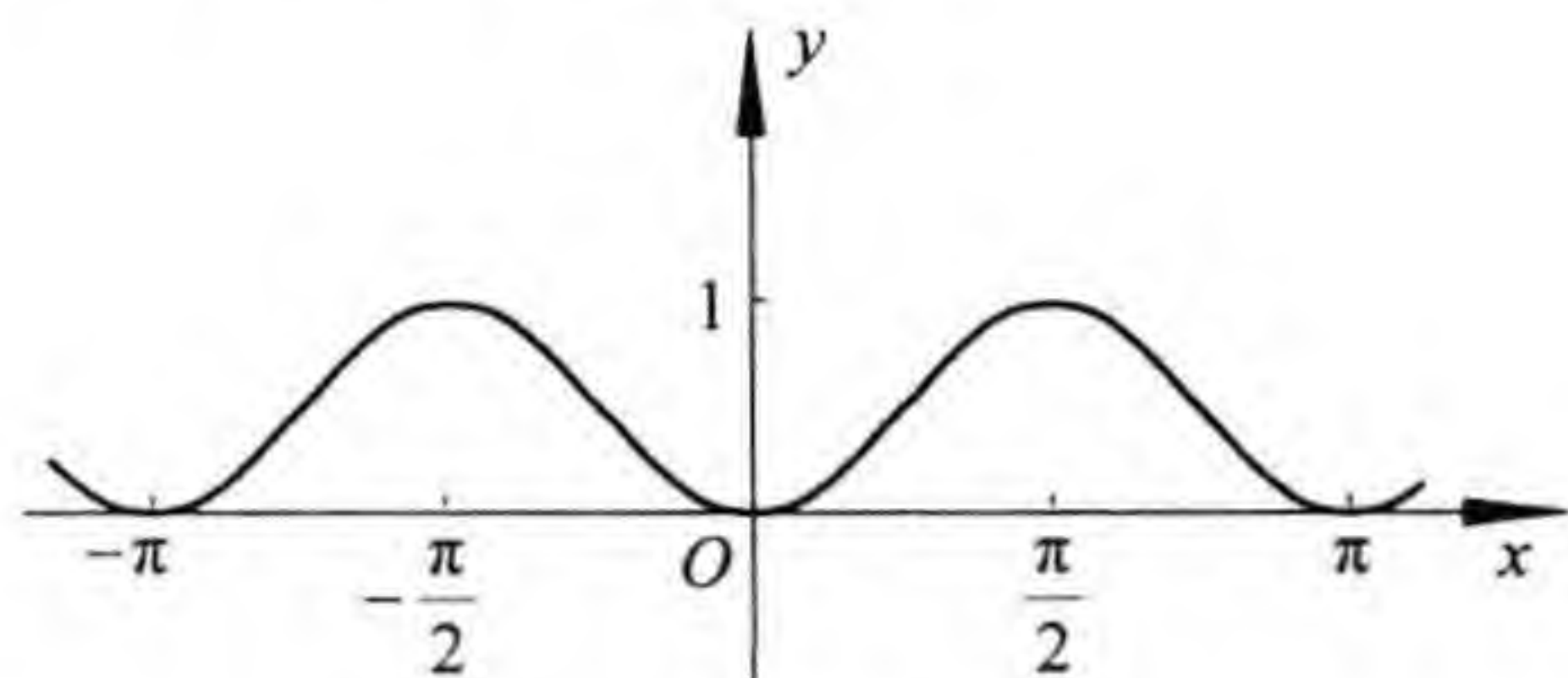


图 1.86

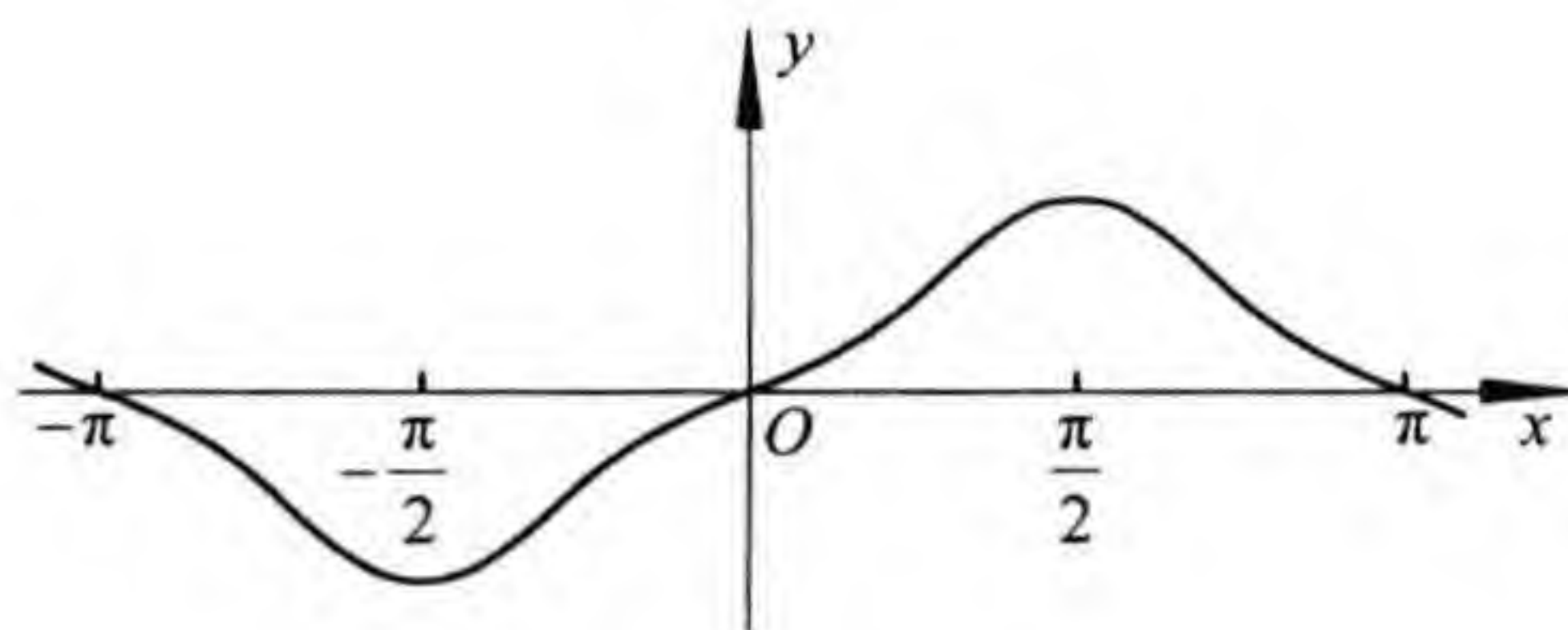


图 1.87

**【294】**  $y = \sin^3 x$ .

解 如图 1.87 所示.

**【295】**  $y = \cot^2 x$ .

解 如图 1.88 所示.

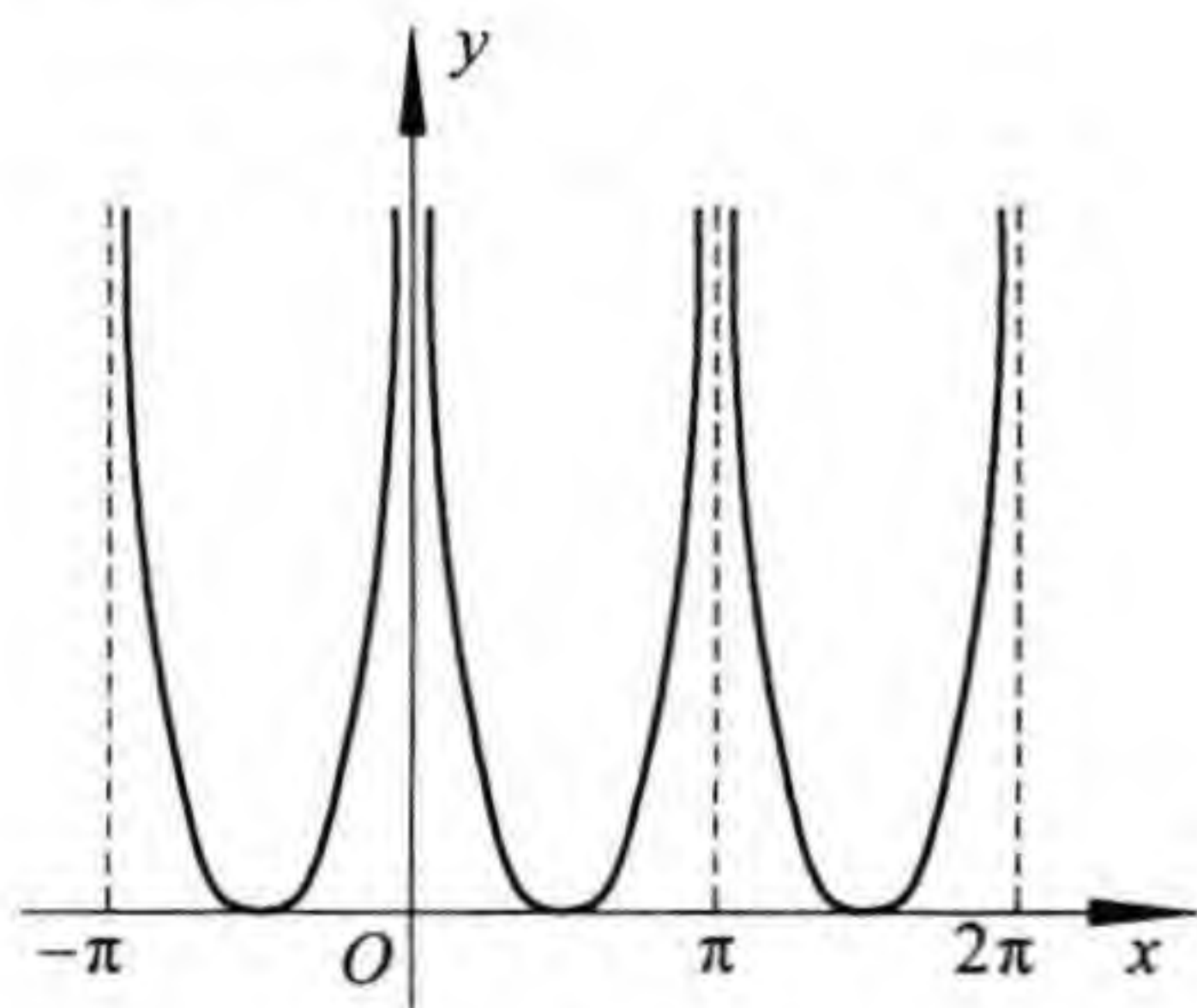


图 1.88

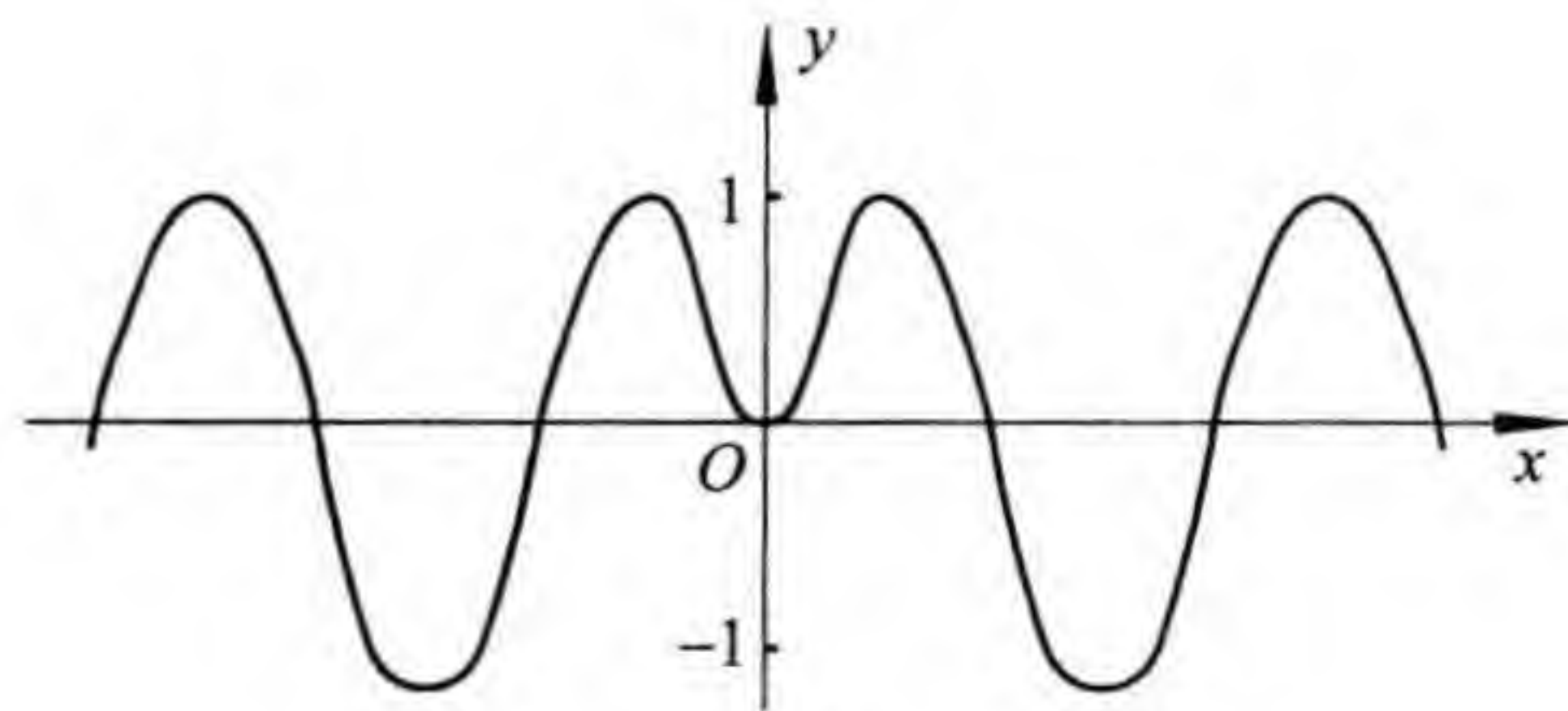


图 1.89

**【296】**  $y = \sin x \sin 3x$ .

解  $y = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$ . 图像关于  $Oy$  轴对称. 周期为  $\pi$ . 将  $y = \frac{1}{2} \cos 2x$  及  $y = -\frac{1}{2} \cos 4x$  的图像叠加即得. 如图 1.89 所示.

**【297】**  $y = \pm \sqrt{\cos x}$ .



解 图像关于  $Ox$  轴及  $Oy$  轴均对称, 是以  $2\pi$  为周期的周期函数, 如图 1.90 所示.

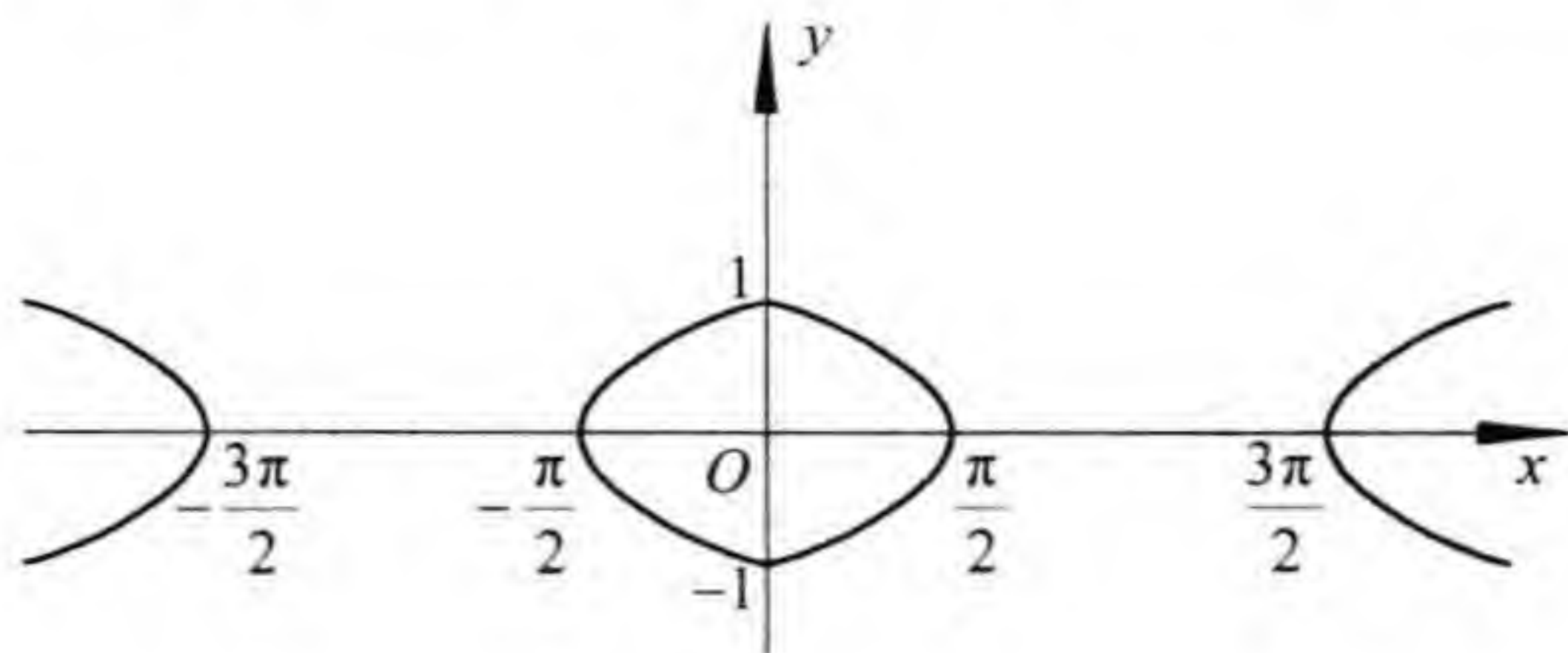


图 1.90

作下列函数的图像:

**【298】**  $y = \sin x^2$ .

**解题思路** 图像关于  $Oy$  轴对称.  $f(\sqrt{n\pi}) = 0$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}) = 0$ . 由于  $\sin x^2 < x^2$ , 故曲线位于抛物线  $y = x^2$  的下方.

**解** 图像关于  $Oy$  轴对称. 因为

$$f(\sqrt{\pi}) = f(\sqrt{2\pi}) = \dots = f(\sqrt{n\pi}) = 0.$$

并且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}) = 0$ , 所以, 曲线和横轴的相邻交点的相互距离所成的数列的极限为零.

由不等式  $\sin x^2 < x^2$ , 我们知道这条曲线位于抛物线  $y = x^2$  的下方. 如图 1.91 所示.

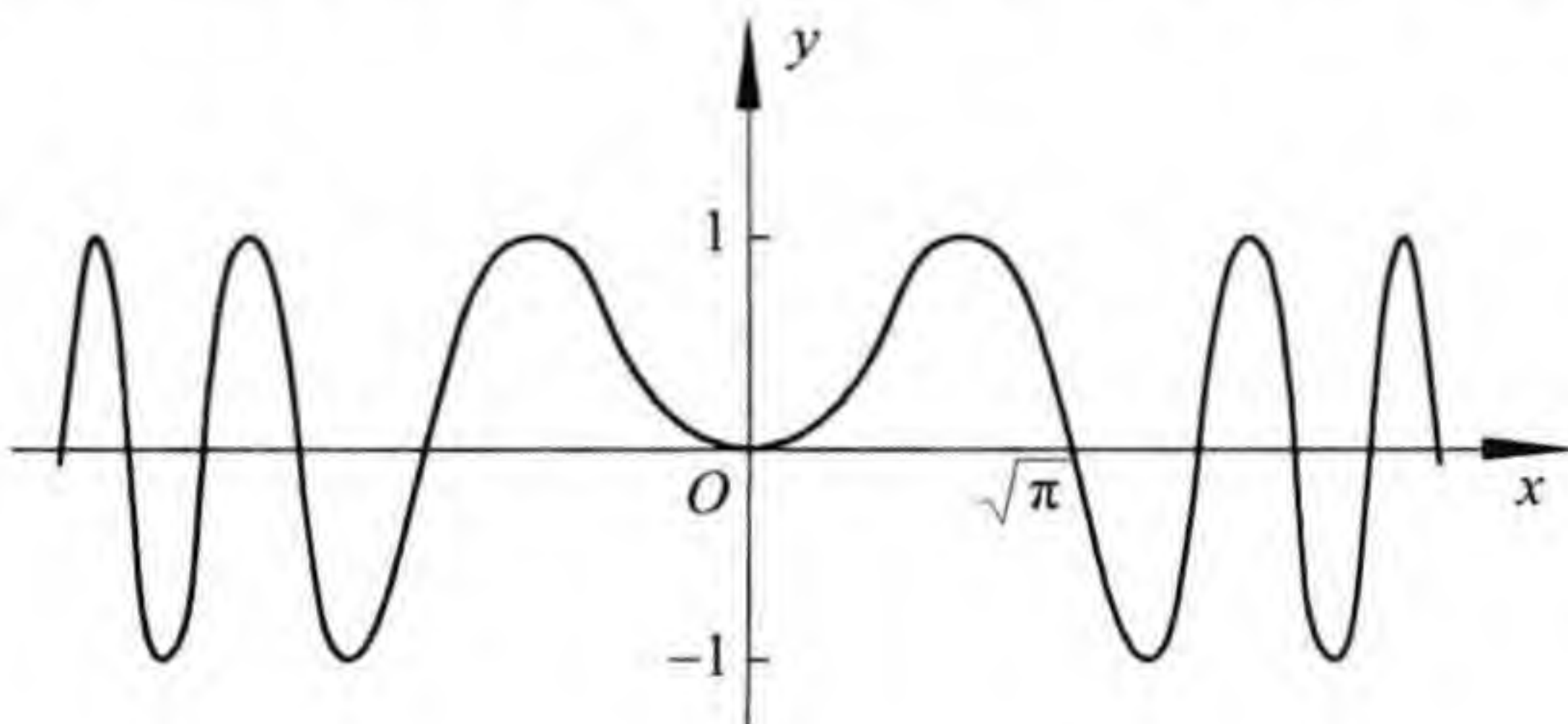


图 1.91

**【299】**  $y = \sin \frac{1}{x}$ .

**解题思路**  $-1 \leq y \leq 1$ .  $y=0$  为渐近线. 图像关于原点对称. 当  $x$  无限接近 0 时, 函数在 -1 与 1 之间摆动, 并且凝聚于原点  $O$ .

**解**  $-1 \leq y \leq 1$ .  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ ,  $y=0$  为渐近线.

当  $x$  由  $+\infty$  减小到  $\frac{2}{\pi}$  时, 则  $\frac{1}{x}$  由 0 增大到  $\frac{\pi}{2}$ , 而  $y$  由 0 增到 1; 但当  $x$  由  $\frac{2}{\pi}$  减小到  $\frac{2}{3\pi}$  时, 则  $\frac{1}{x}$  由  $\frac{\pi}{2}$  增大到  $\frac{3\pi}{2}$ , 而  $y$  由 1 减小到 -1. 当  $x = \frac{1}{\pi}$  时,  $y=0$  等. 因为  $y$  是奇函数, 故图像关于原点对称. 当  $x$  无限接近 0 时, 函数在 -1 与 1 之间摆动, 并且凝聚于  $O$  点, 而在点  $x=0$  处, 函数  $y$  没有定义. 如图 1.92 所示.

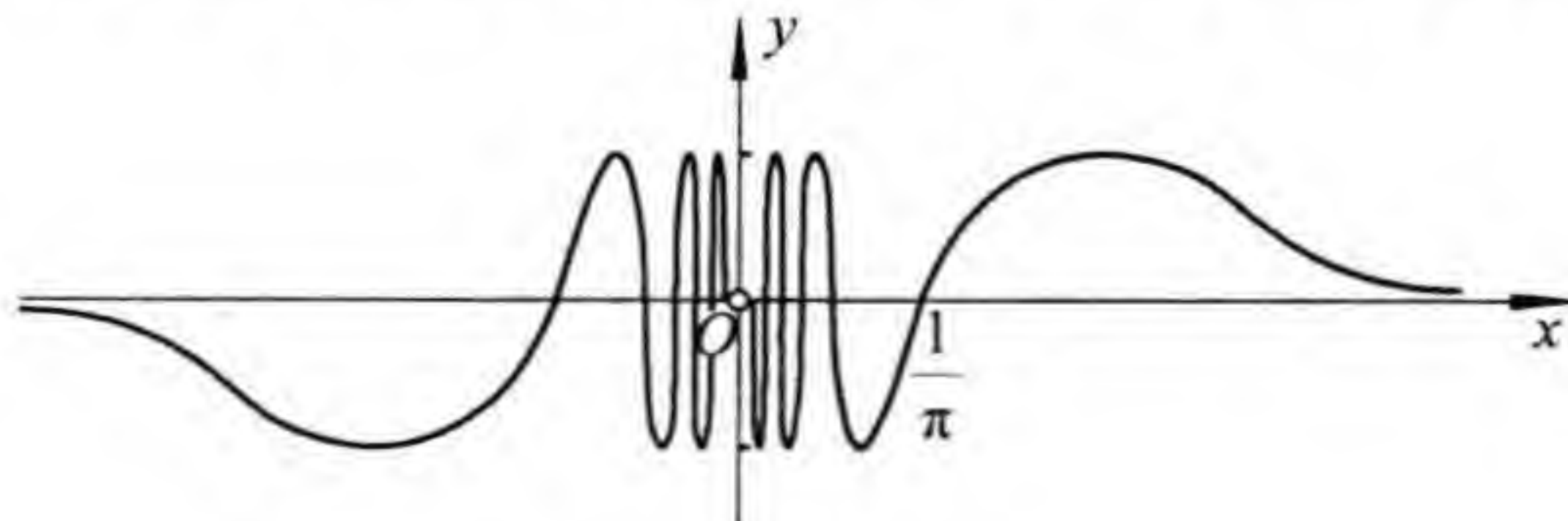


图 1.92



**【300】**  $y = x \cos \frac{\pi}{x}$ .

解  $-x \leq y \leq x$ .  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$ .

当  $x = \frac{2}{2k+1}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时,  $y=0$ .

当  $x > 2$  时,  $y$  单调增加, 因为  $y$  是奇函数, 故图像关于原点对称. 而在点  $x=0$  处, 函数  $y$  没有定义.

当  $x$  无限接近 0 时, 函数作无限次衰减摆动, 并凝聚于  $O$  点, 如图 1.93 所示.

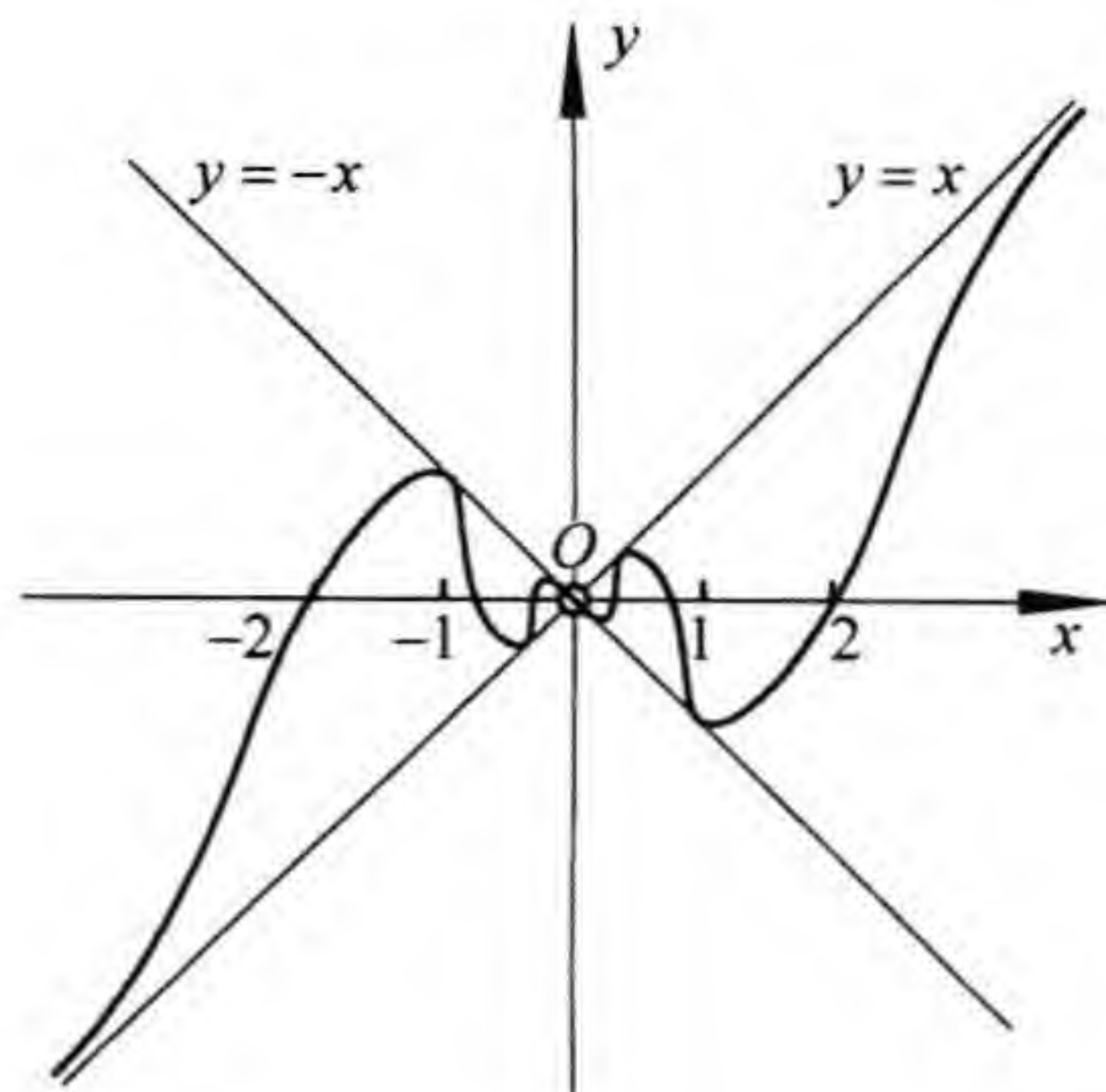


图 1.93

**【301】**  $y = \tan \frac{\pi}{x}$ .

解 当  $x = \frac{1}{k}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时,  $y=0$ .

当  $x \rightarrow \frac{2}{2k+1}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时,  $y \rightarrow \infty$ .

当  $x > 2$  时,  $y > 0$ , 且当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow 0$ . 因为  $y$  为奇函数, 故图像关于原点对称.

当  $x \rightarrow 0$  时, 图像凝聚于  $O$  点, 而在点  $x = \frac{2}{2k+1}$  及 0 处, 函数  $y$  是没有定义的.

如图 1.94 所示.

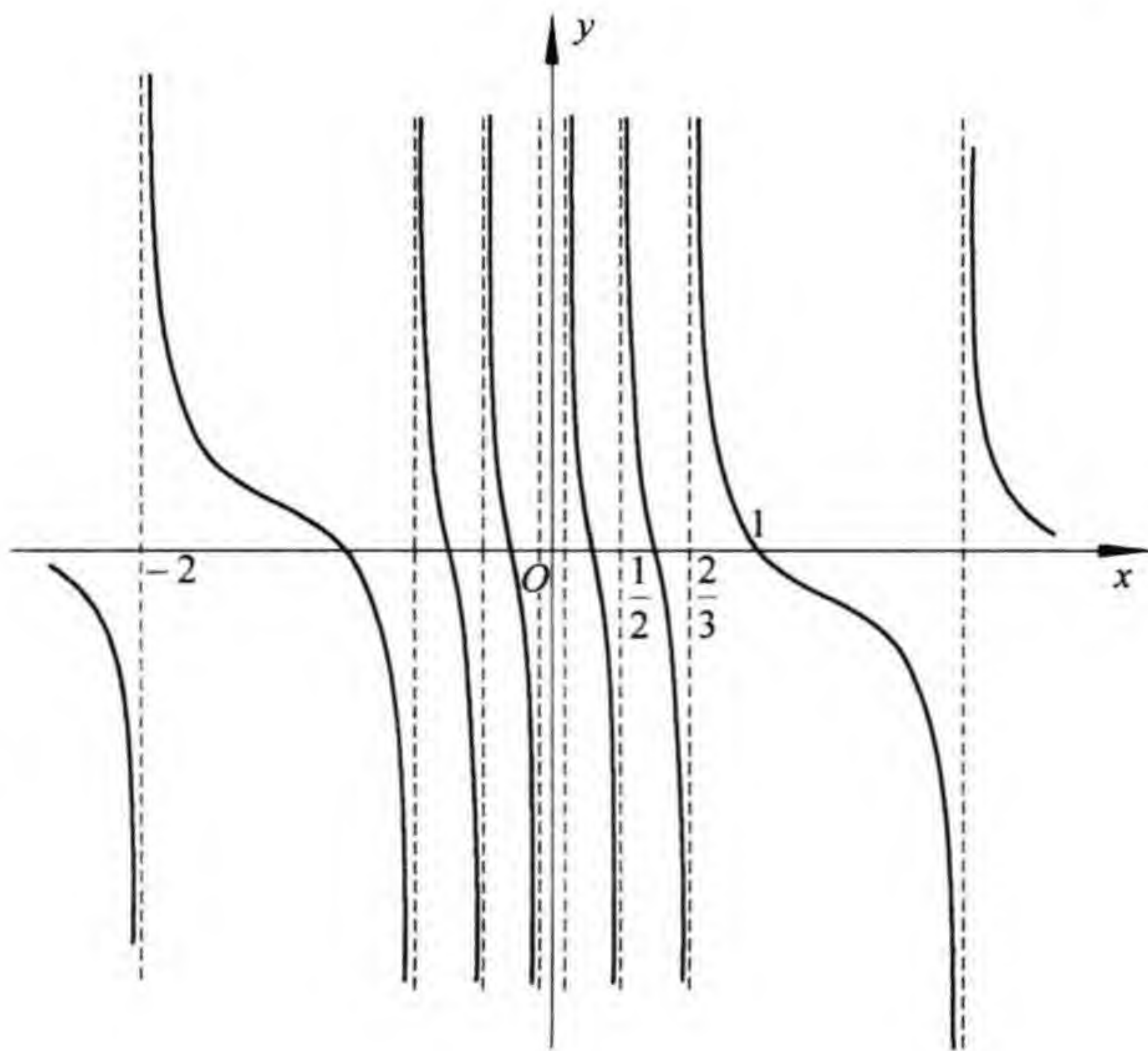


图 1.94

**【302】**  $y = x \left( 2 + \sin \frac{1}{x} \right)$ .

解 先作  $y = x \sin \frac{1}{x}$  的图像. 因为  $y$  为偶函数, 故图像关于  $Oy$  轴对称.

当  $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时,  $y = \pm x$ . 当  $x = \frac{1}{k\pi}$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时,  $y=0$ .

当  $x > \frac{2}{\pi}$  时,  $y$  单调增加, 且有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1^{+}.$$



如图 1.95 所示(在点  $x=0$  处无定义).

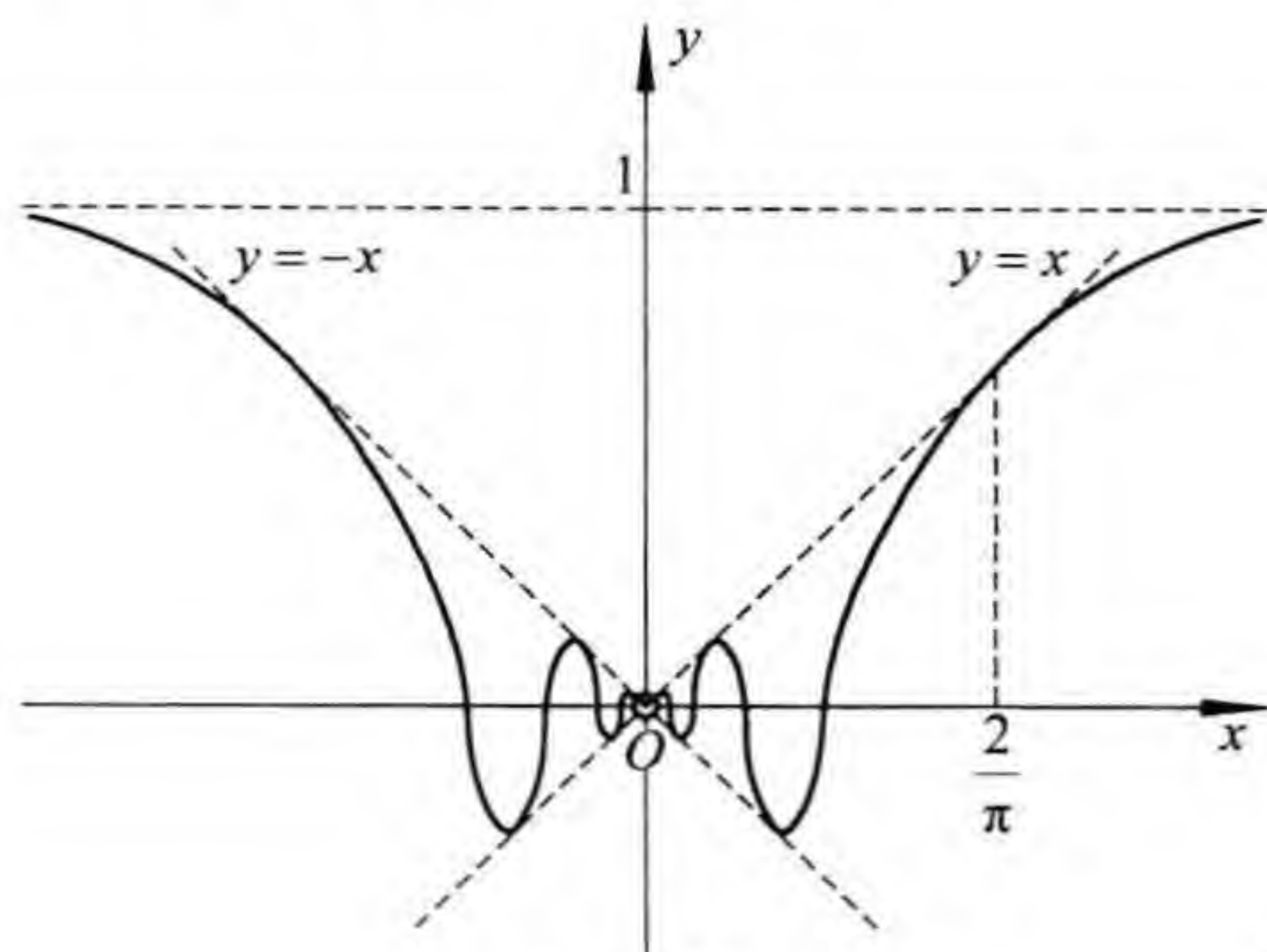


图 1.95

其次,再将函数  $y=2x$  及  $y=x\sin\frac{1}{x}$  的图像“叠加”,即得

$$y=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$$

的图像,如图 1.96 所示.

\* ) 此结果参看本章 § 5.

**【303】**  $y=\pm\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{x}$ .

解 图像关于原点及  $Oy$  轴,  $Ox$  轴均对称,由于

$$-\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\quad(|x|\leq 1),$$

故图像位于圆  $x^2+y^2=1$  内.

将函数  $y=\pm\sqrt{1-x^2}$  与  $y=\sin\frac{\pi}{x}$  的纵坐标对应相乘,即可

描出所求的图像.

如图 1.97 所示.

**【304】**  $y=\frac{\sin x}{x}$ .

解  $\lim_{x\rightarrow 0}y=1$ ,  $\lim_{x\rightarrow\infty}y=0$ .

由于  $|y|\leq\frac{1}{|x|}$ ,故图像在  $y=-\frac{1}{x}$  及  $y=\frac{1}{x}$  之间.又图像关于  $Oy$  轴对称.当  $x=k\pi$  时,  $y=0$  ( $k=\pm 1, \pm 2, \dots$ ).

如图 1.98 所示.

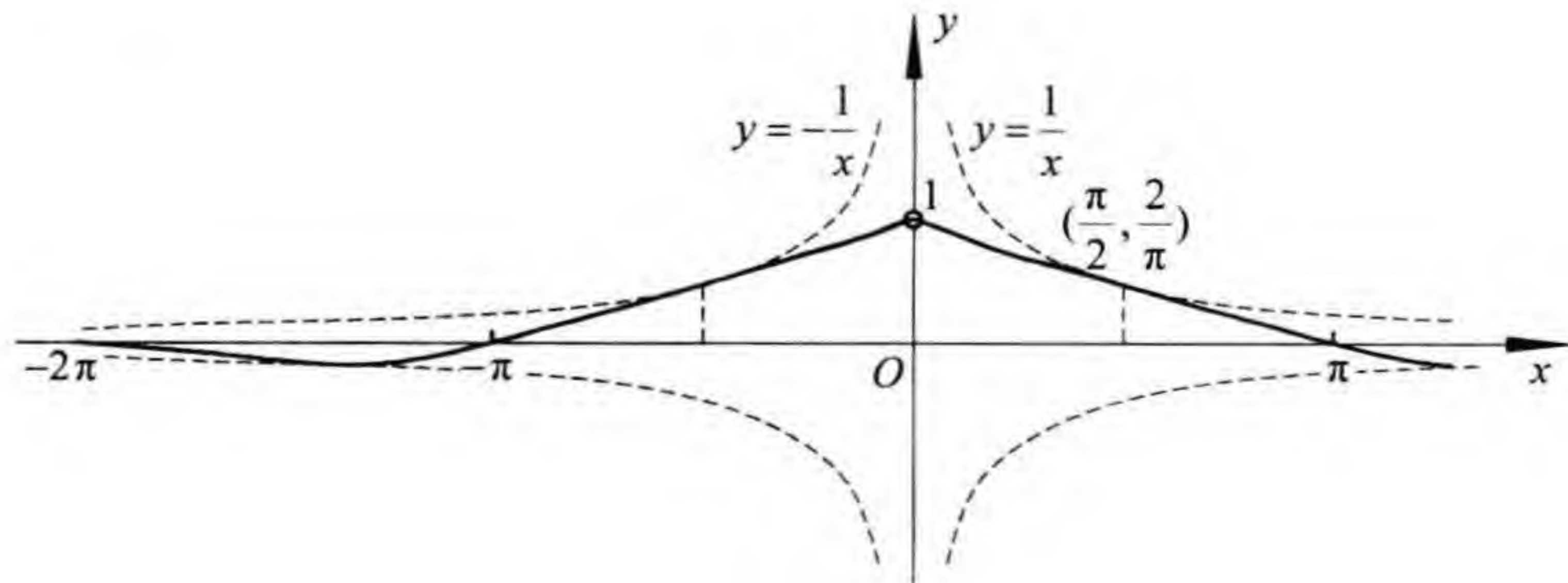


图 1.98

**【305】**  $y=e^x\cos x$ .

解 由于  $-e^x\leq y\leq e^x$ ,故图像在  $y=e^x$  及  $y=e^{-x}$  之间.

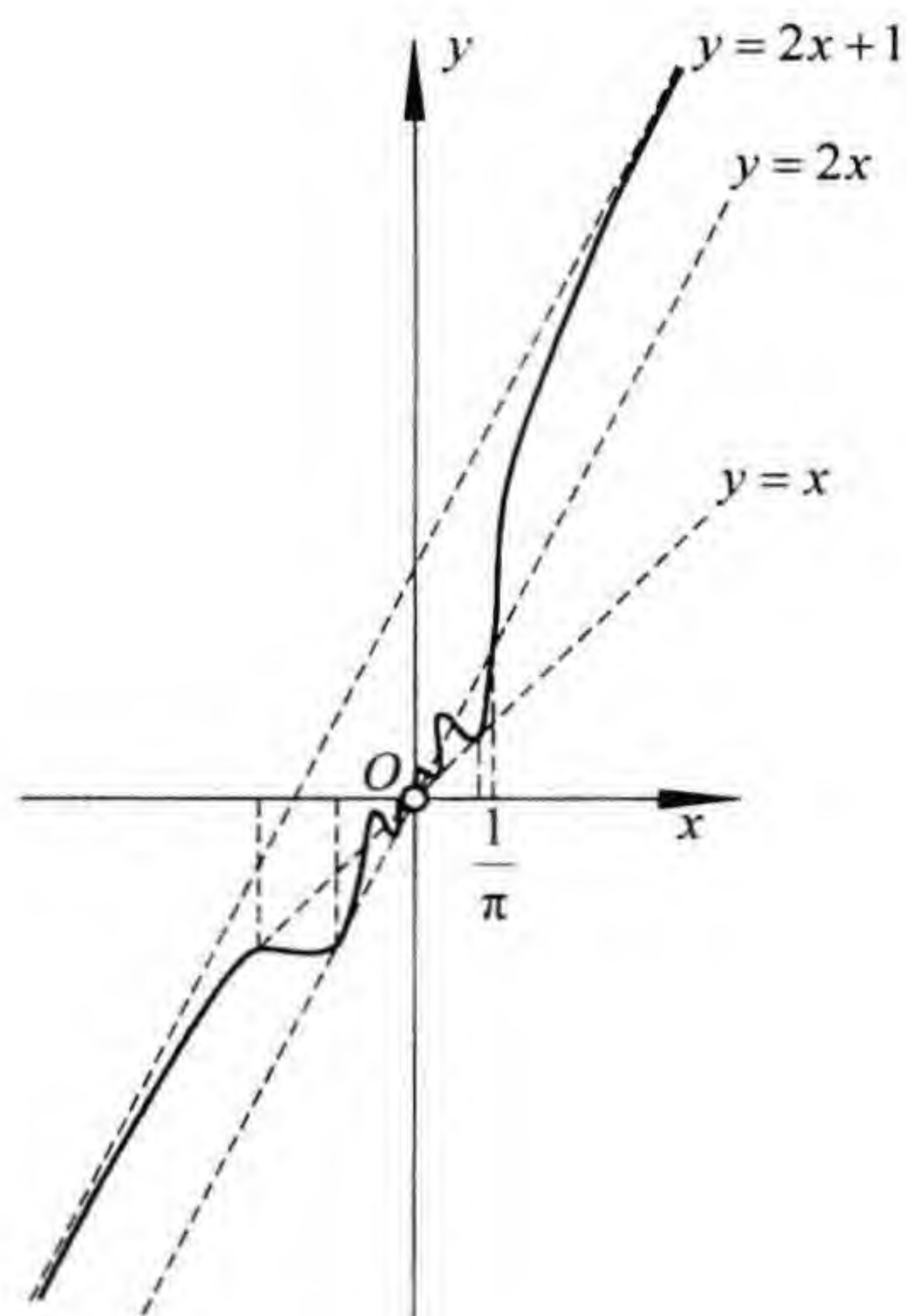


图 1.96

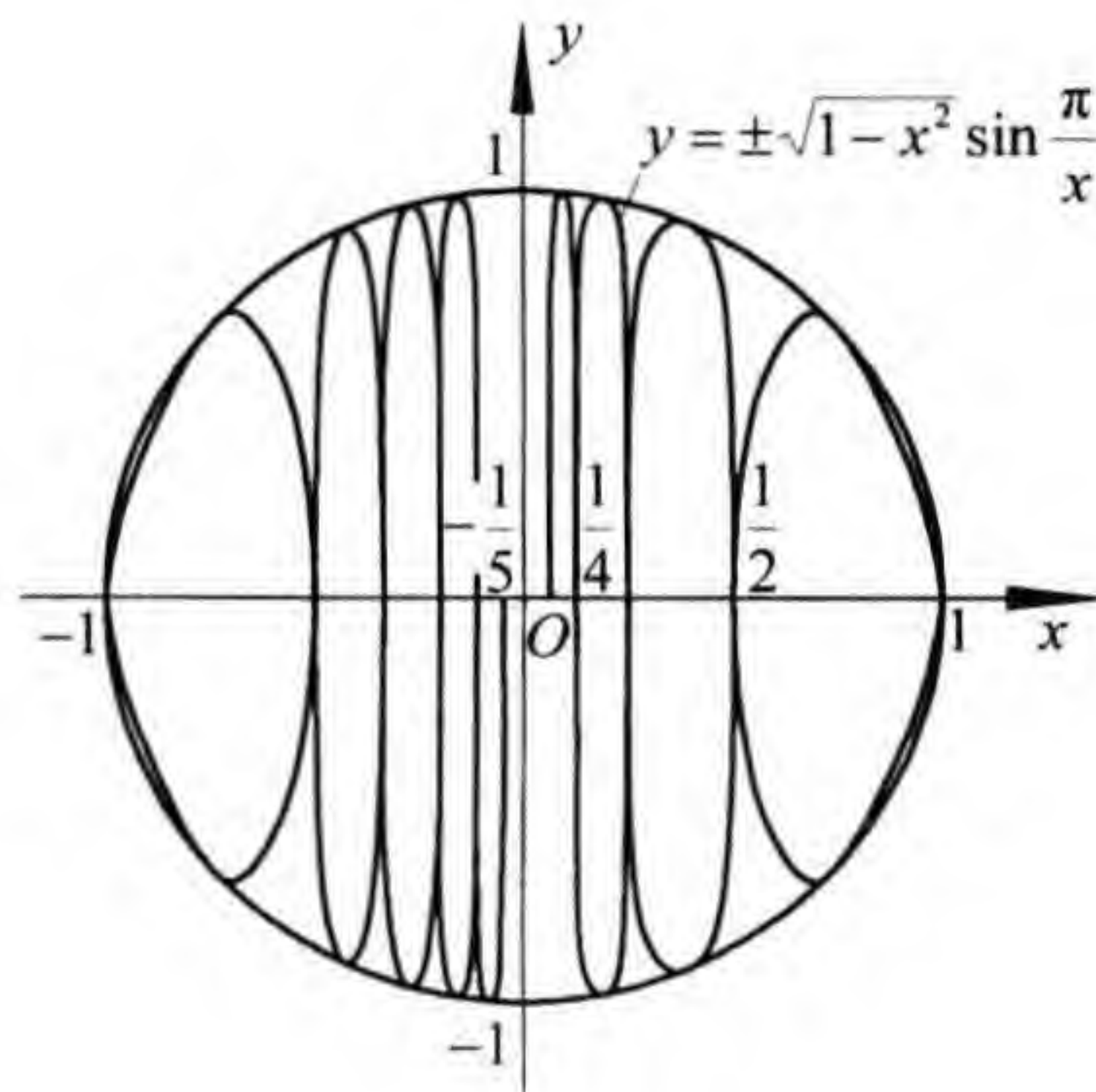


图 1.97



当  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时,  $y=0$ . 且  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y=0$ , 但  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \cos x$  却不存在.

如图 1.99 所示.

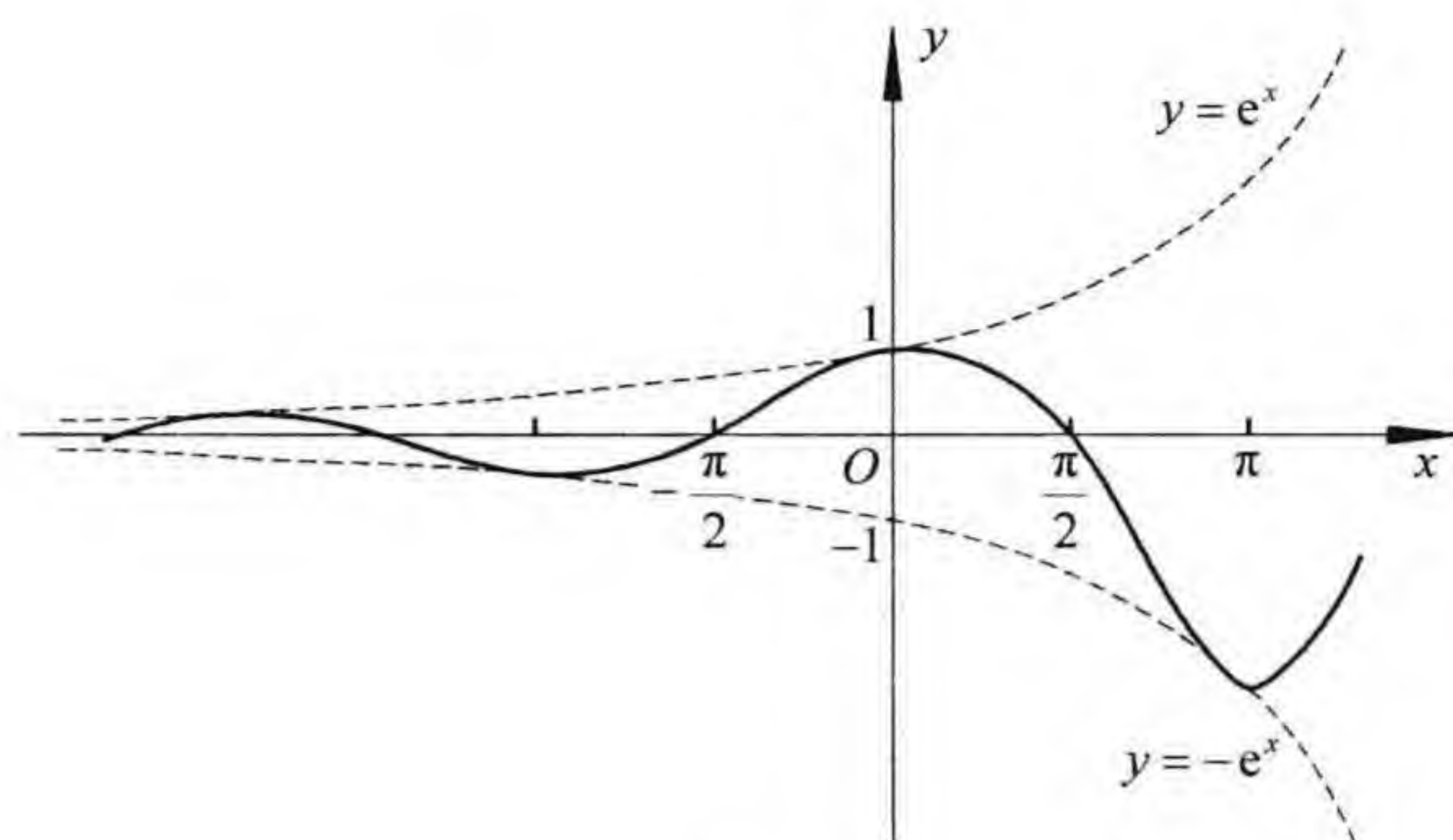


图 1.99

**【306】**  $y = \pm 2^{-x} \sqrt{\sin \pi x}$ .

解 当  $2k \leq x \leq (2k+1)$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时,  $y$  值才确定. 当  $x = 2k + \frac{1}{2}$  时,  $y = \pm 2^{-x}$ .

图像关于  $Ox$  轴对称.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y=0$ , 而  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$  不存在. 如图 1.100 所示.

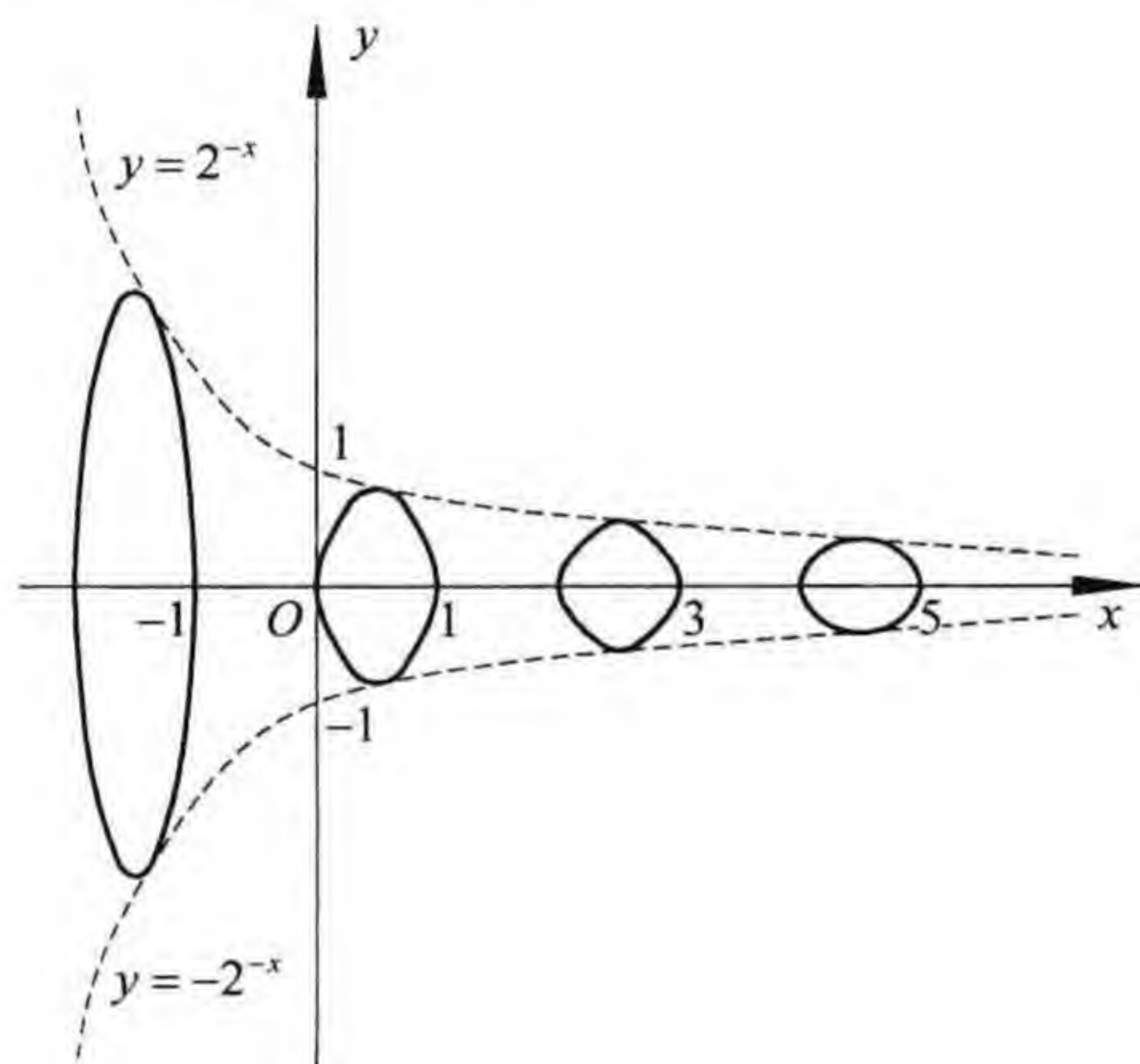


图 1.100

**【307】**  $y = \frac{\cos x}{1+x^2}$ .

解  $-\frac{1}{1+x^2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}$ , 图像在  $y = -\frac{1}{1+x^2}$  及  $y = \frac{1}{1+x^2}$  之间, 且关于  $Oy$  轴对称.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} y = 1.$$

如图 1.101 所示.

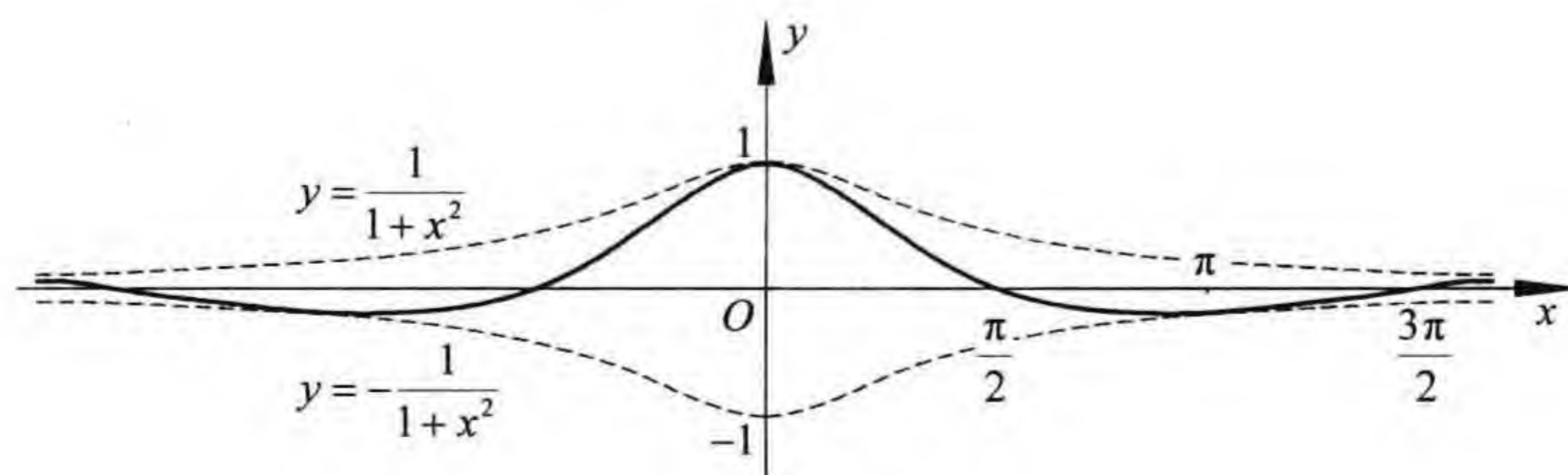


图 1.101



**【308】**  $y = \ln(\cos x)$ .

解 存在域是使  $\cos x > 0$  的开区间  $\left((4k-1)\frac{\pi}{2}, (4k+1)\frac{\pi}{2}\right)$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 的全体. 函数  $y$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数. 在区间  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  内,  $y$  单调增加, 且  $y < 0$ . 在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  内,  $y$  单调减小,  $y < 0$ , 最大值是  $y = \ln \cos 0 = 0$ .

又  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} y = -\infty$ . 如图 1.102 所示.

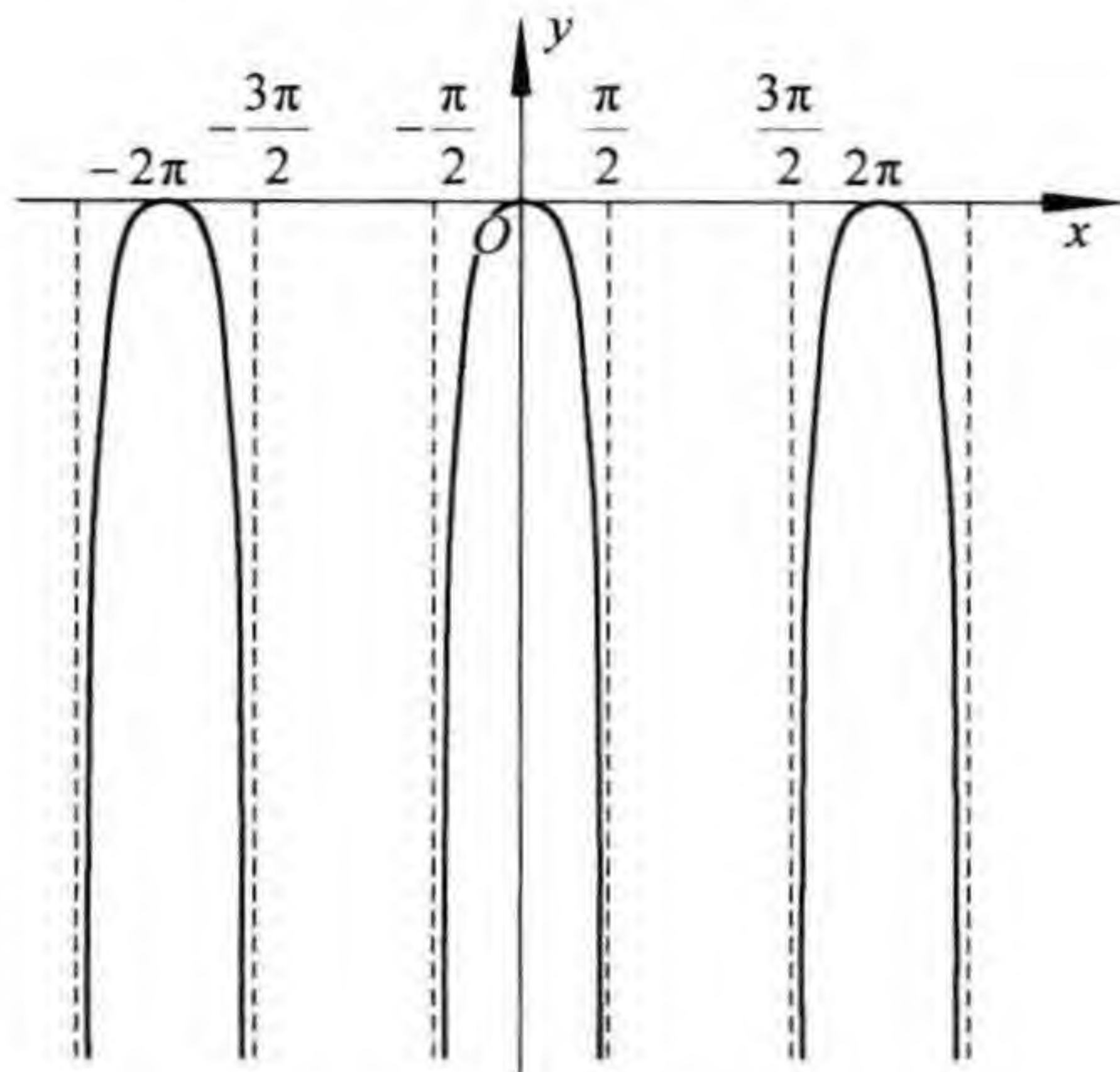


图 1.102

**【309】**  $y = \cos(\ln x)$ .

解 存在域为数  $x > 0$  的全体.

当  $x = e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时,  $y=0$ . 当  $x = e^{2k\pi}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时,  $y=1$ ;

而当  $x = e^{(2k+1)\pi}$  时,  $y=-1$ . 图像始终在直线  $y=-1$  和  $y=1$  之间摆动, 而且越靠近原点时, 摆动越密. 如图 1.103 所示. (两轴所取的单位不一致).

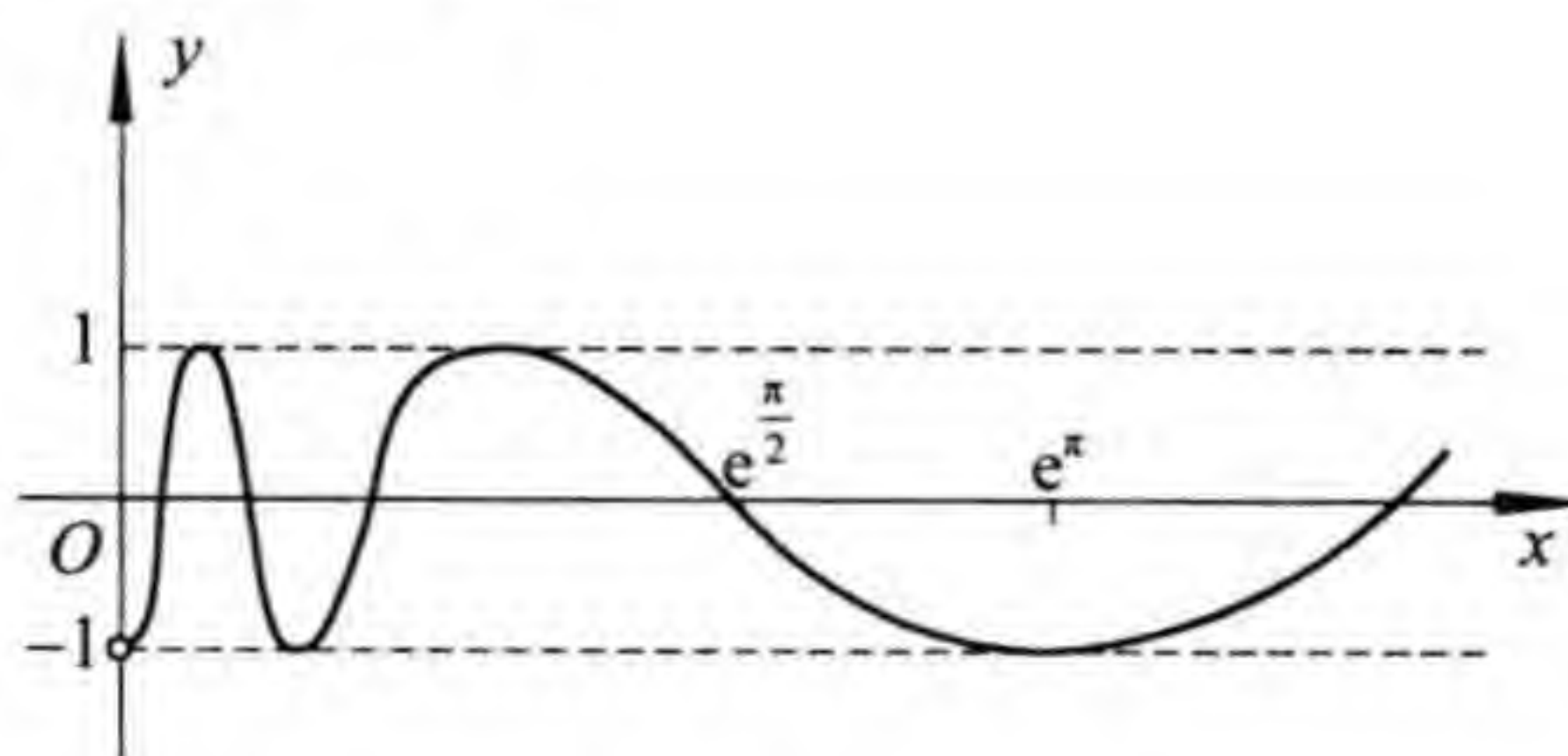


图 1.103

**【310】**  $y = e^{\frac{1}{\sin x}}$ .

解  $y > 0$ . 函数  $y$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数.

当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $y$  单调减少; 当  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  时,  $y$  单调增加. 又有

$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow \pi-0} y = +\infty$ .  $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$  为区间  $(0, \pi)$  内函数  $y$  的最小值.

同理,  $x$  由  $\pi$  到  $\frac{3\pi}{2}$  时,  $y$  由 0 增到  $\frac{1}{e}$ ; 而  $x$  由  $\frac{3\pi}{2}$  到  $2\pi$  时,  $y$  由

$\frac{1}{e}$  减到 0.  $\lim_{x \rightarrow \pi+0} y = \lim_{x \rightarrow 2\pi-0} y = 0$ .

如图 1.104 所示.

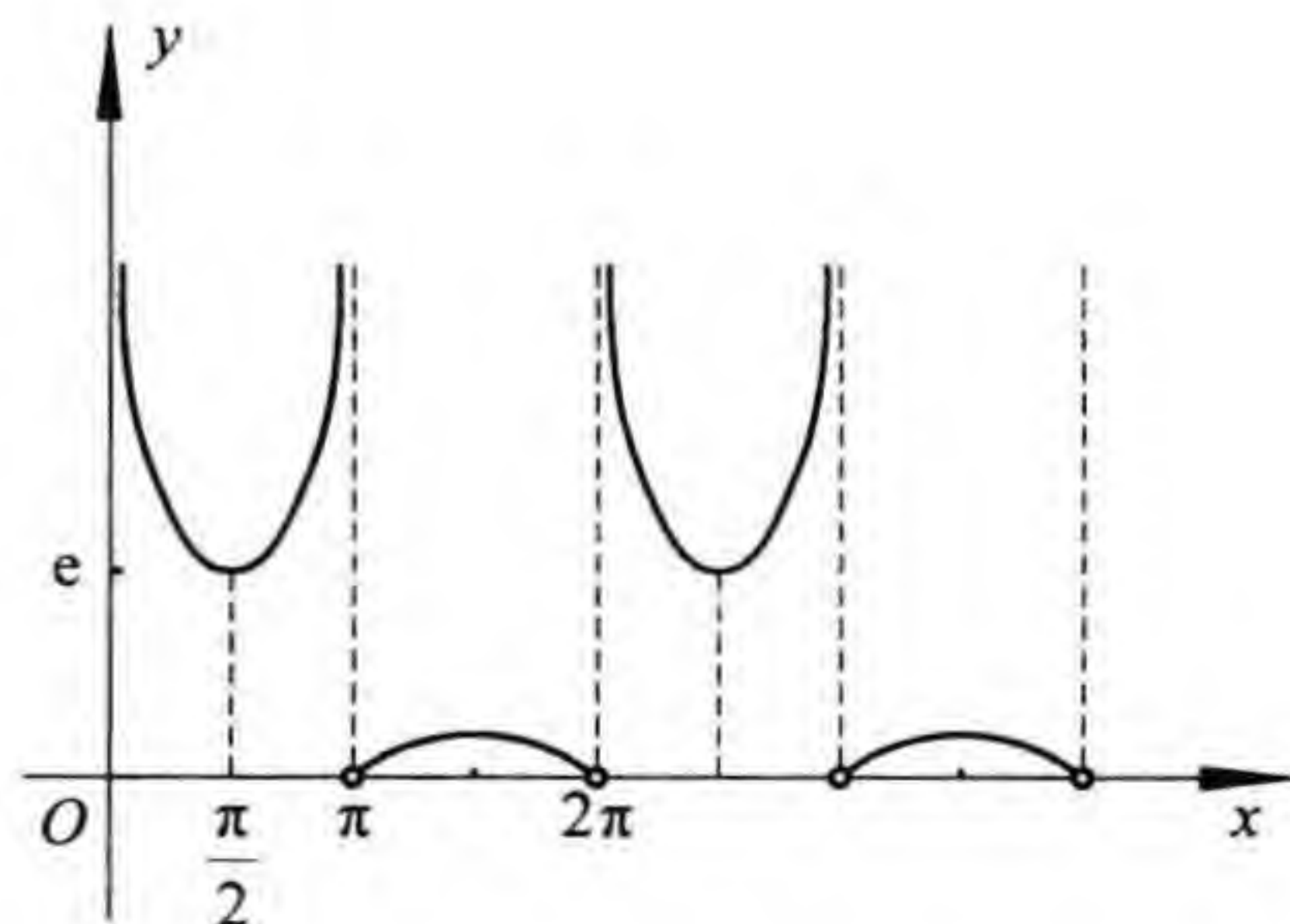


图 1.104



作下列反三角函数的图像：

【311】  $y = \arcsin x$ .

解 如图 1.105 所示的 AB 段曲线.

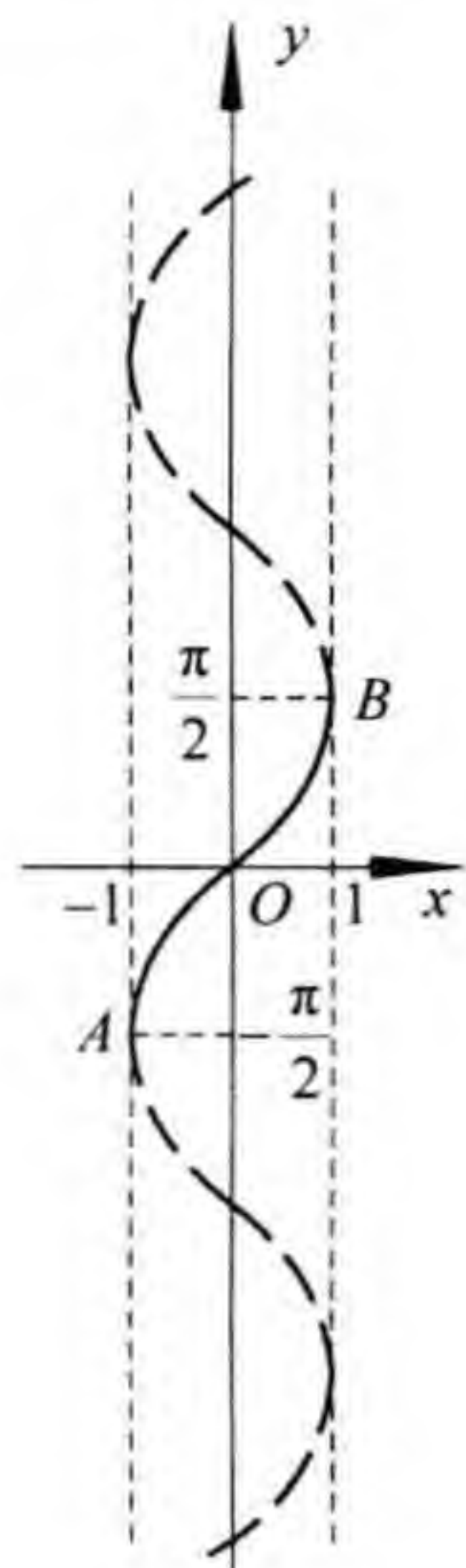


图 1.105

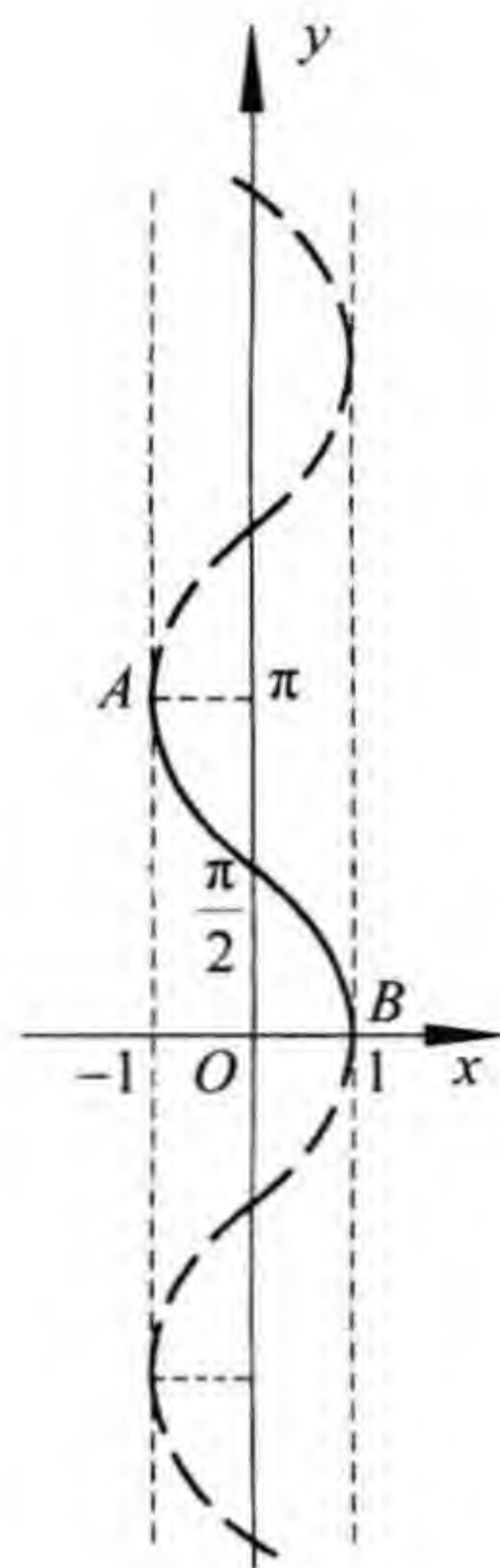


图 1.106

【312】  $y = \arccos x$ .

解 如图 1.106 所示的 AB 段曲线.

【313】  $y = \arctan x$ .

解 如图 1.107 所示的 AB 段曲线.

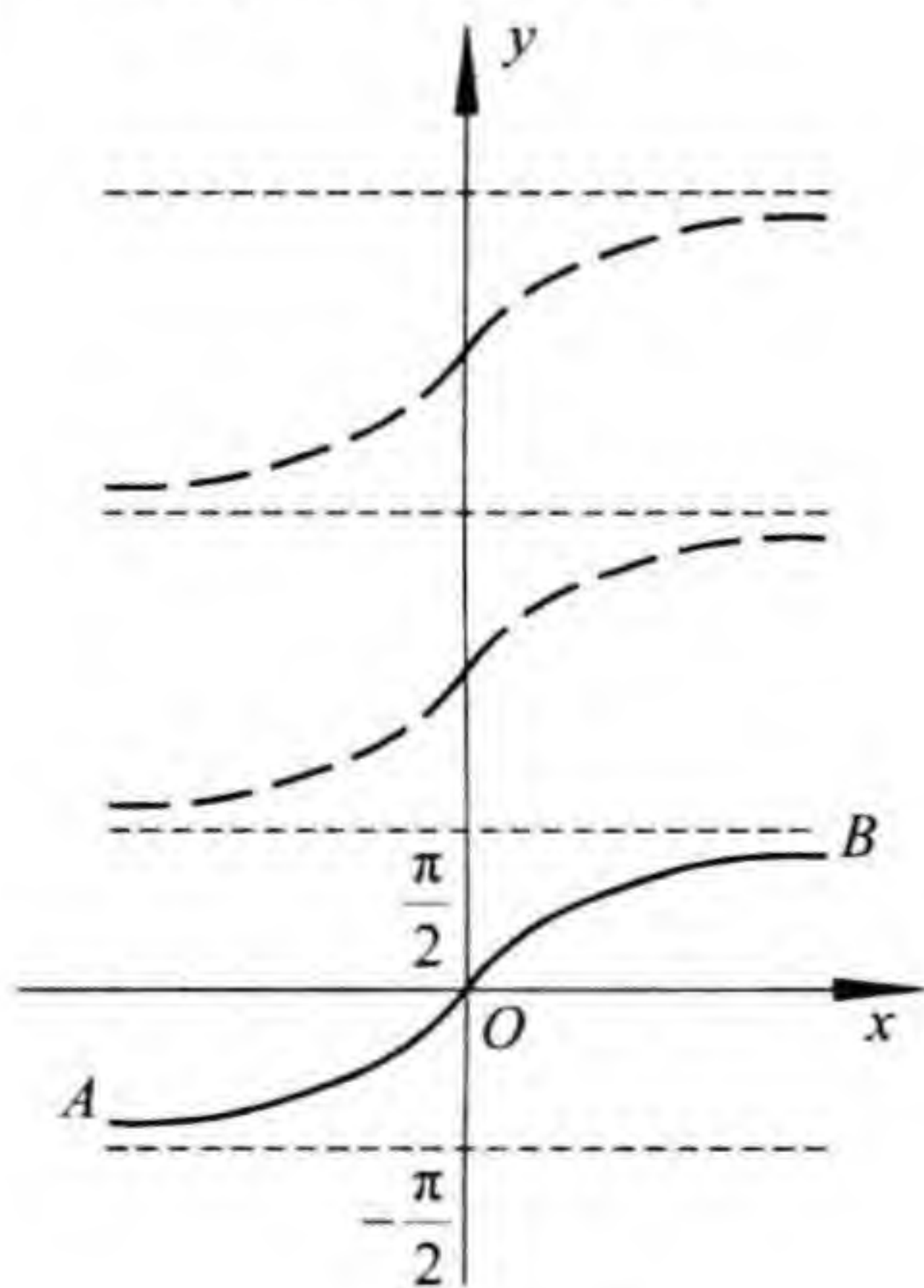


图 1.107

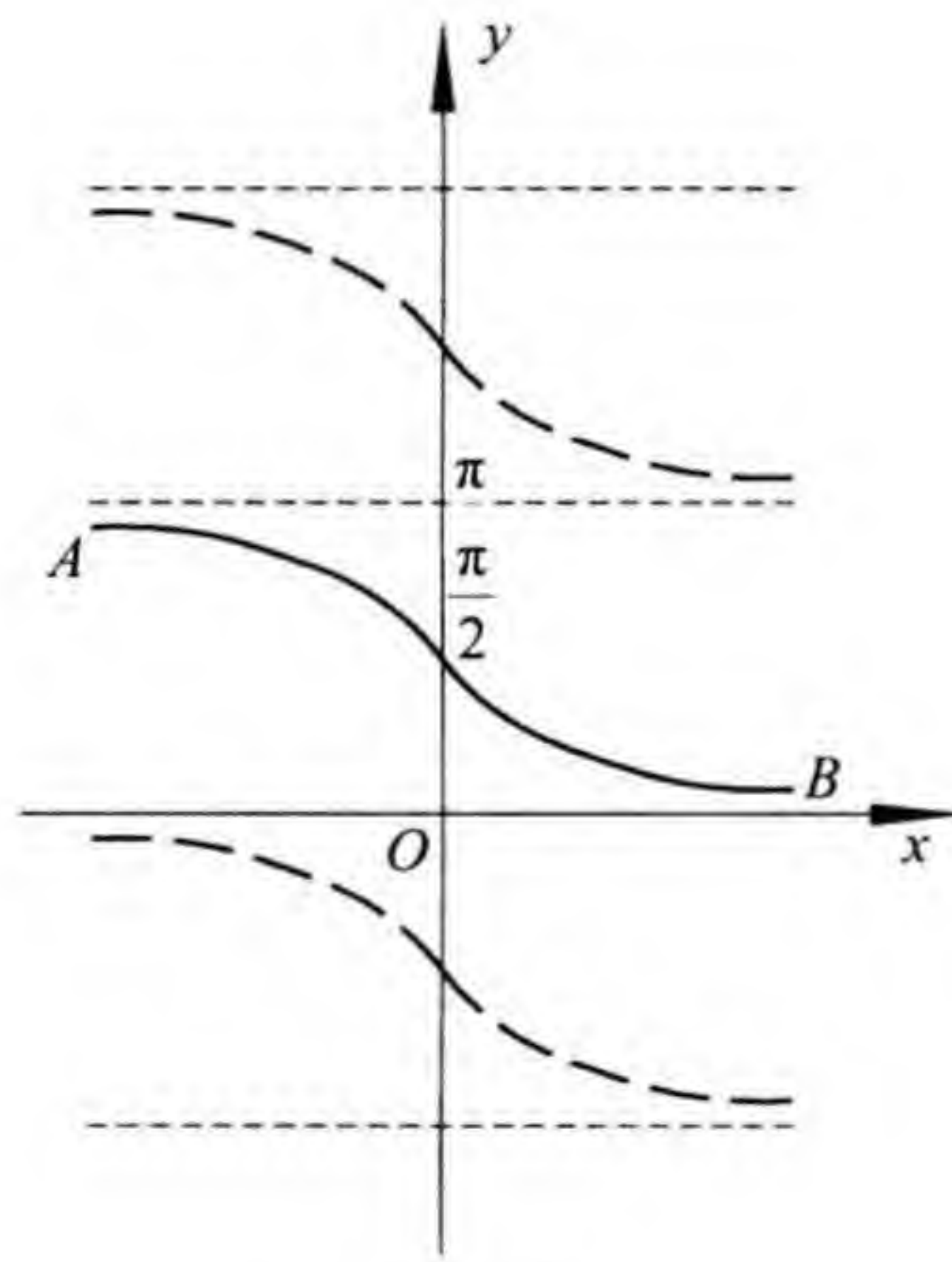


图 1.108

【314】  $y = \operatorname{arccot} x$ .

解 如图 1.108 所示的 AB 段曲线.

【315】  $y = \arcsin \frac{1}{x}$ .

解 图像关于原点对称. 存在域是区间  $(-\infty, -1]$  和  $[1, +\infty)$ .

当  $1 \leq x < +\infty$  时, 由于  $\frac{1}{x}$  单调减少, 所以,  $y$  也是减函数, 且有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \frac{\pi}{2} = y|_{x=1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0.$$



如图 1.109 所示.

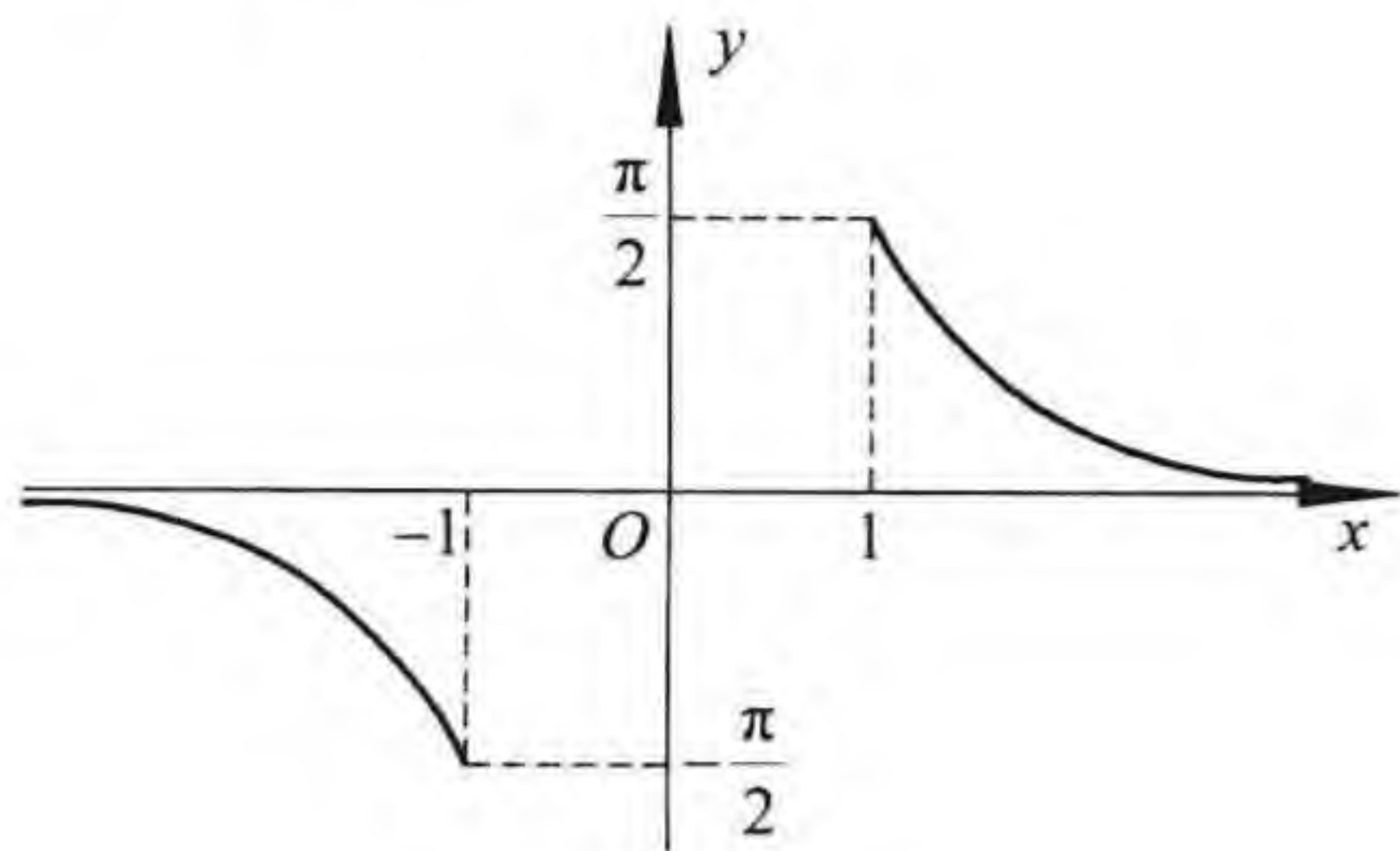


图 1.109

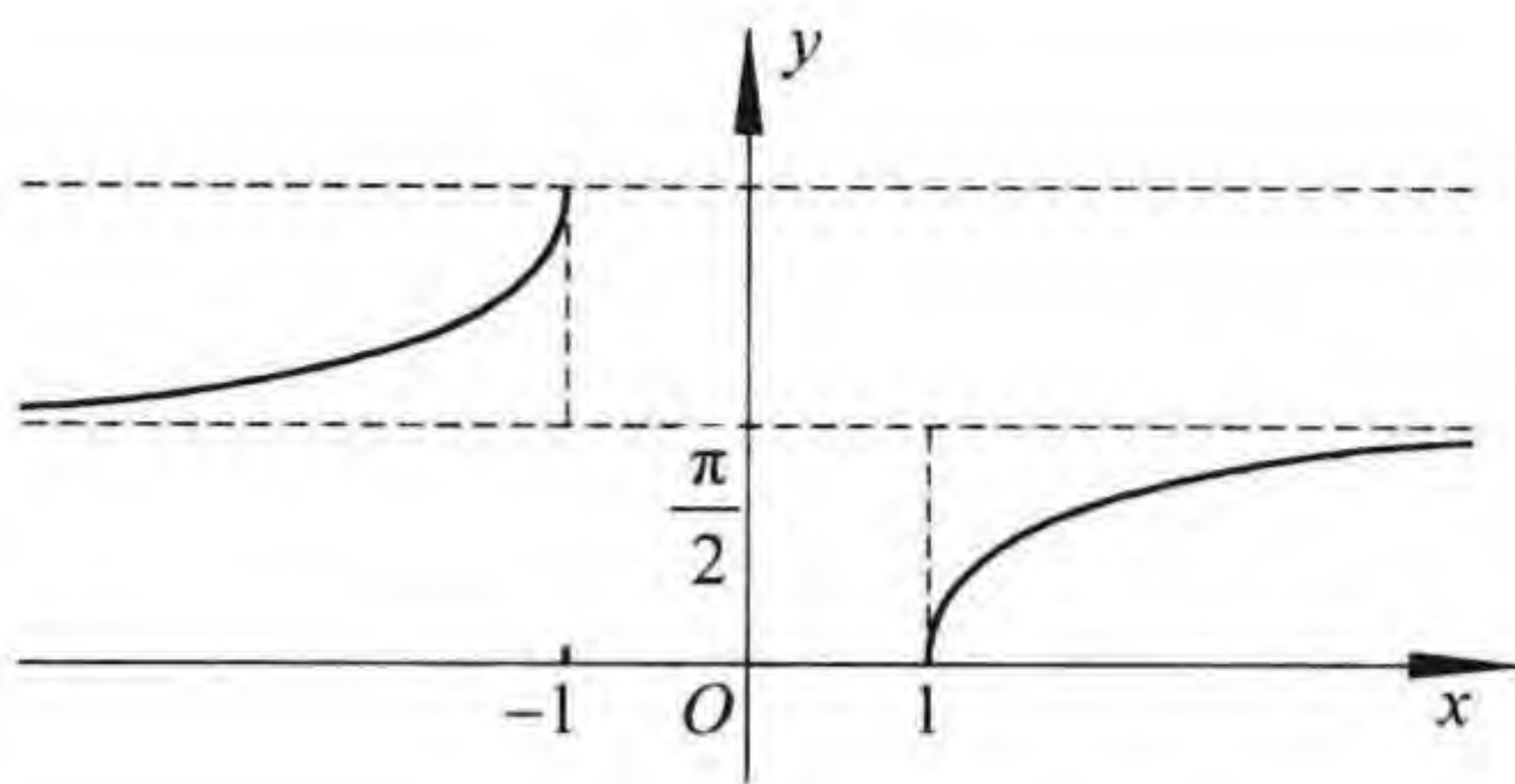


图 1.110

**【316】**  $y = \arccos \frac{1}{x}$ .

**解** 存在域是区间  $(-\infty, -1]$  和  $[1, +\infty)$ .

当  $1 \leq x < +\infty$  时, 由于  $\frac{1}{x}$  单调减少, 所以,  $y$  是增函数, 且有  $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{\pi}{2}$ .

同理, 当  $-\infty < x \leq -1$  时,  $y$  单调增加; 且有  $\lim_{x \rightarrow -1-0} y = \pi$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{\pi}{2}$ .

如图 1.110 所示.

**【317】**  $y = \arctan \frac{1}{x}$ .

**解** 图像关于原点对称.

当  $x > 0$  时, 由于  $\frac{1}{x}$  单调减少, 所以,  $y$  是减函数, 且有

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0.$$

如图 1.111 所示.

**【318】**  $y = \arcsin(\sin x)$ .

**提示** 注意, 当  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  时,

$$y = x - 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

当  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$  时,  $y = (\pi - x) + 2k\pi$ .

**解**  $\sin y = \sin x$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .

因此, 当  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  时,  $y = x$ ; 当  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$  时,  $y = \pi - x$ ; 当  $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$  时,  $y = x - 2\pi$ .

一般地, 当  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  时,

$$y = x - 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

而当  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$  时,

$$y = (\pi - x) + 2k\pi.$$

如图 1.112 所示.

**【319】**  $y = \arcsin(\cos x)$ .

**提示** 注意, 当  $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$  时,  $y = \left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ .

当  $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$  时,  $y = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi$ .

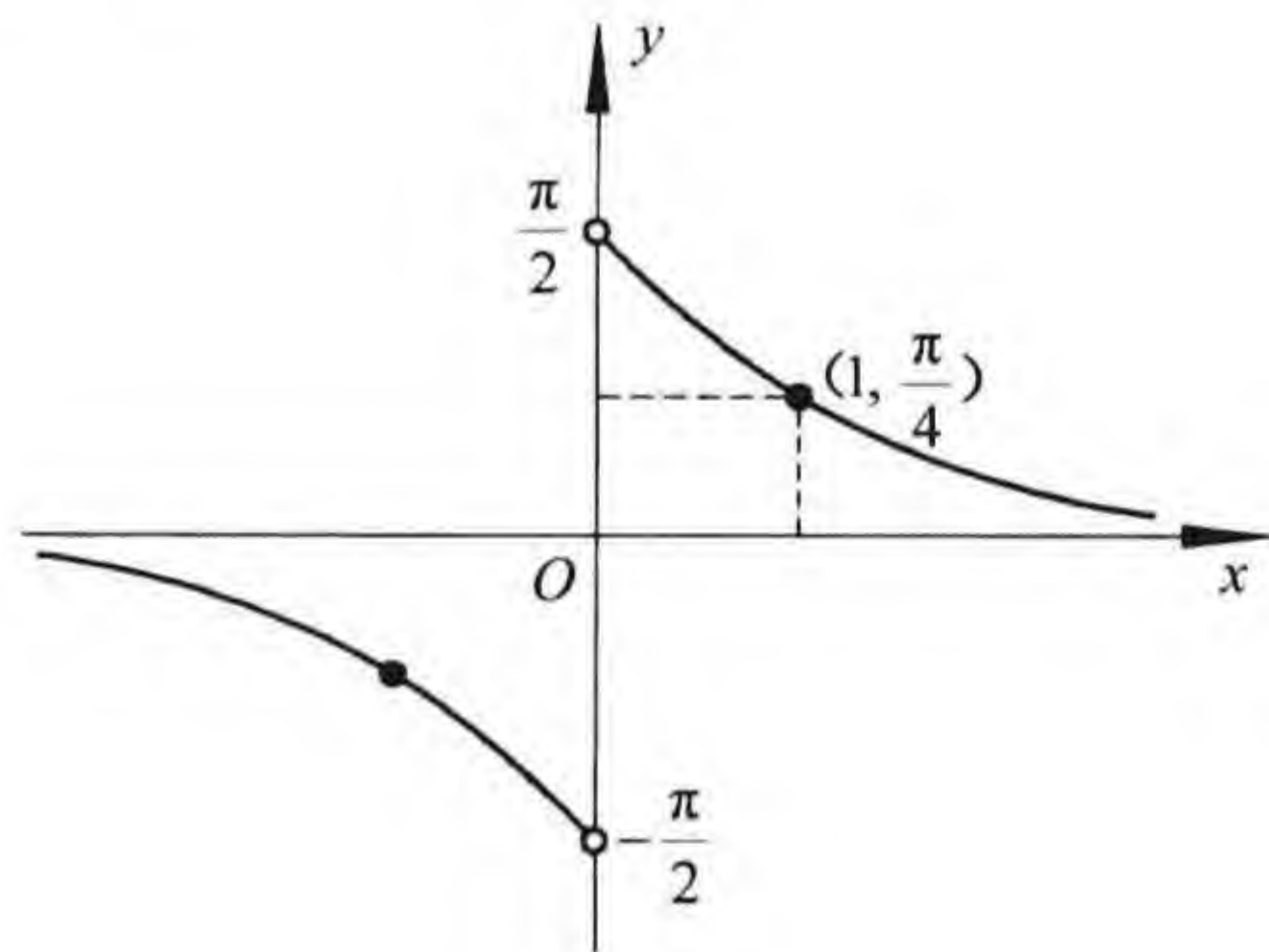


图 1.111

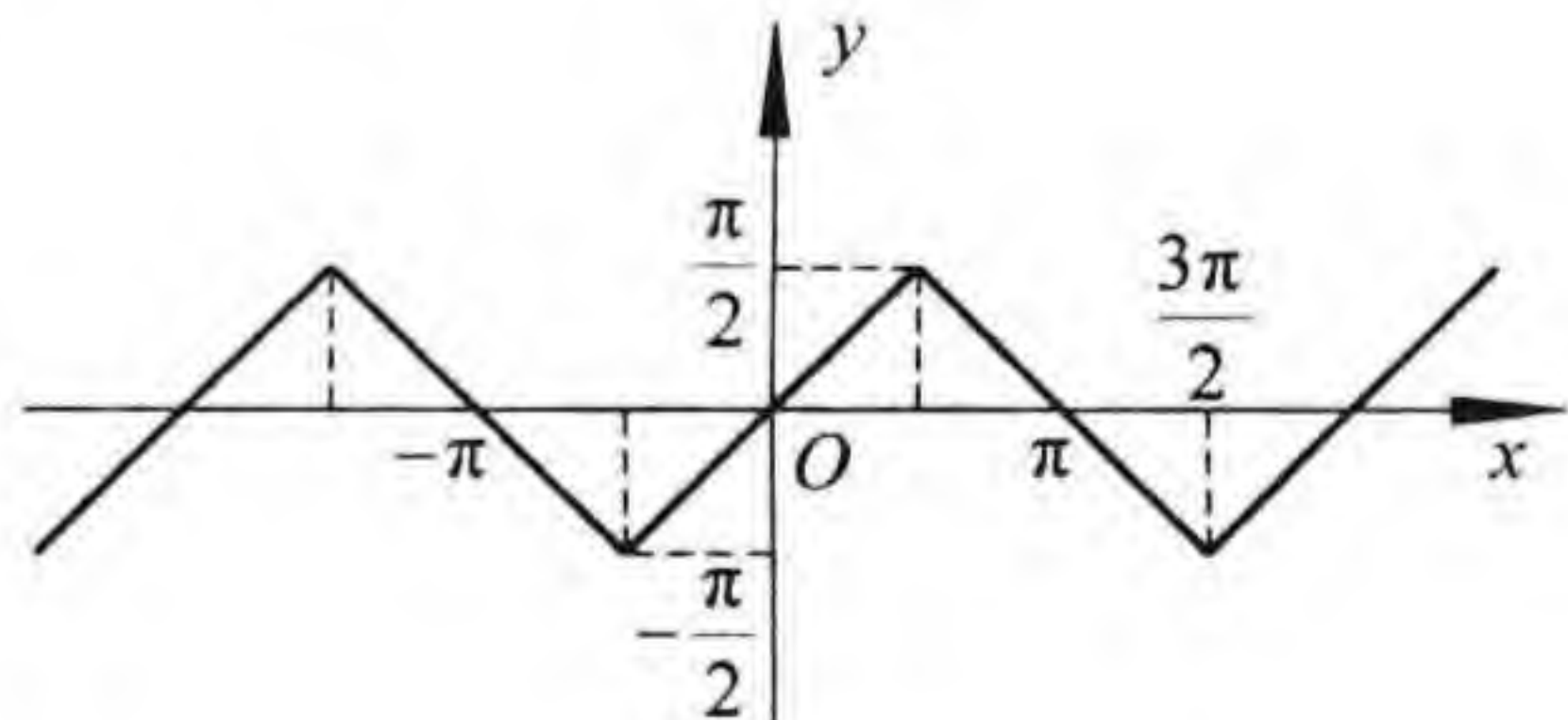


图 1.112



解  $\sin y = \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .

因此, 当  $-\pi \leq x \leq 0$  时,  $y = \frac{\pi}{2} + x$ ;

当  $0 \leq x \leq \pi$  时,  $y = \frac{\pi}{2} - x$ ;

一般地, 当  $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$  时,

$$y = \left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

而当  $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$  时,  $y = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi$ .

如图 1.113 所示.

【320】  $y = \arccos(\cos x)$ .

解  $\cos y = \cos x, 0 \leq y \leq \pi$ .

因此, 当  $0 \leq x \leq \pi$  时,  $y = x$ ; 当  $\pi \leq x \leq 2\pi$  时,  $y = 2\pi - x$ ;

当  $-\pi \leq x \leq 0$  时,  $y = -x$ .

一般地, 当  $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$  时,

$$y = -x + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

而当  $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$  时,  $y = x - 2k\pi$ .

如图 1.114 所示.

【321】  $y = \arctan(\tan x)$ .

解  $\tan y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ .

因此, 当  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $y = x$ ;

当  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$  时,  $y = x - \pi$ ;

当  $-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$  时,  $y = \pi + x$ .

一般地, 当  $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$  时,  $y = x - k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ .

如图 1.115 所示.

【322】  $y = \arcsin(2\sin x)$ .

解  $\sin y = 2\sin x, \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$ .

存在域为区间  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right], \dots$  的全体.

即  $\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  的全体.

利用复合函数作图法得其图像, 如图 1.116 所示, 它关于原点对称.

【323】 设: (1)  $y_1 = 1 - \frac{x}{2}$ ; (2)  $y_1 = \frac{2x}{1+x^2}$ ; (3)  $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$ ; (4)  $y_1 = e^x$ .

作函数  $y = \arcsin y_1$  的图像.

解 (1) 存在域为满足不等式  $0 \leq x \leq 4$  的数  $x$  的集合. 当  $0 \leq x \leq 2$  时,  $y$  由  $\frac{\pi}{2}$  减少到 0; 而当  $2 \leq x \leq 4$

时,  $y$  由 0 减少到  $-\frac{\pi}{2}$ . 如图 1.117 所示.

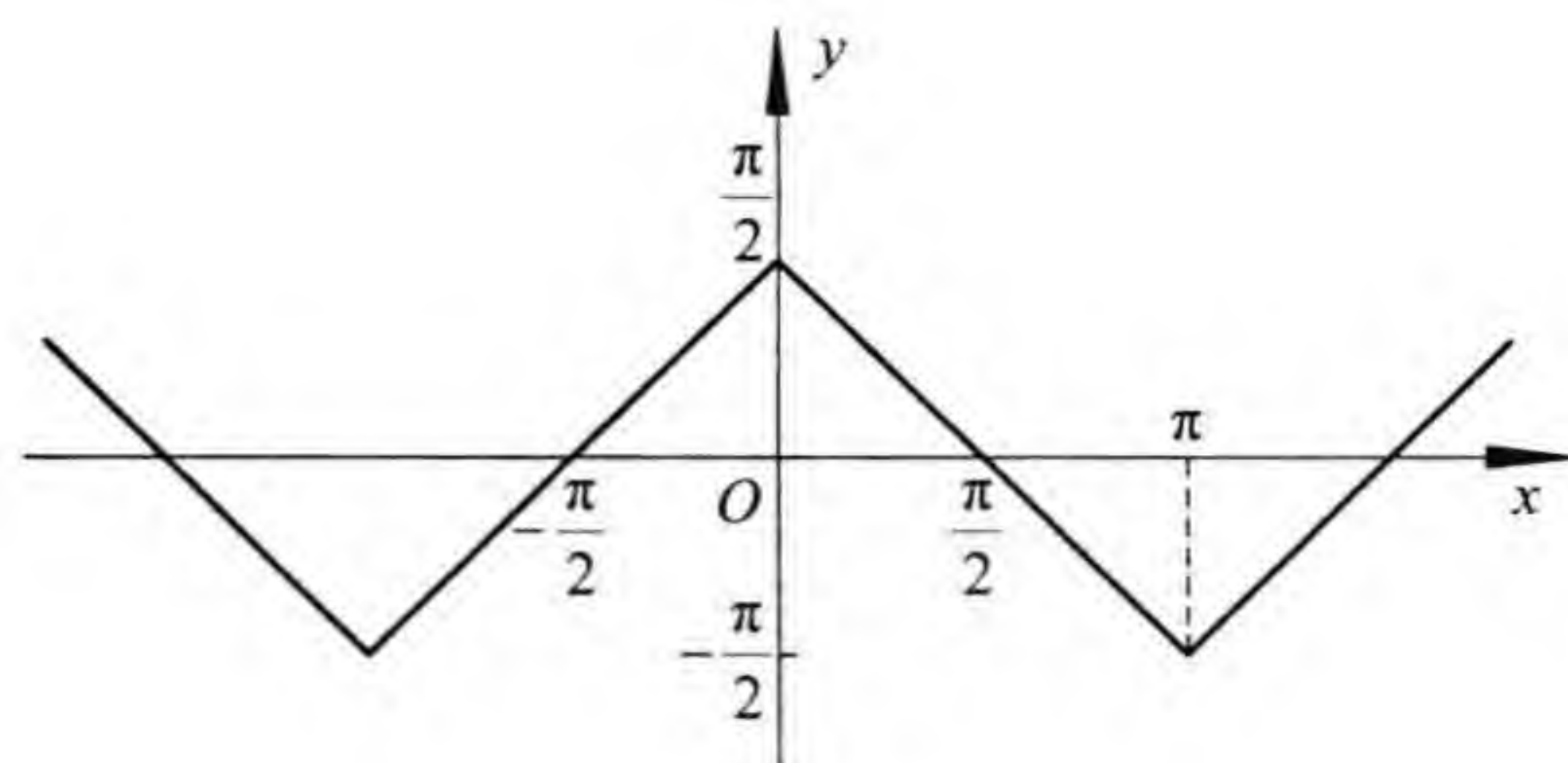


图 1.113

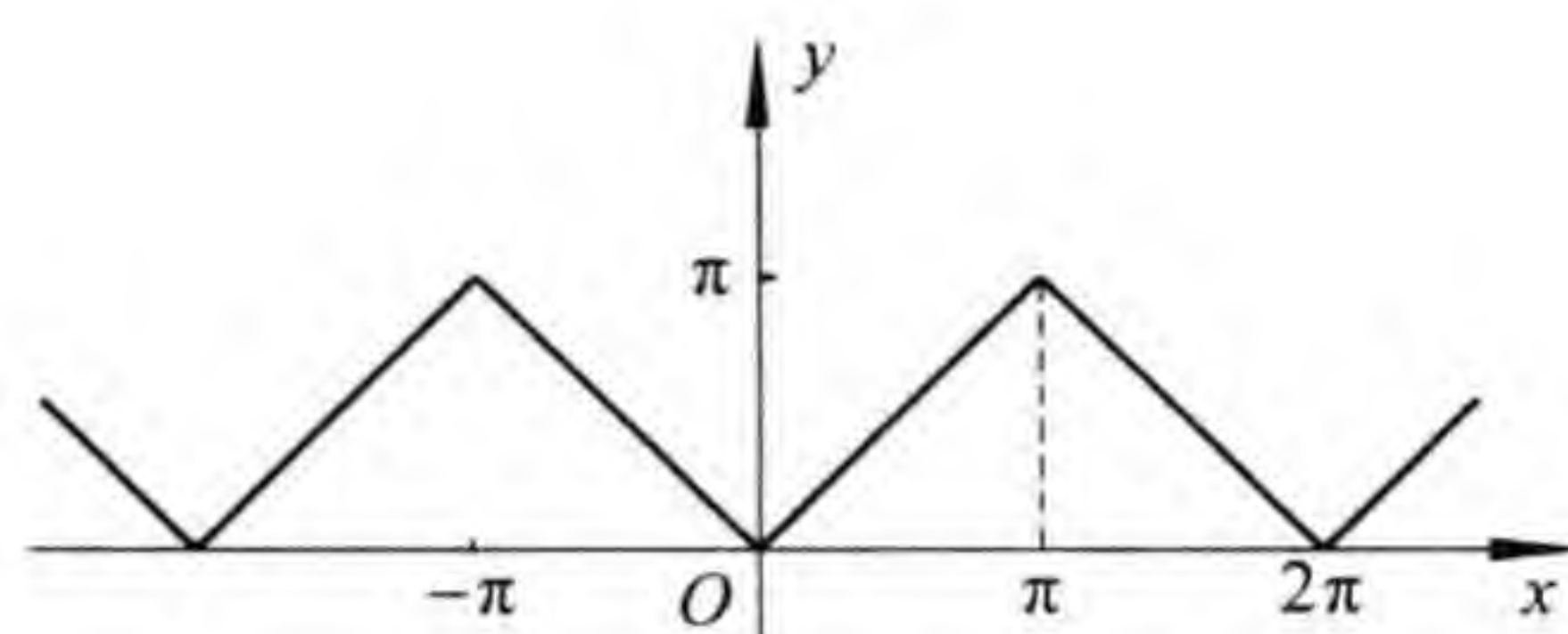


图 1.114

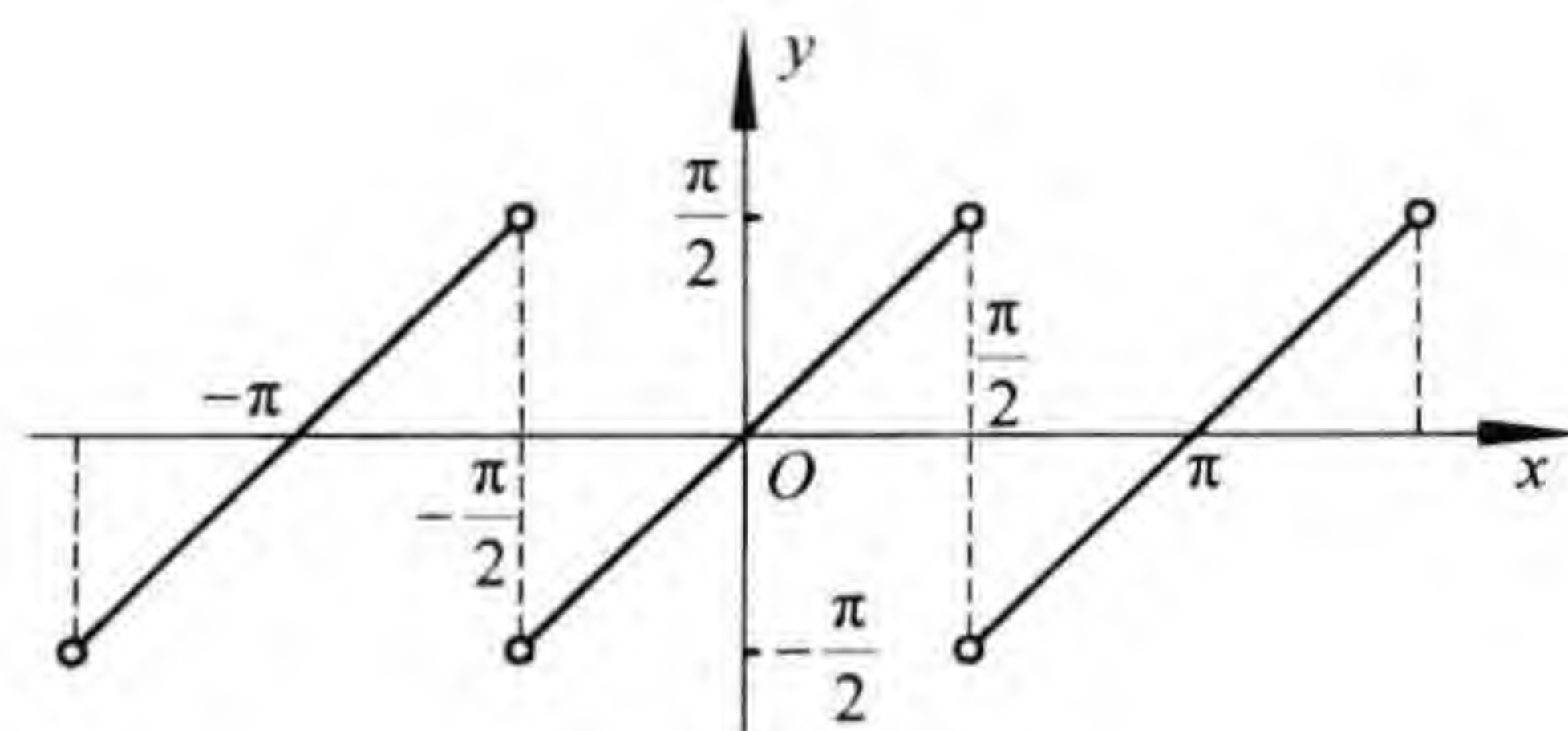


图 1.115

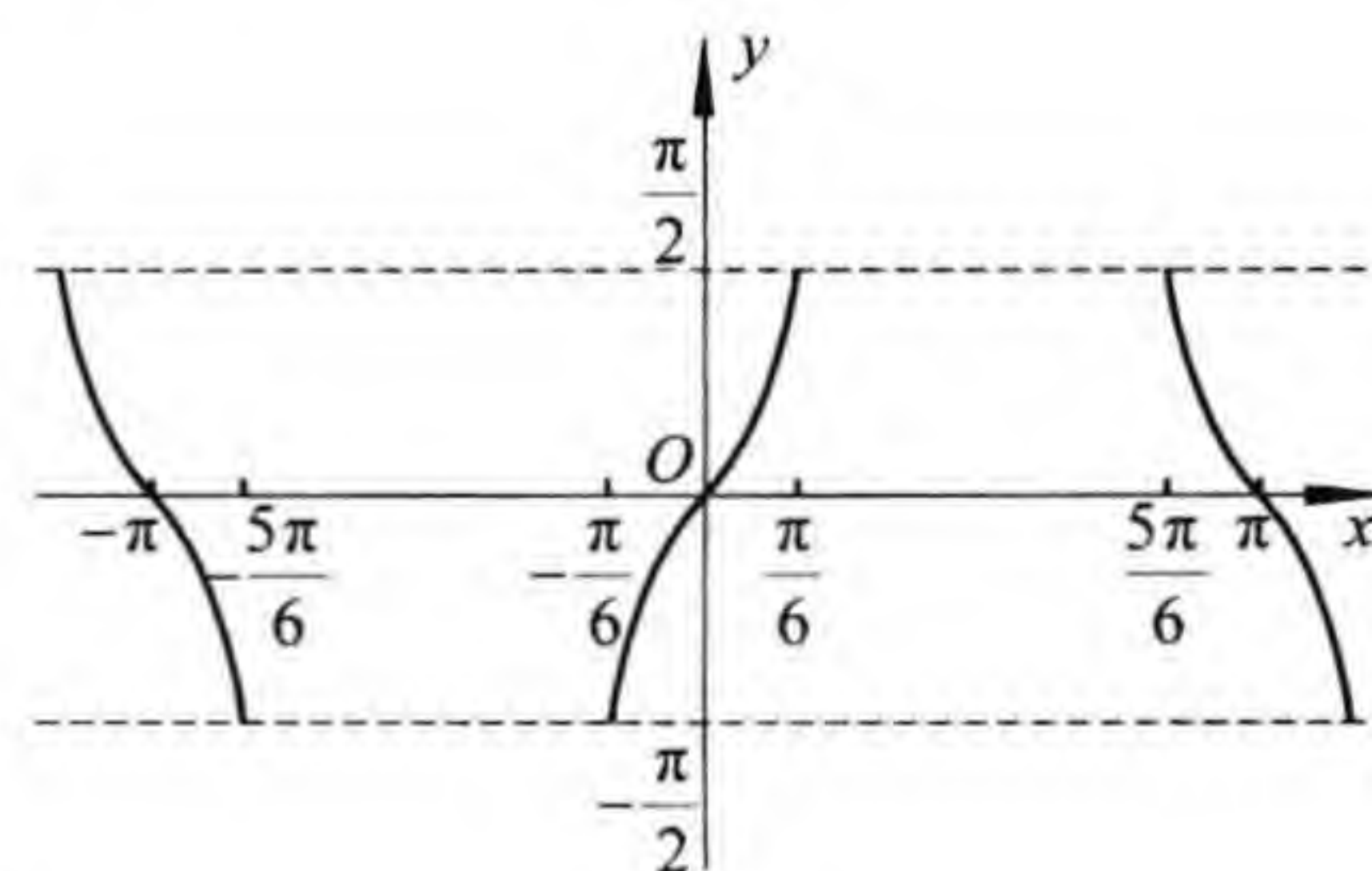


图 1.116



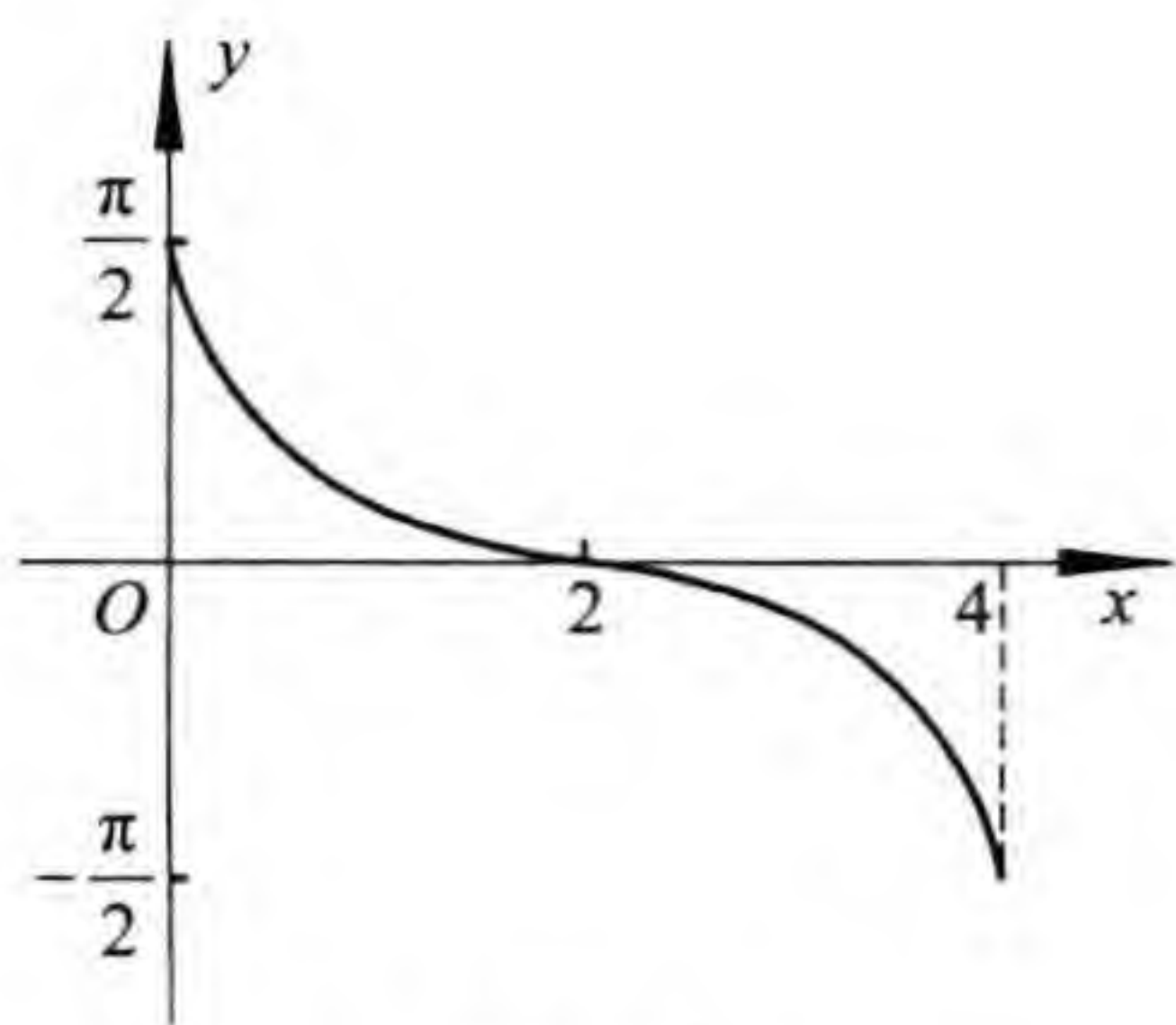


图 1.117

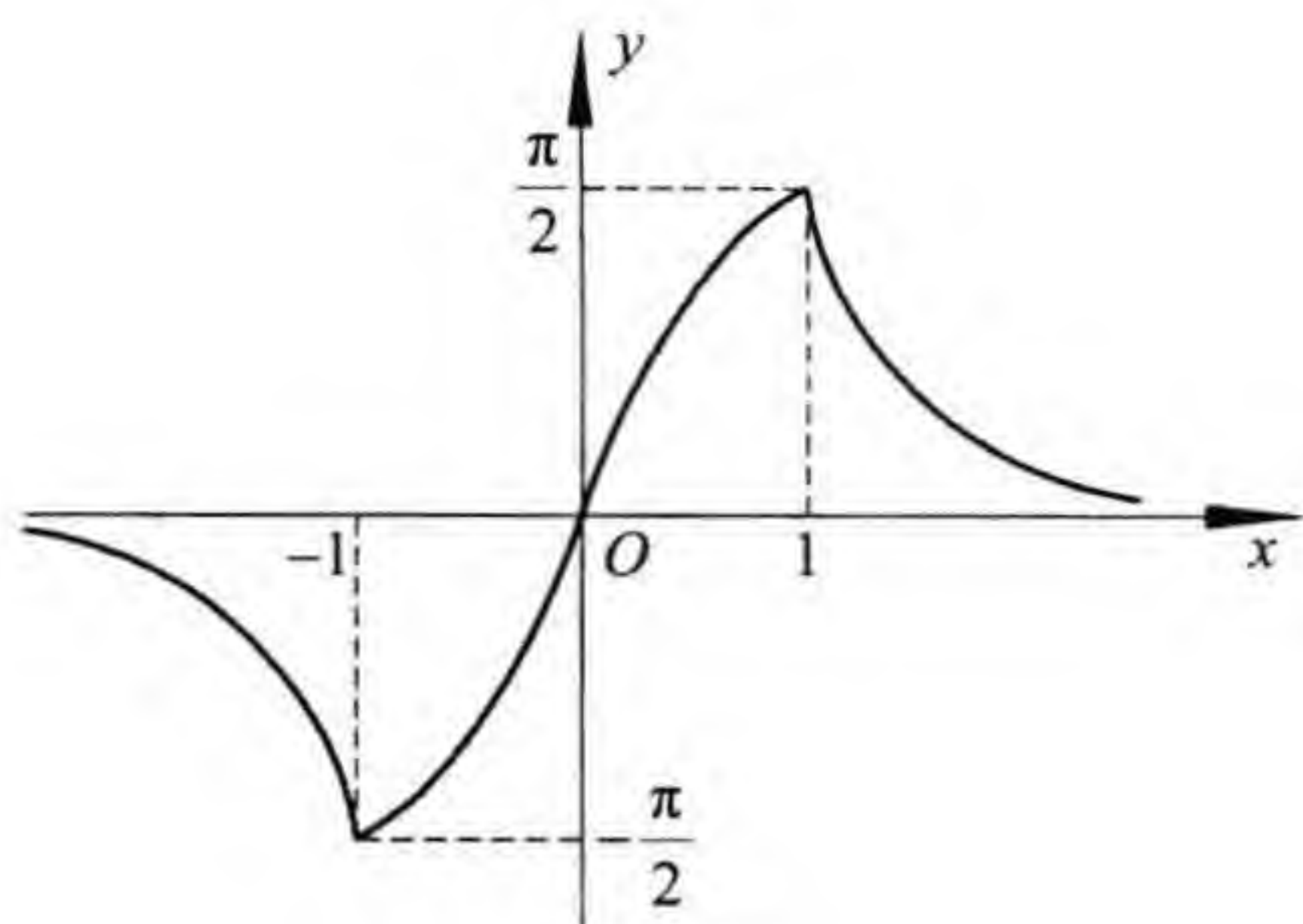


图 1.118

(2) 图像关于原点对称. 存在域为全体实数. 当  $x$  由 0 增到 1 时, 由于  $\frac{2x}{1+x^2}$  为增函数, 故  $y$  由 0 增到  $\frac{\pi}{2}$ . 而当  $x > 1$  时,  $\frac{2x}{1+x^2}$  为减函数, 故  $y$  由  $\frac{\pi}{2}$  减少到 0, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ . 如图 1.118 所示.

(3) 要  $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| \leq 1$ , 只要  $x \geq 0$ , 故存在域为  $x \geq 0$  的数  $x$  的集合. 当  $x$  由 0 增到 1 时,  $\frac{1-x}{1+x}$  由 1 减少到 0, 而  $y$  则由  $\frac{\pi}{2}$  减少到 0; 而当  $x$  由 1 增到  $+\infty$  时,  $\frac{1-x}{1+x}$  由 0 减少到  $-1$ , 而  $y$  由 0 减少到  $-\frac{\pi}{2}$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\frac{\pi}{2}$ , 如图 1.119 所示.

(4) 存在域为  $-\infty < x \leq 0$  的数  $x$  的集合. 当  $x$  由  $-\infty$  增到 0 时,  $e^x$  由 0 增到 1, 而  $y$  则由 0 增到  $\frac{\pi}{2}$ . 如图 1.120 所示.

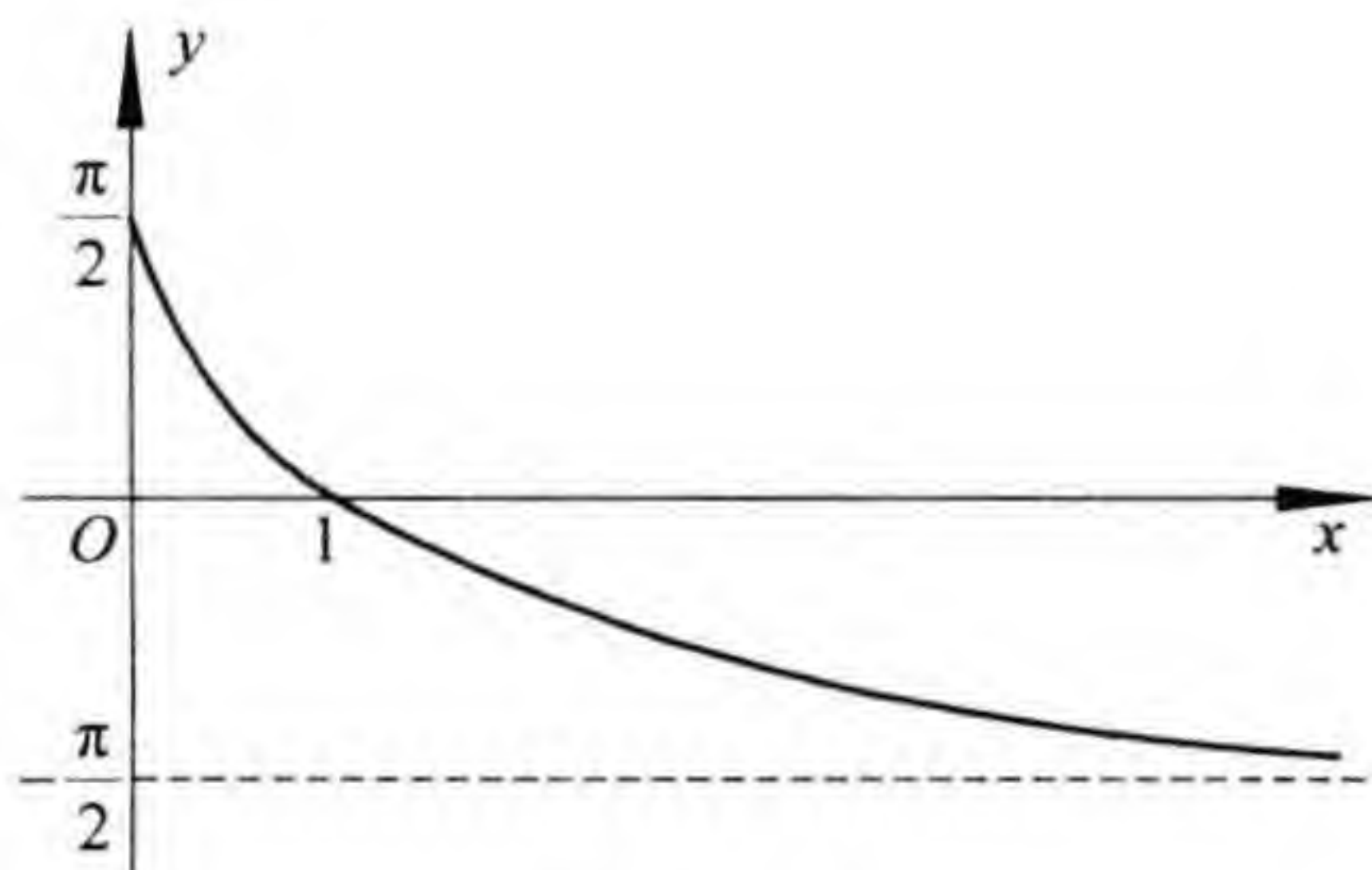


图 1.119

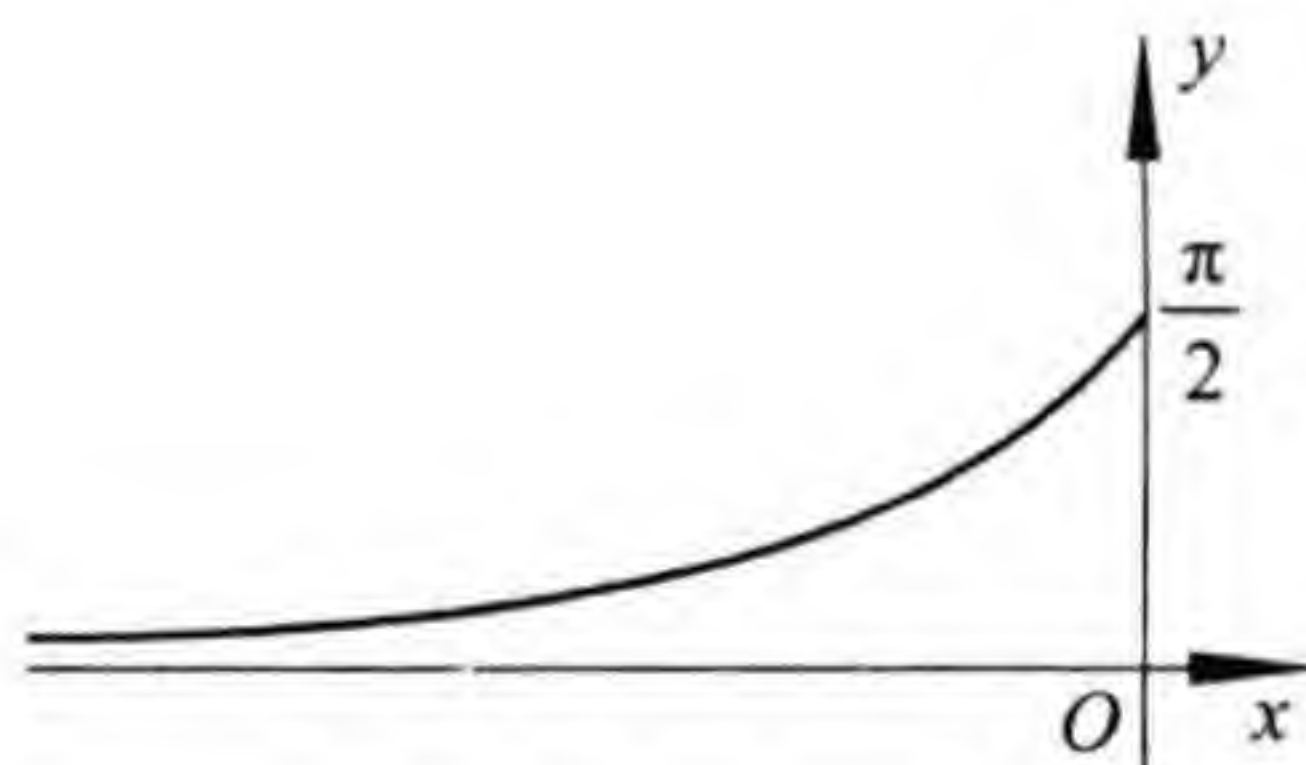


图 1.120

【324】 设:

(1)  $y_1 = x^2$ ; (2)  $y_1 = \frac{1}{x^2}$ ; (3)  $y_1 = \ln x$ ; (4)  $y_1 = \frac{1}{\sin x}$ .

作函数  $y = \arctan y_1$  的图像.

解 (1) 如图 1.121 所示的 AB 曲线.

(2) 如图 1.122 所示.

(3) 如图 1.123 所示的  $O_1A$  曲线.

(4) 以  $2\pi$  为周期. 当  $x$  由 0 增到  $\frac{\pi}{2}$  时,  $\frac{1}{\sin x}$  由  $+\infty$  减到 1,

而  $y$  则由  $\frac{\pi}{2}$  减到  $\frac{\pi}{4}$ .

余类推, 如图 1.124 所示.

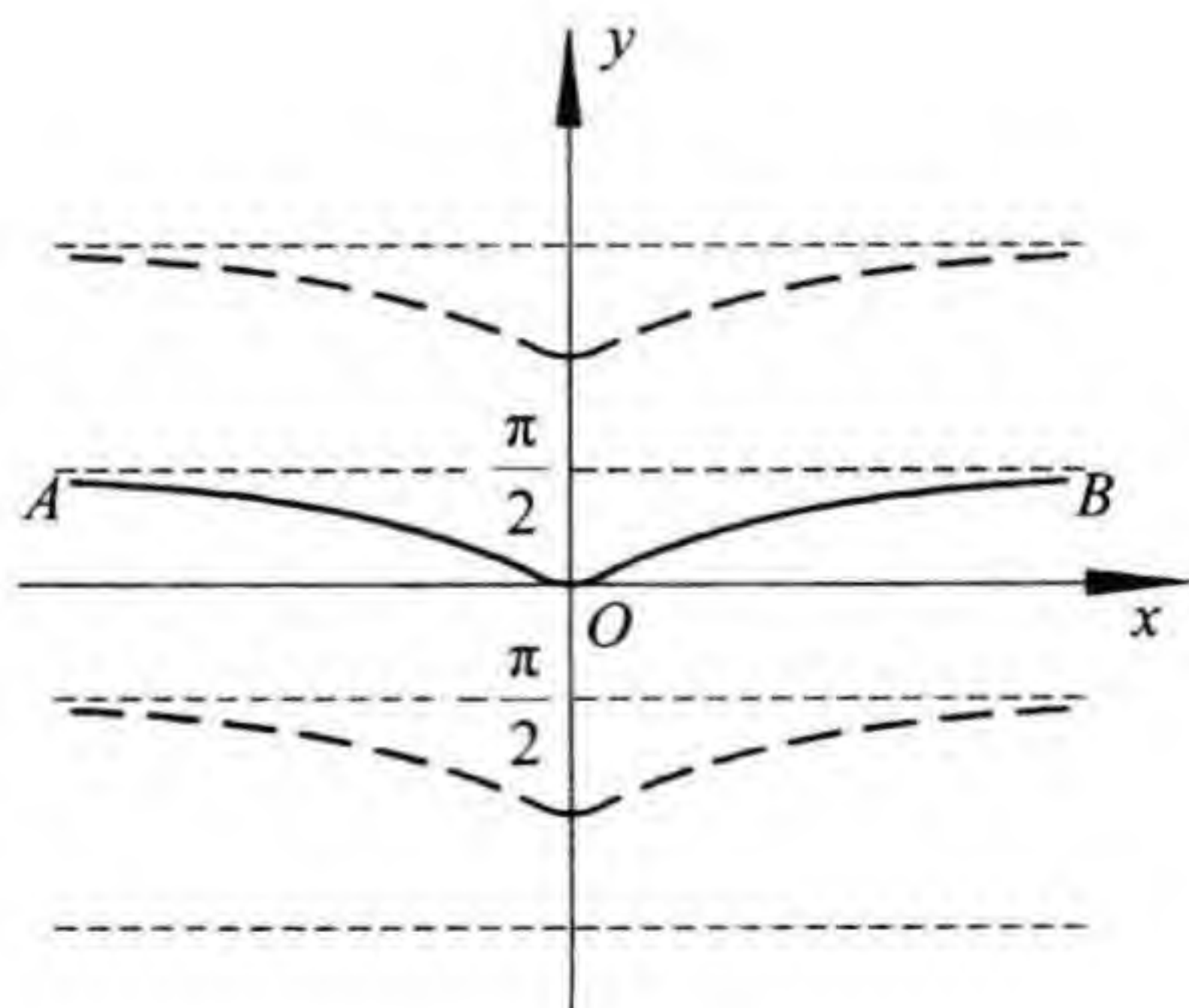


图 1.121



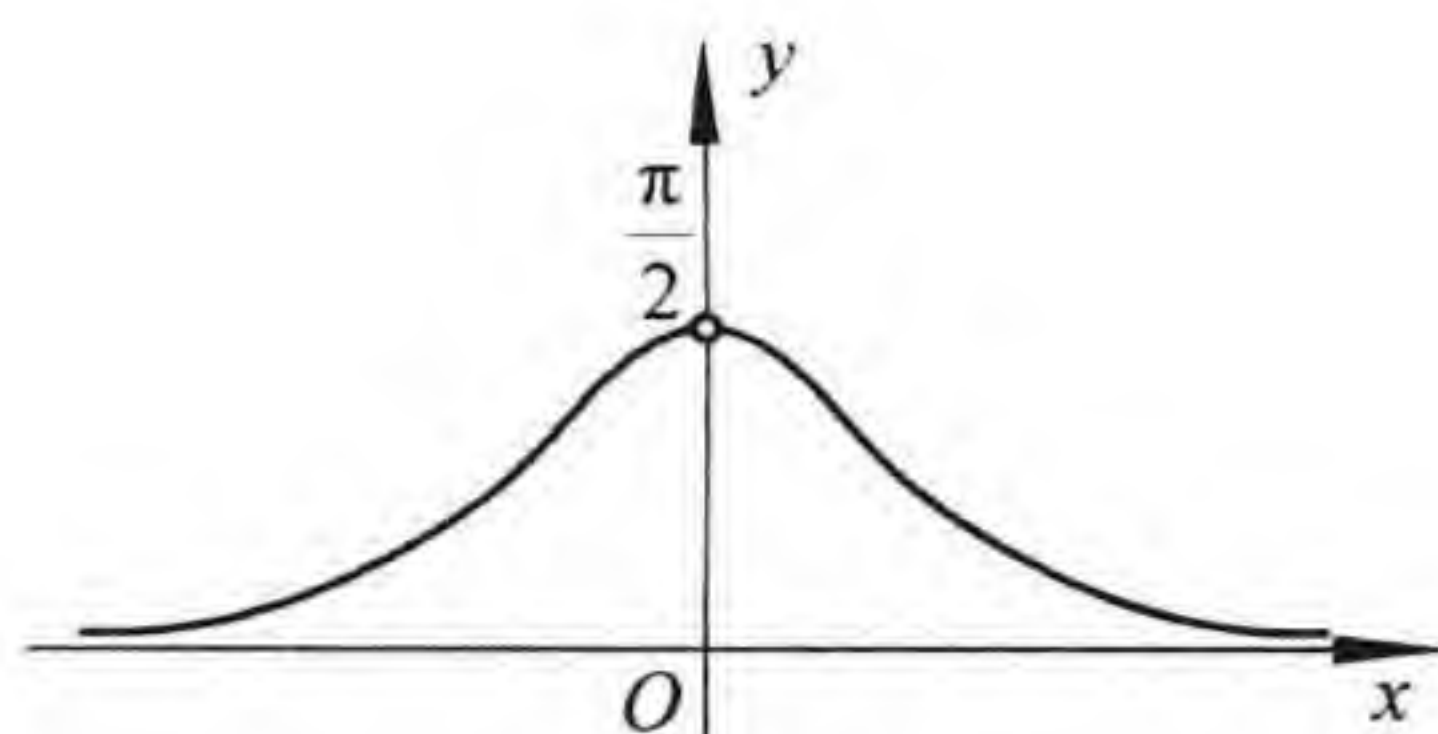


图 1.122

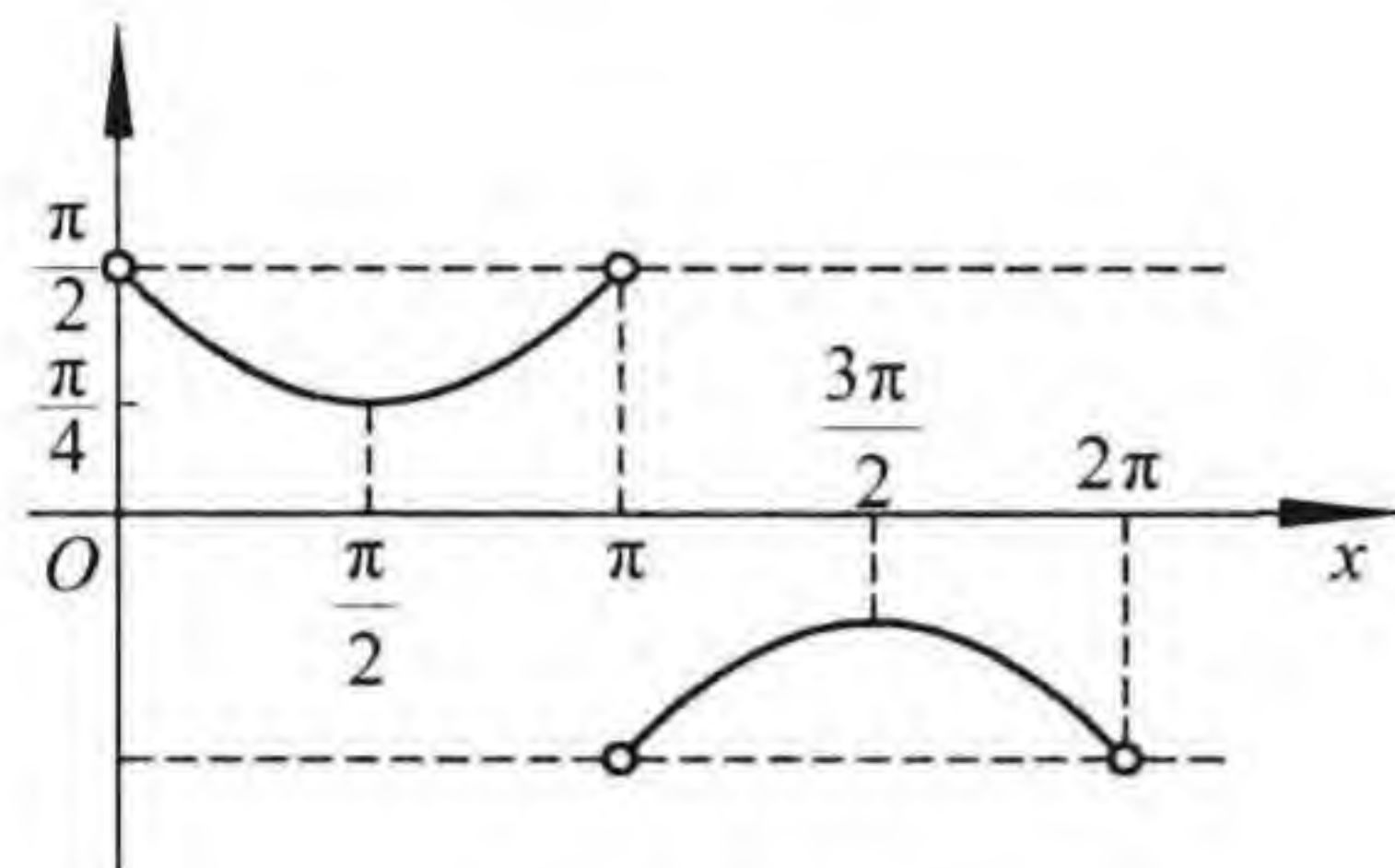


图 1.124

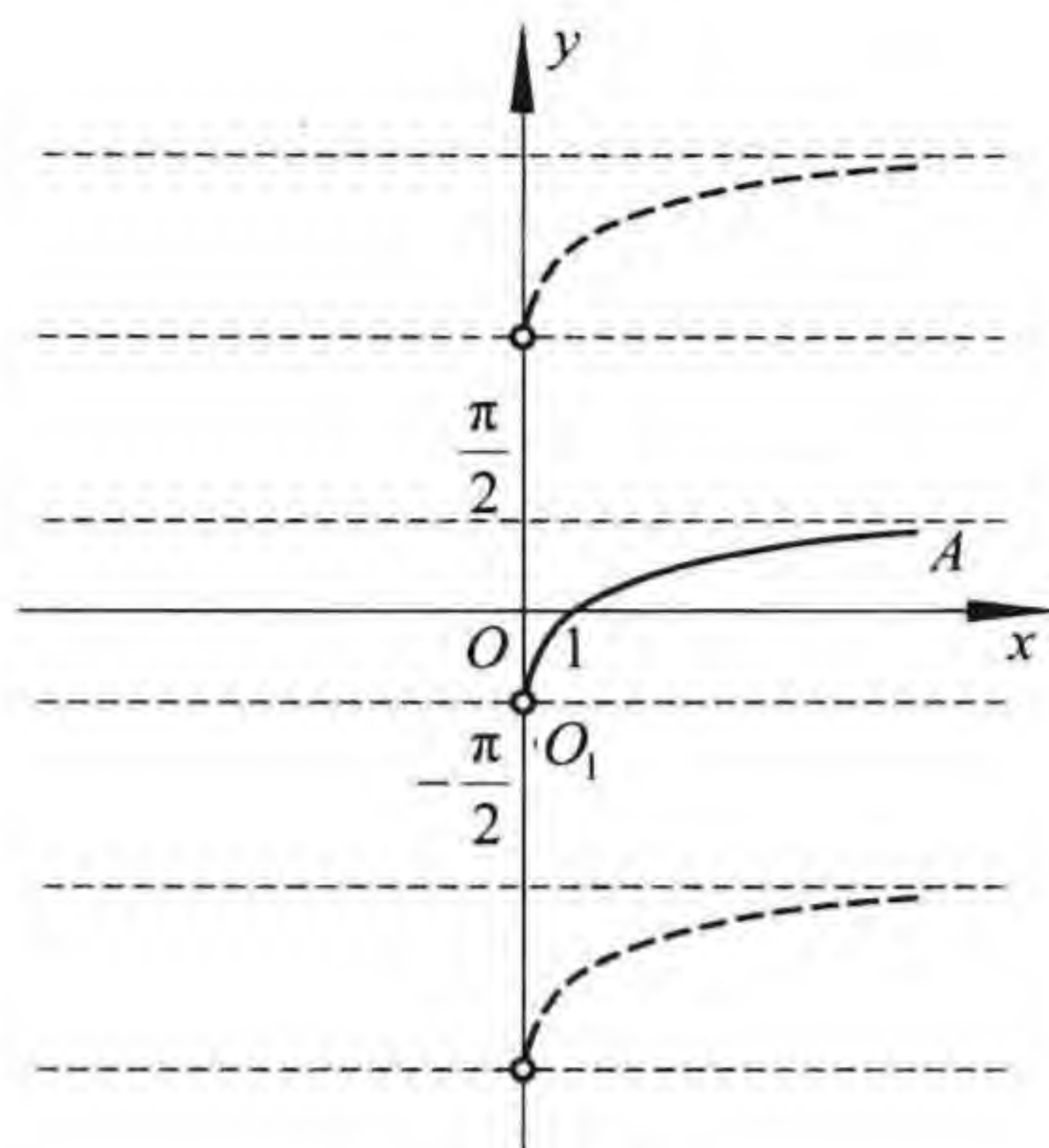


图 1.123

**【325】** 已知函数  $y=f(x)$  的图像, 作下列各函数的图像:

(1)  $y=-f(x)$ ; (2)  $y=f(-x)$ ; (3)  $y=-f(-x)$ .

解 (1) 函数  $y=-f(x)$  的图像和函数  $y=f(x)$  的图像关于  $Ox$  轴对称. 如图 1.125 所示.

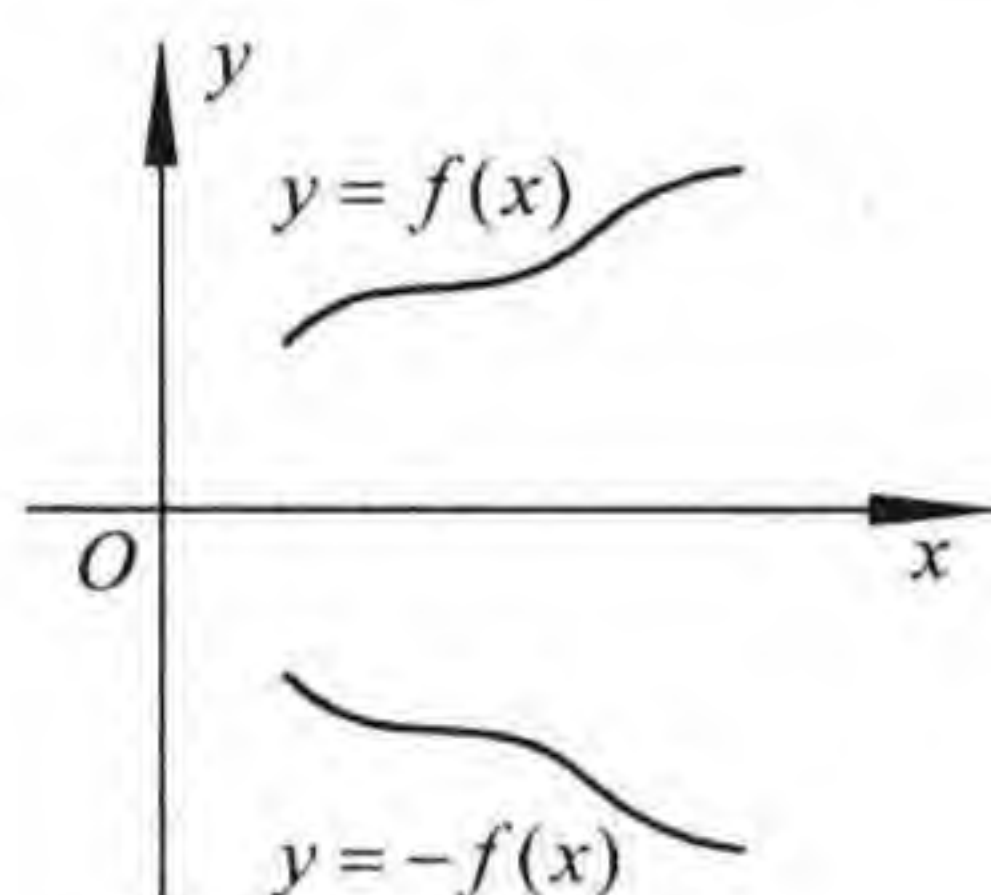


图 1.125

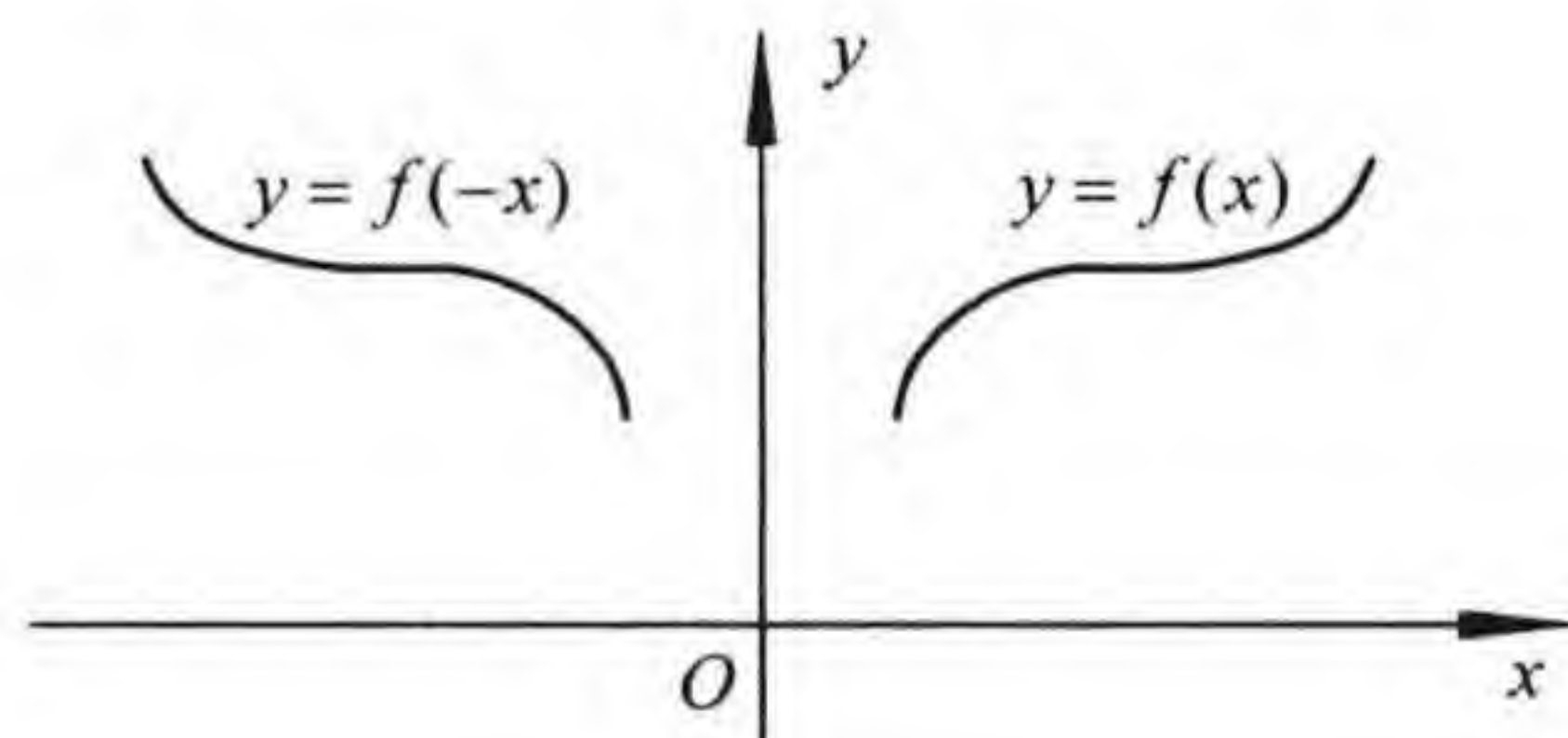


图 1.126

(2) 函数  $y=f(-x)$  的图像和函数  $y=f(x)$  的图像关于  $Oy$  轴对称. 如图 1.126 所示.

(3) 函数  $y=-f(-x)$  的图像和函数  $y=f(x)$  的图像关于原点对称. 如图 1.127 所示.

**【326】** 已知函数  $y=f(x)$  的图像, 作下列各函数的图像:

(1)  $y=f(x-x_0)$ ; (2)  $y=y_0+f(x-x_0)$ ;  
(3)  $y=f(2x)$ ; (4)  $y=f(kx+b)$  ( $k \neq 0$ ).

解 (1) 函数  $y=f(x-x_0)$  的图像可由  $y=f(x)$  的图像平移距离  $|x_0|$  得出.

当  $x_0 > 0$  时, 向右平移; 当  $x_0 < 0$  时, 向左平移.

如图 1.128 所示.

(2) 函数  $y=y_0+f(x-x_0)$  的图像可由  $y=f(x)$  的图像先平移距离  $|x_0|$ , 再上下平移距离  $|y_0|$  得出, 其中当  $y_0 > 0$  时, 向上平移; 当  $y_0 < 0$  时, 向下平移.

事实上, 只要先将坐标原点平移到点  $(x_0, y_0)$ . 坐标轴的方向均不变, 再在新坐标系中作  $y'=f(x')$  的图像, 其中  $y'=y-y_0$ ,  $x'=x-x_0$ .

如图 1.129 所示.

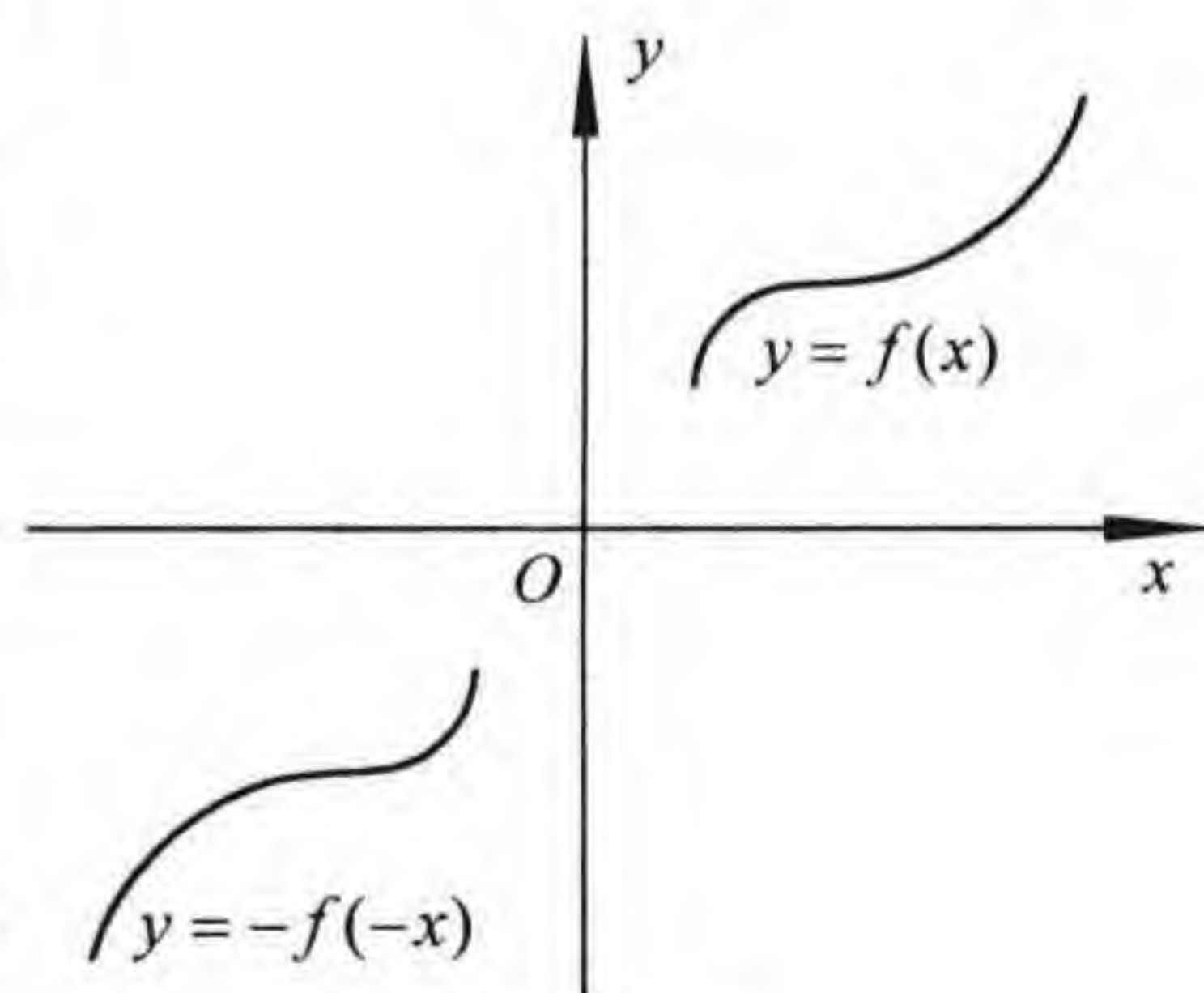


图 1.127



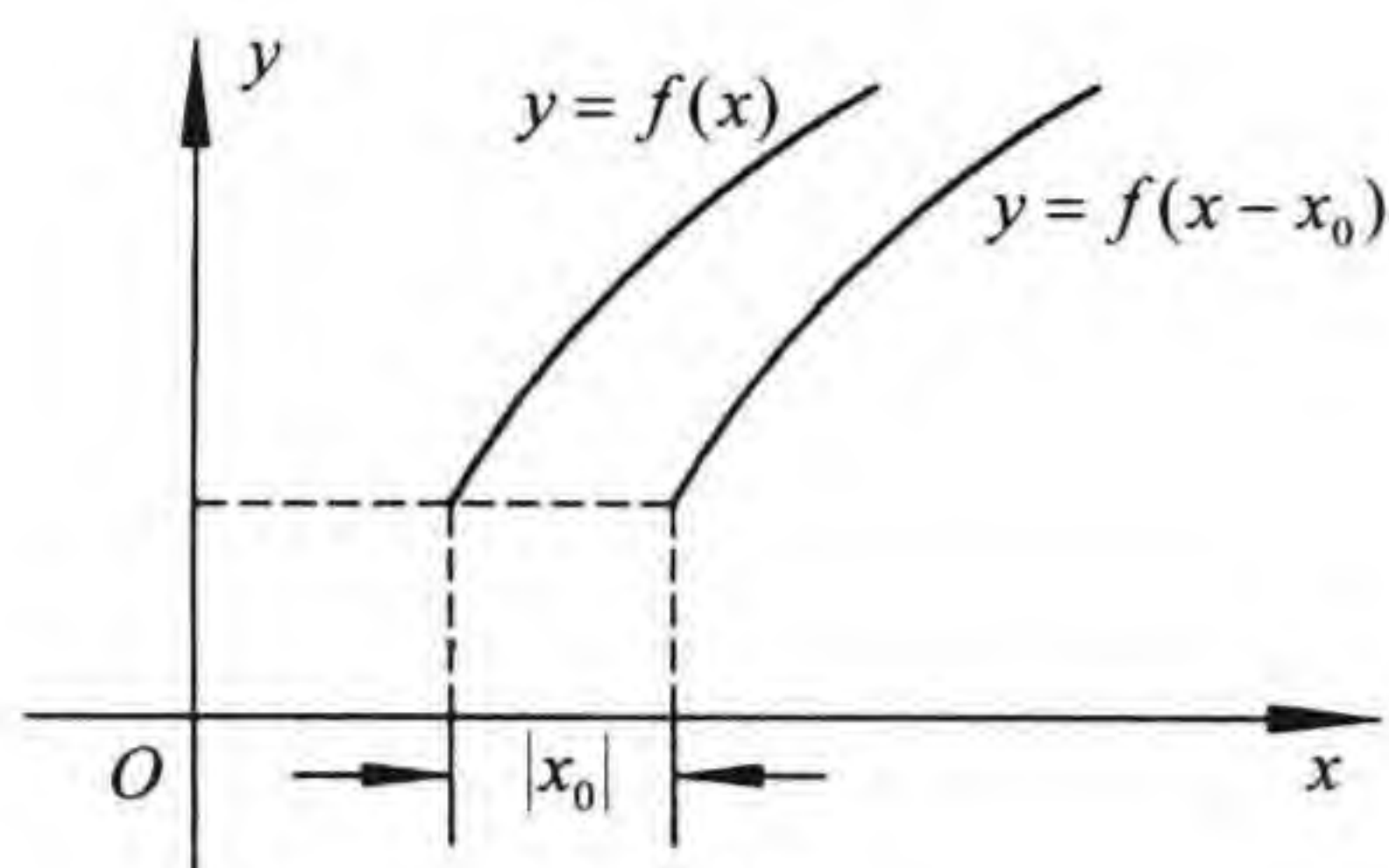


图 1.128

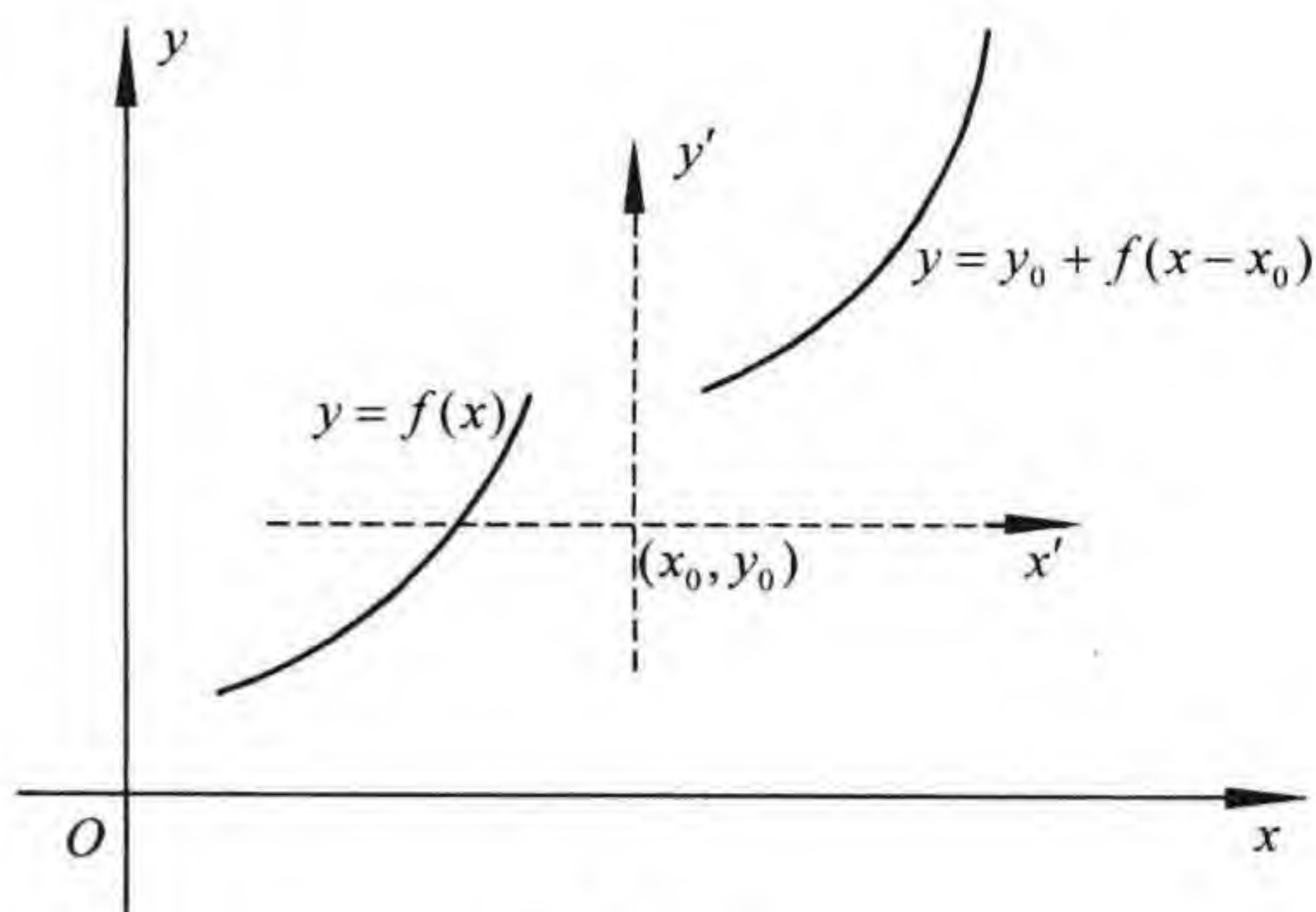


图 1.129

(3) 函数  $y = f(2x)$  的图像可由  $y = f(x)$  的图像沿  $Ox$  轴方向缩小二倍得出.

图像如图 1.130 所示.

(4)  $y = f(kx + b)$  的图像可由  $y = f(x)$  的图像先沿  $Ox$  轴方向“压缩” $k$  倍 ( $0 < k < 1$  时, 理解为“放大”). 然后再将所得图像平移距离  $|b|$ .

图像如图 1.131 所示.

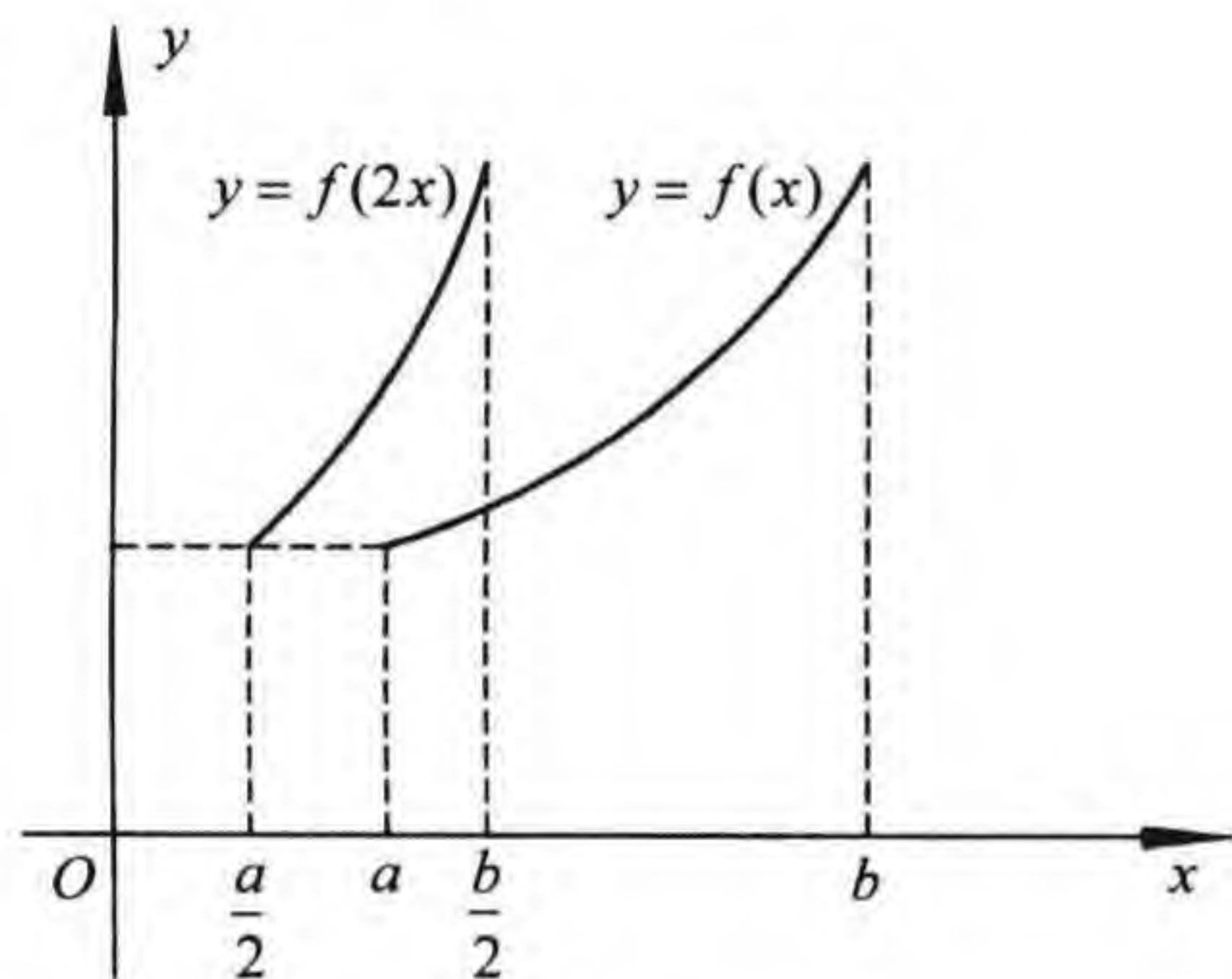


图 1.130

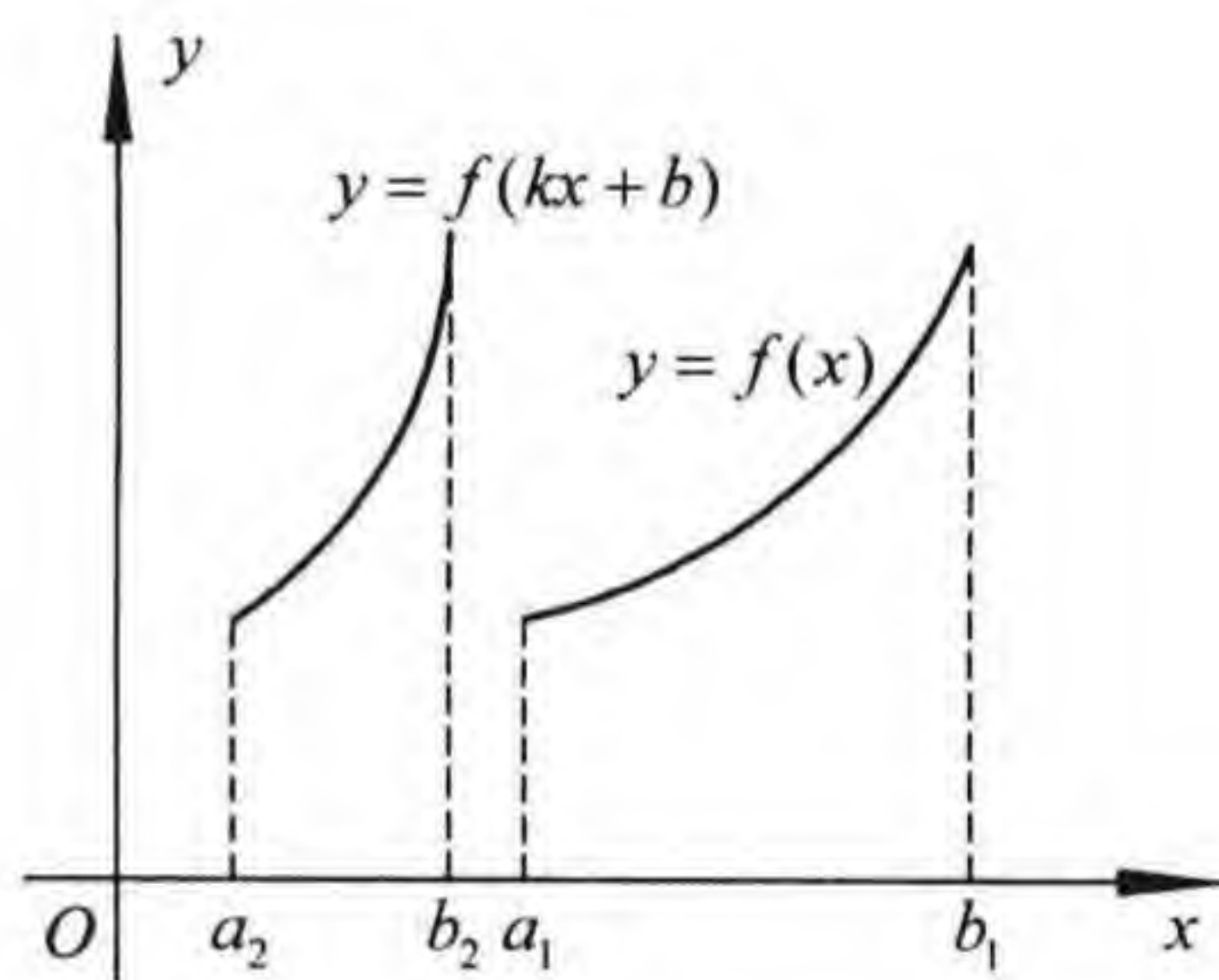


图 1.131

**【327】** 作函数的图像:

(1)  $y = 2 + \sqrt{1-x}$ ; (2)  $y = 1 - e^{-x}$ ; (3)  $y = \ln(1+x)$ ; (4)  $y = -\frac{\pi}{2} \arcsin(1+x)$ ; (5)  $y = 3 + 2\cos 3x$ .

解 (1) 如图 1.132 所示.

(2) 如图 1.133 所示.

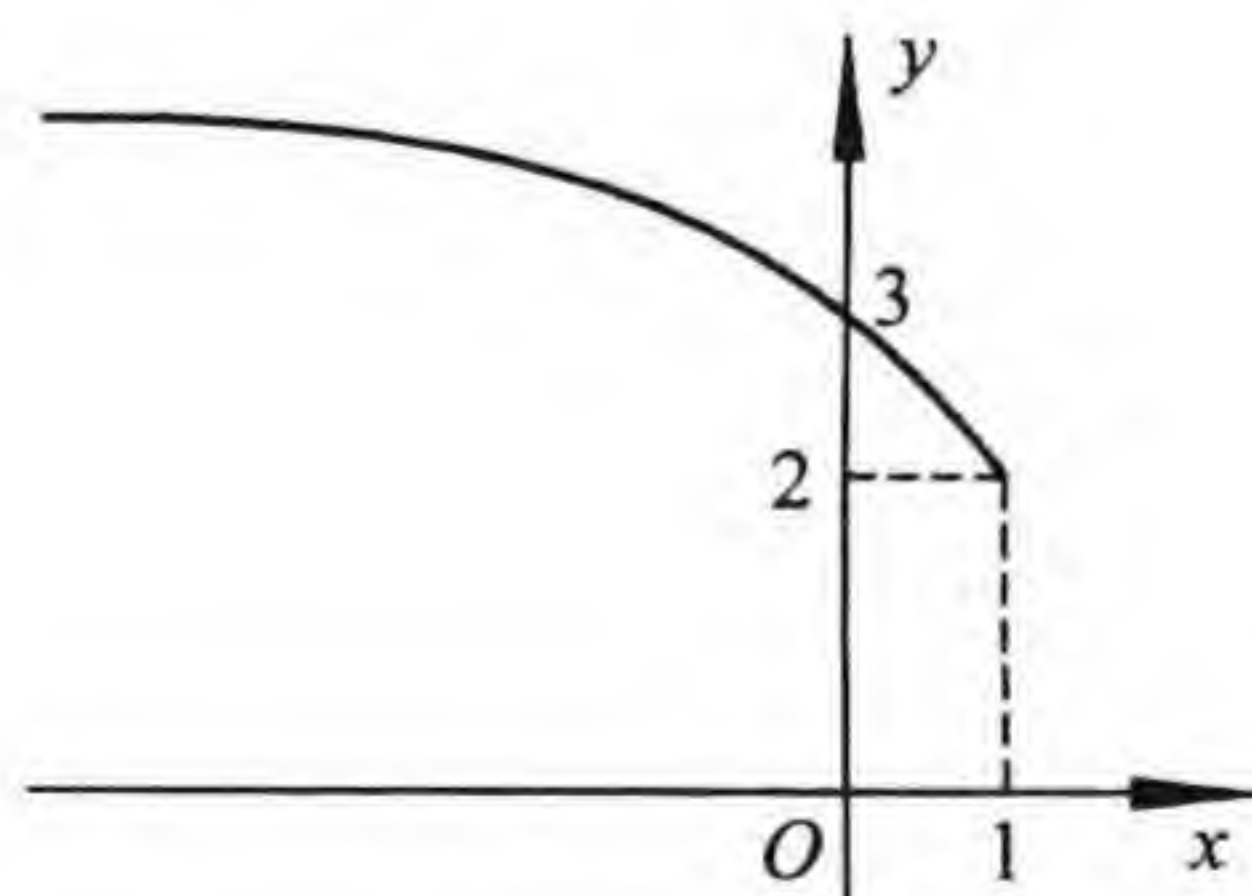


图 1.132

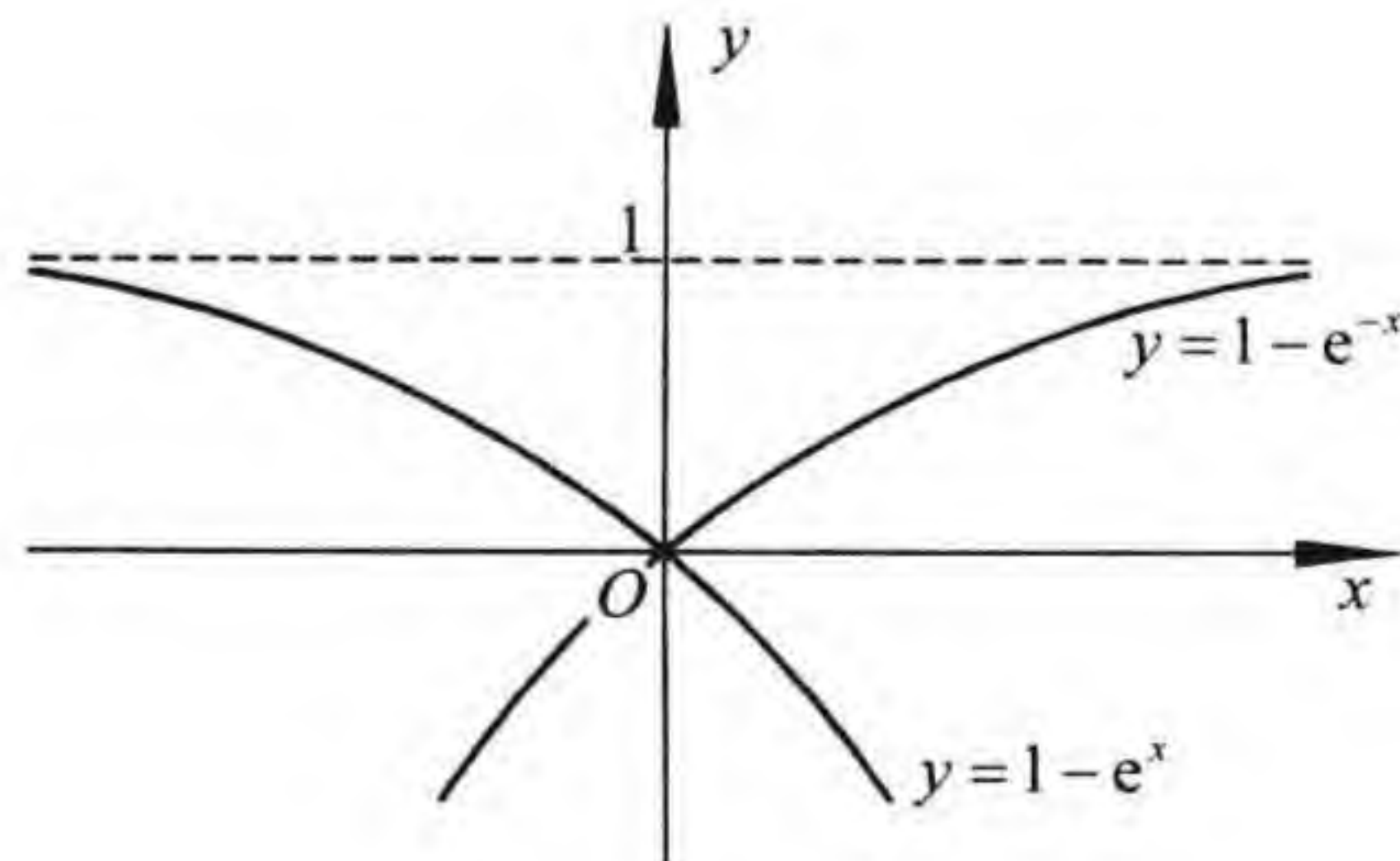


图 1.133

(3) 如图 1.134 所示.

(4) 如图 1.135 所示的  $AB$  段曲线.



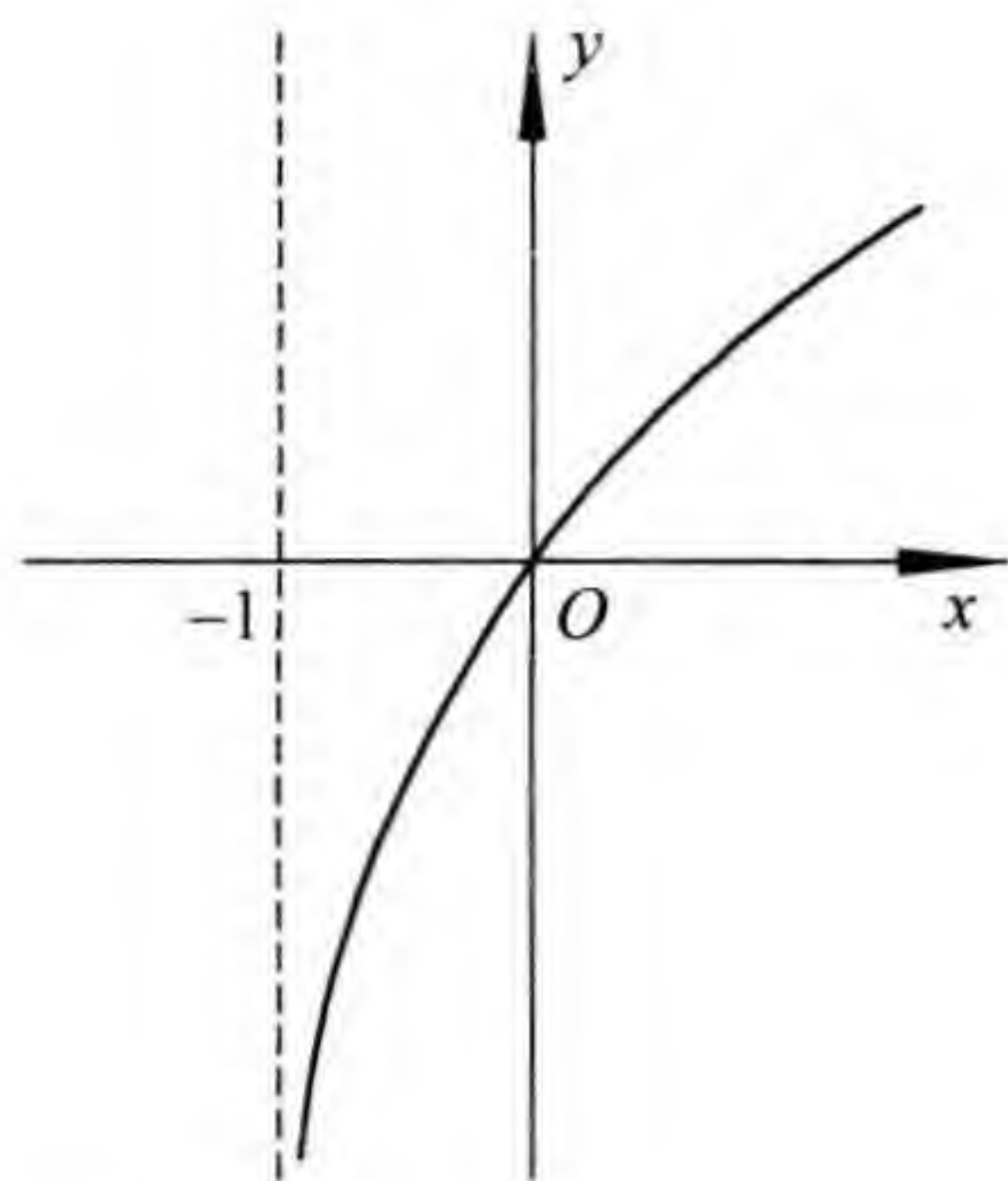


图 1.134

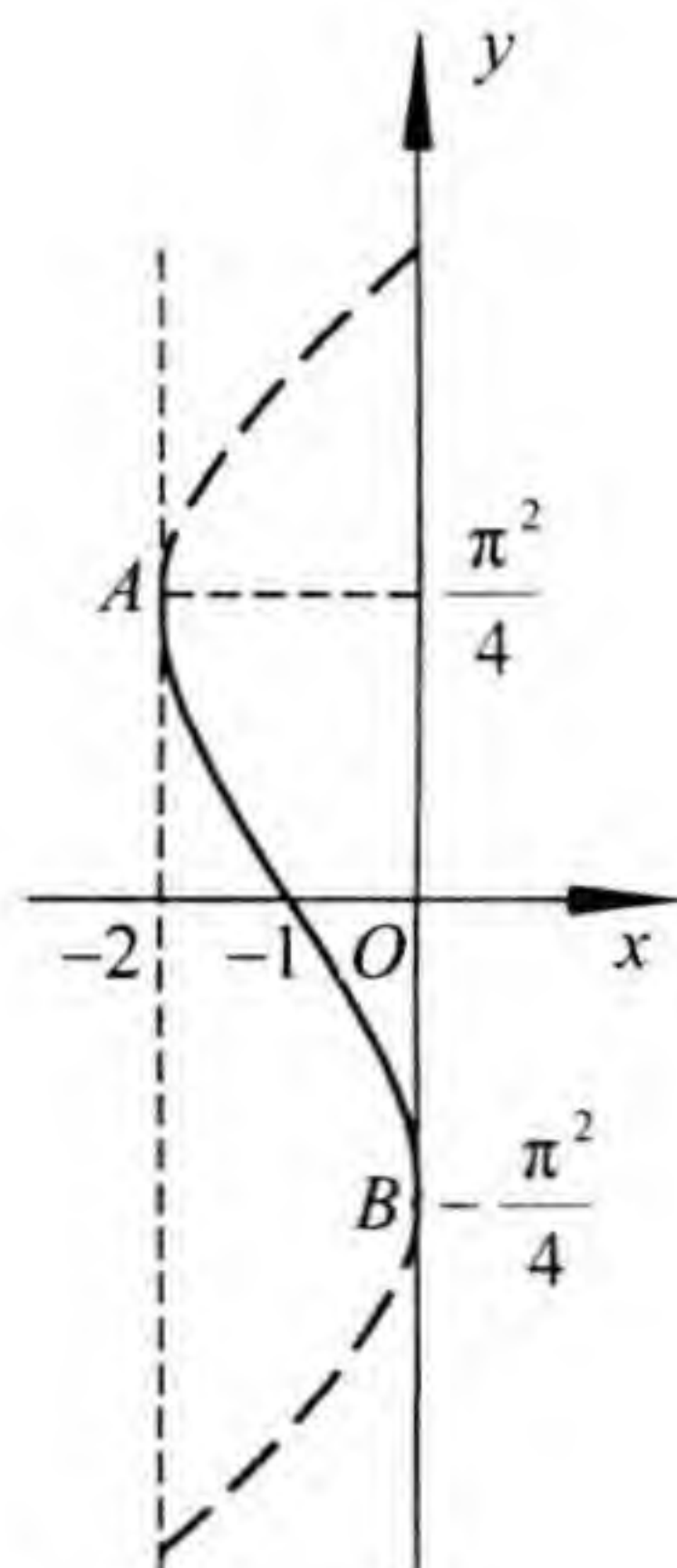


图 1.135

(5) 如图 1.136 所示.

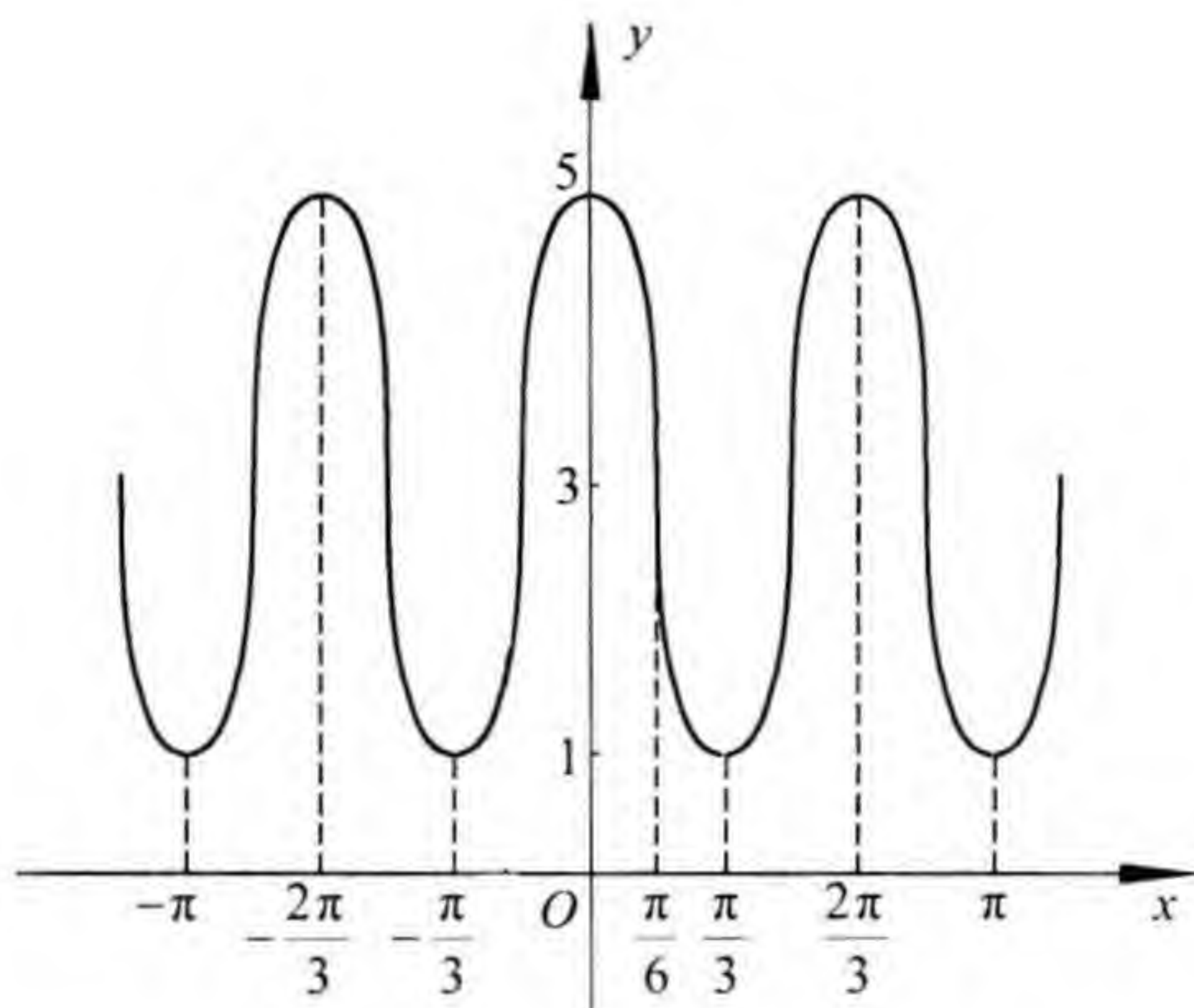


图 1.136

**【328】** 已知函数  $y=f(x)$  的图像, 作下列函数的图像:

(1)  $y=|f(x)|$ ; (2)  $y=\frac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$ ; (3)  $y=\frac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$ .

**解** (1) 当  $f(x) \geq 0$  时,  $y=f(x)$ ; 当  $f(x) < 0$  时,  $y=-f(x)$ ; 如图 1.137 黑粗线所示.

(2) 当  $f(x) \geq 0$  时,  $y=f(x)$ ; 当  $f(x) < 0$  时,  $y=0$ . 如图 1.138 黑粗线所示.

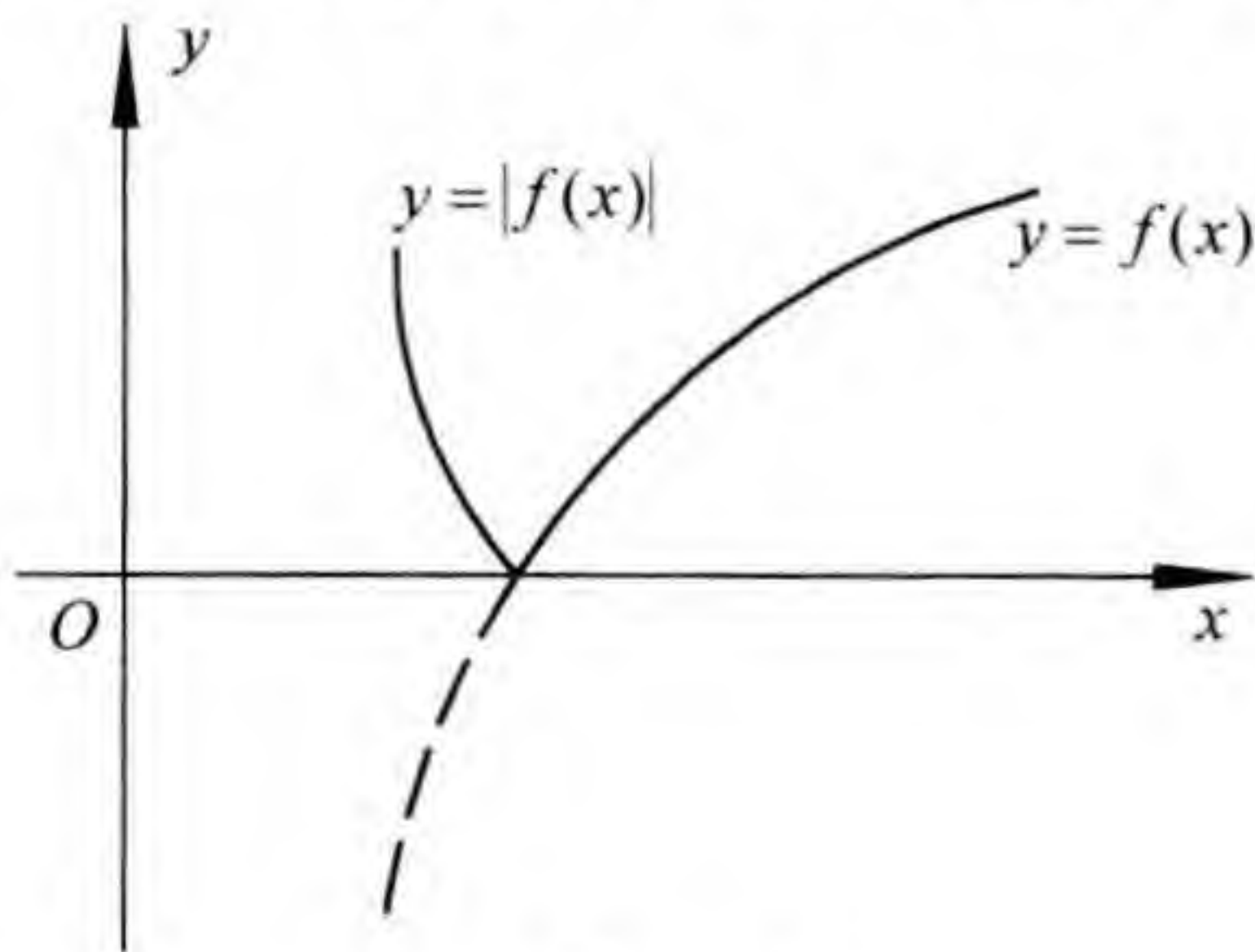


图 1.137

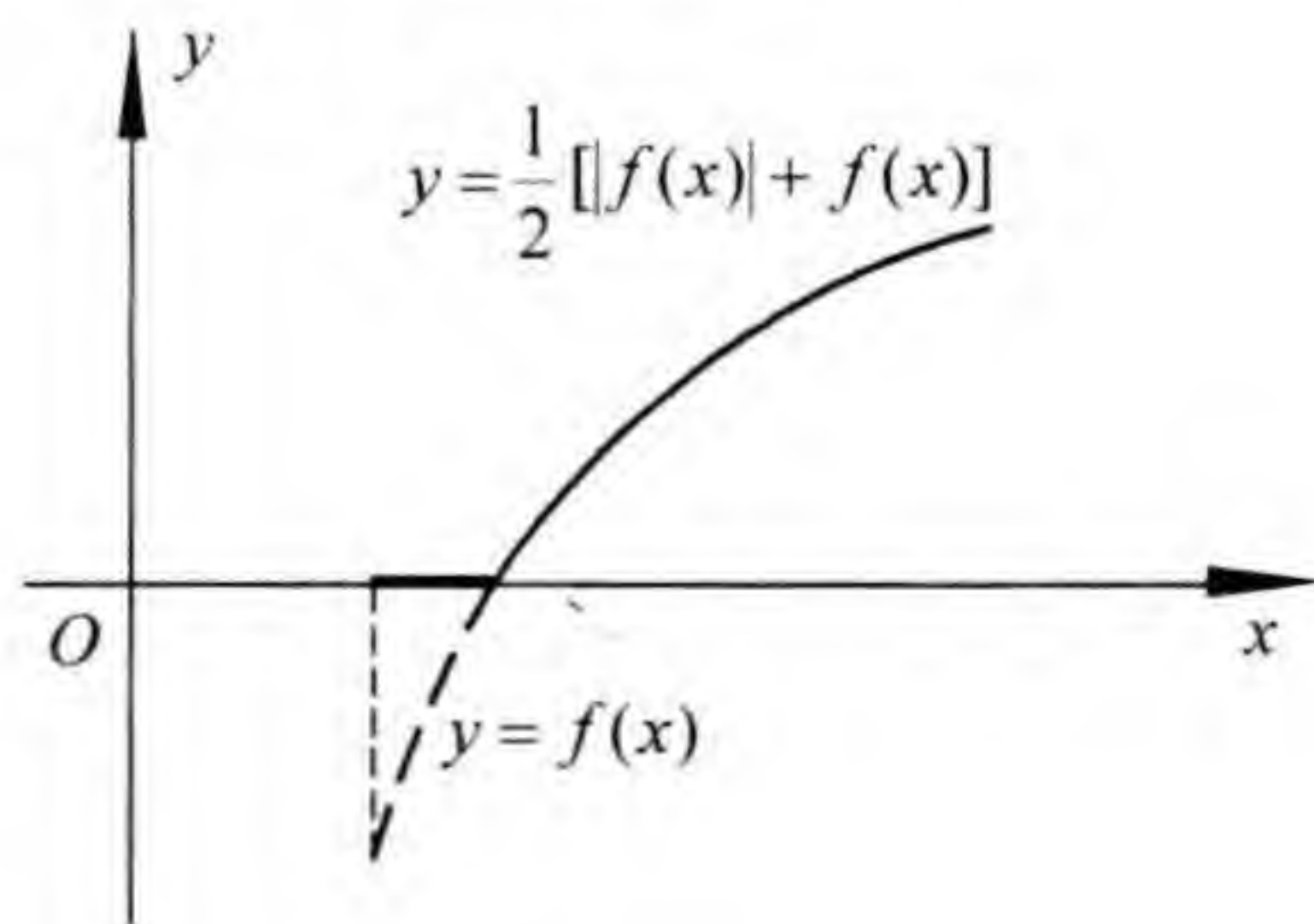


图 1.138



(3) 当  $f(x) \geq 0$  时,  $y=0$ ; 当  $f(x) < 0$  时,  $y=-f(x)$ ; 如图 1.139 黑粗线所示.

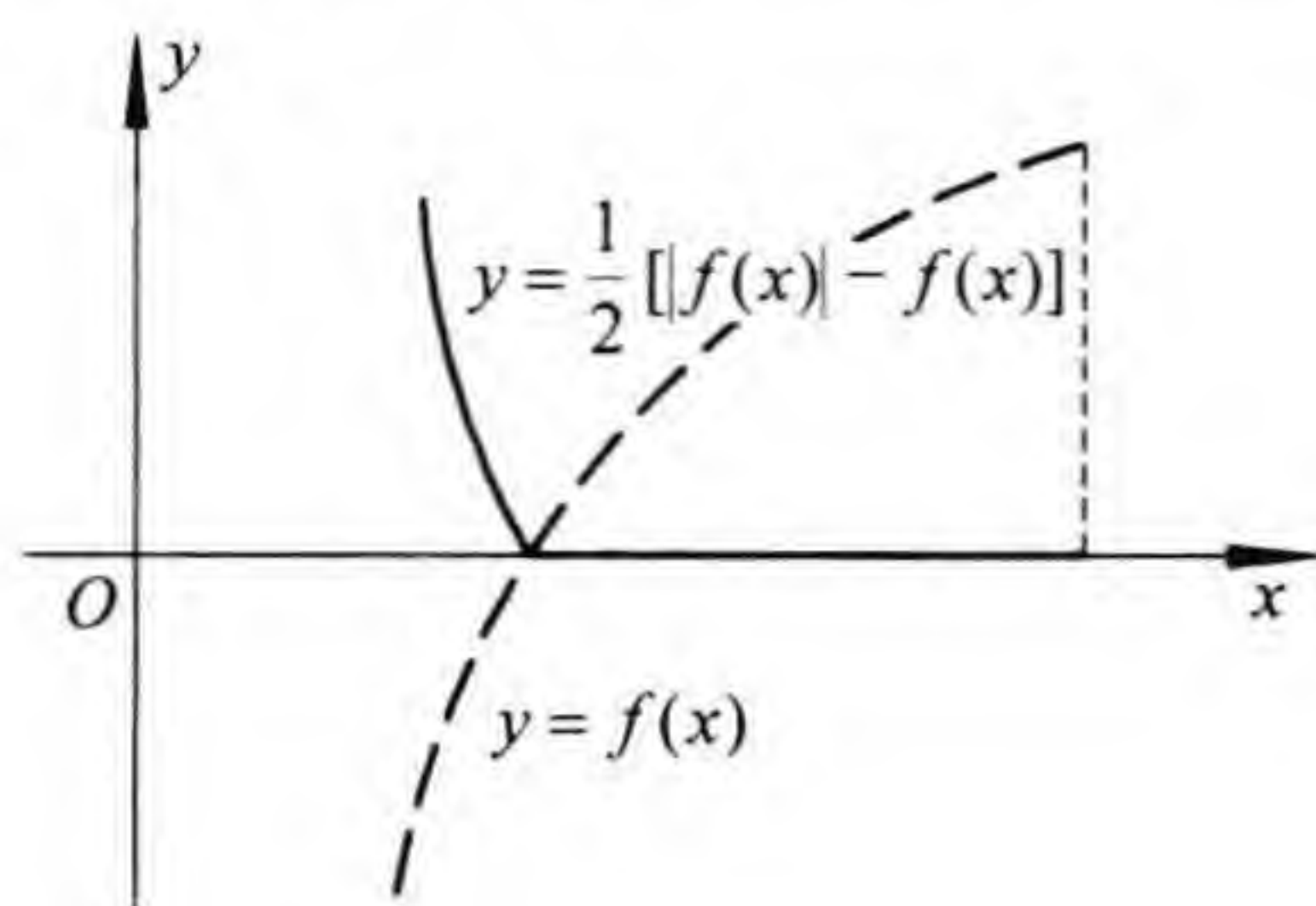


图 1.139

**【329】** 已知函数  $y=f(x)$  的图像, 作下列函数的图像:

- (1)  $y=f^2(x)$ ;      (2)  $y=\sqrt{f(x)}$ ;      (3)  $y=\ln f(x)$ ;  
 (4)  $y=f[f(x)]$ ;      (5)  $y=\operatorname{sgn} f(x)$ ;      (6)  $y=[f(x)]$ .

**解** (1) 以  $y=1$  为图像的分界线.

如图 1.140 所示. 1:  $y=f(x)$ ; 2:  $y=f^2(x)$ .

(2) 当  $f(x) > 1$  时,  $\sqrt{f(x)} < f(x)$ ; 而当  $0 \leq f(x) < 1$  时,  $\sqrt{f(x)} \geq f(x)$ .

如图 1.141 所示. 1:  $y=f(x)$ ; 2:  $y=\sqrt{f(x)}$ .

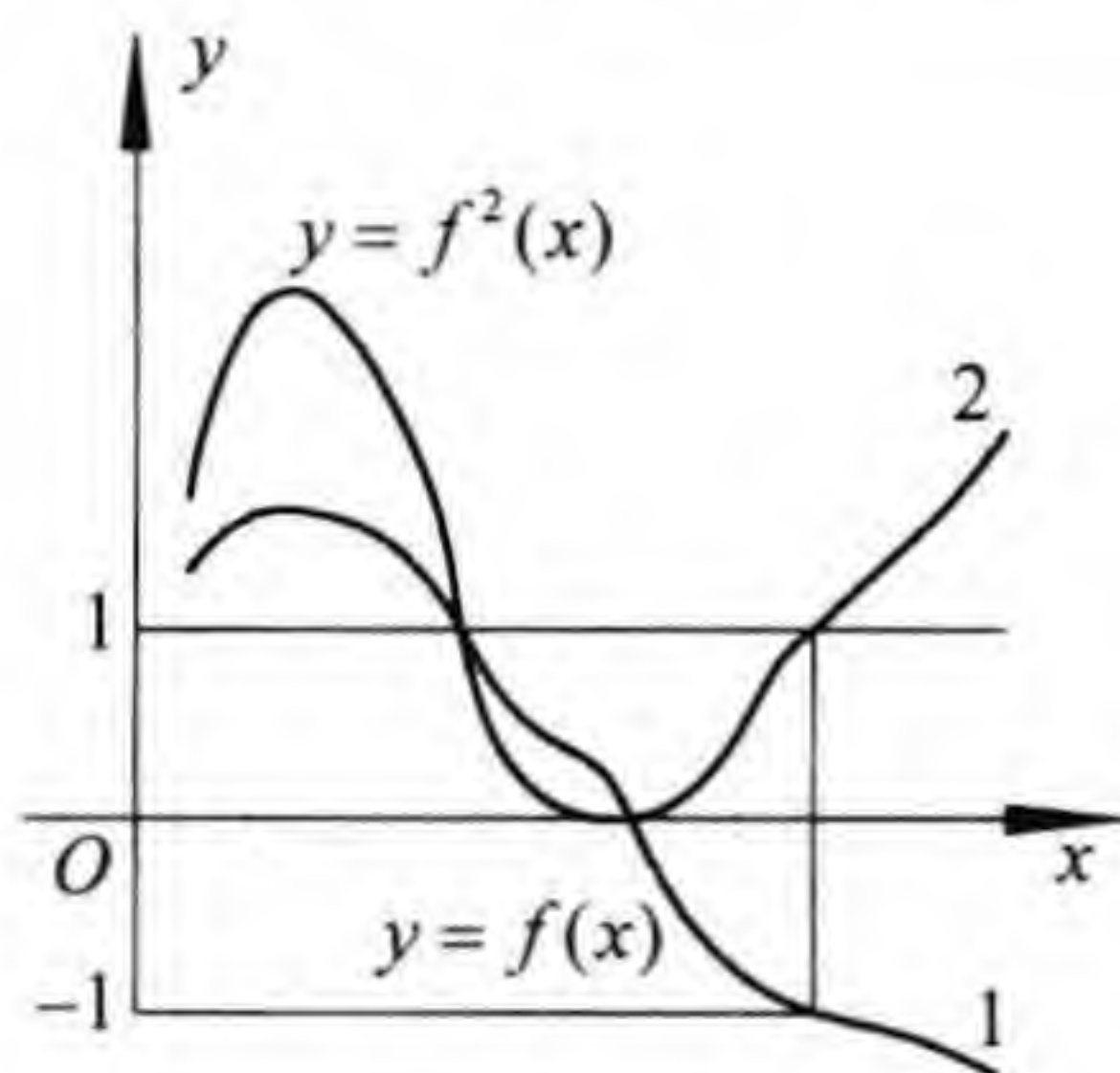


图 1.140

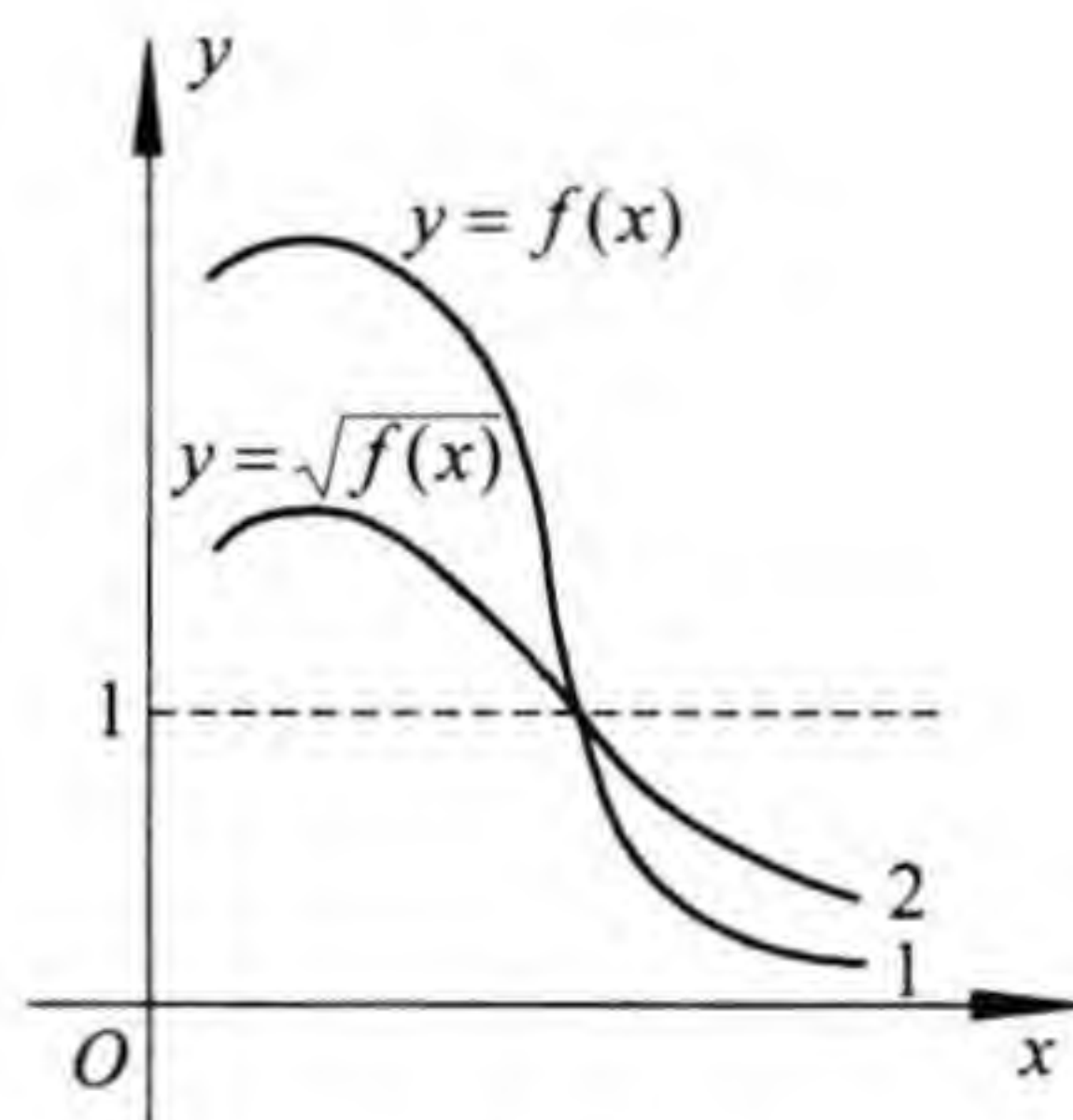


图 1.141

(3) 当  $f(x) \geq 1$  时,  $\ln f(x) < f(x)$ ; 而当  $0 < f(x) < 1$  时,  $\ln f(x) < f(x)$ , 故  $y=\ln f(x)$  的图像始终在  $y=f(x)$  之下. 如图 1.142 所示.

(4) 若  $y=f(x)$  的存在域为  $[a, b]$ , 则仅当  $f(x)$  之值在  $a$  与  $b$  之间, 才能使  $f[f(x)]$  有意义. 其详细作图法见 330 题(3).

如图 1.143 所示. 1:  $y=f(x)$ ; 2:  $y=f[f(x)]$ .

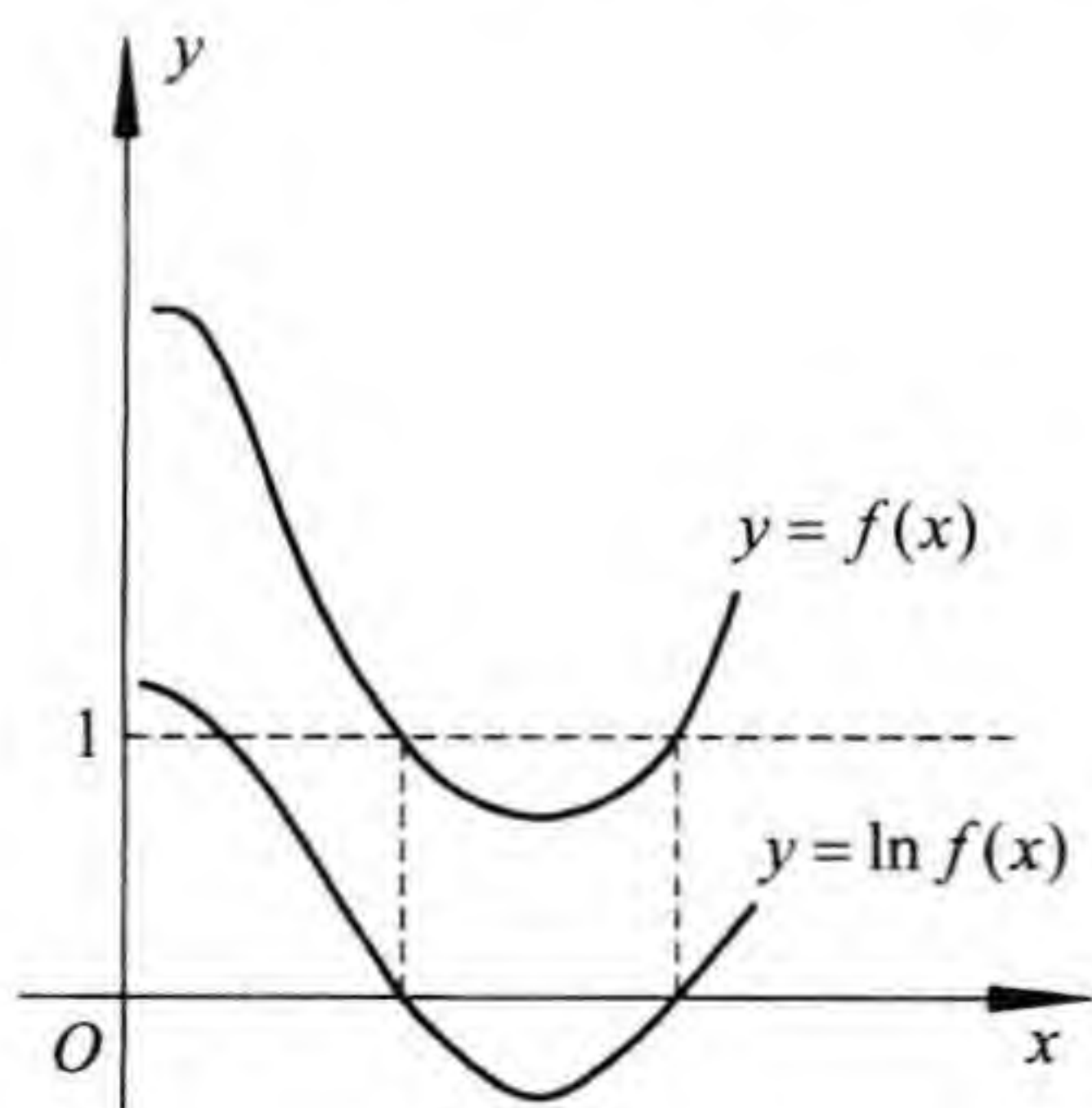


图 1.142

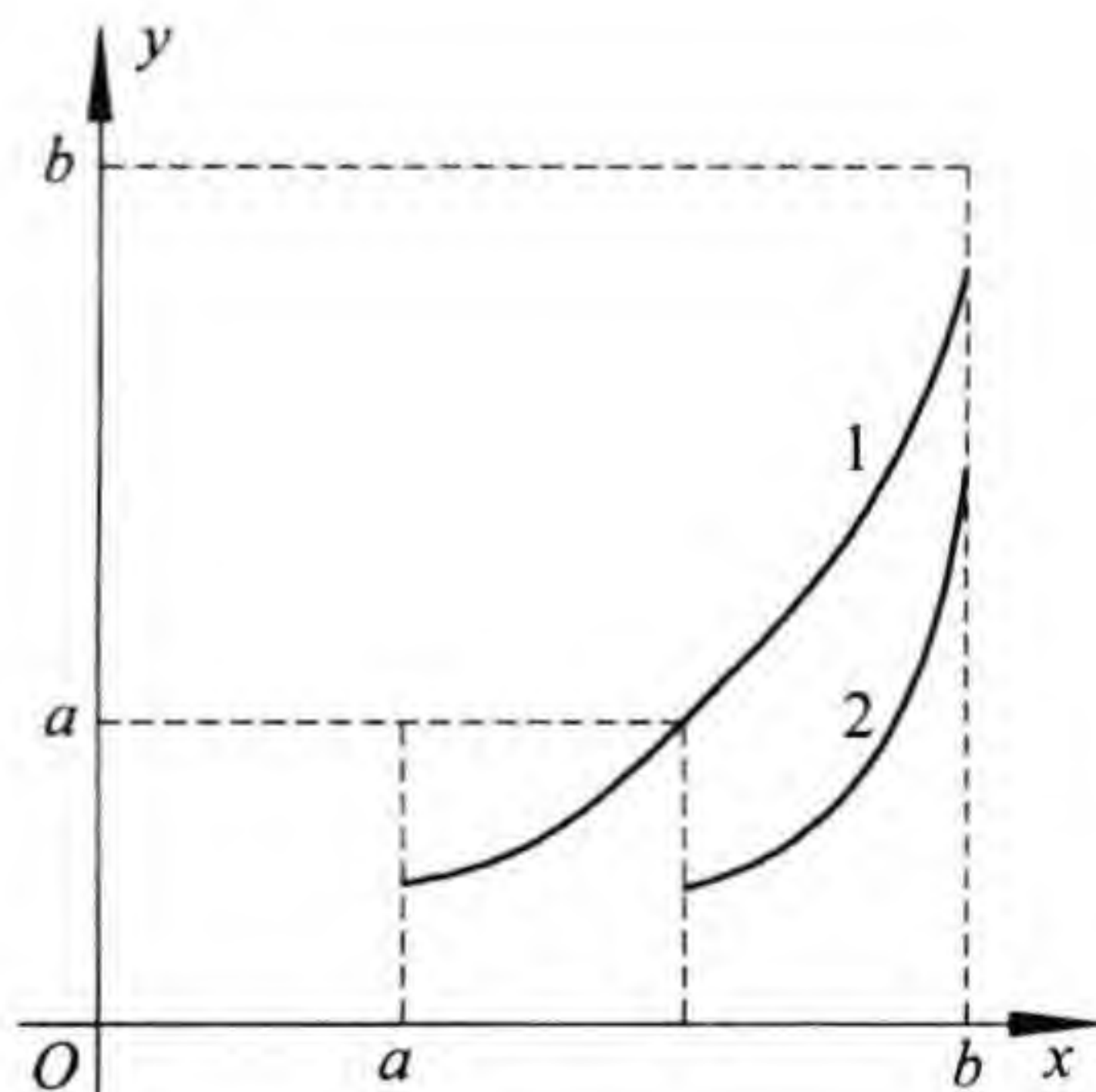


图 1.143



(5) 当  $f(x) > 0$  时,  $y = 1$ ; 当  $f(x) = 0$  时,  $y = 0$ ; 当  $f(x) < 0$  时,  $y = -1$ . 如图 1.144 所示.

(6) 当  $n \leq f(x) < n+1$  时,  $y = n$  ( $n$  为正整数). 如图 1.145 所示.

其中图 1.144 及 1.145 均为黑粗线所示的图像.

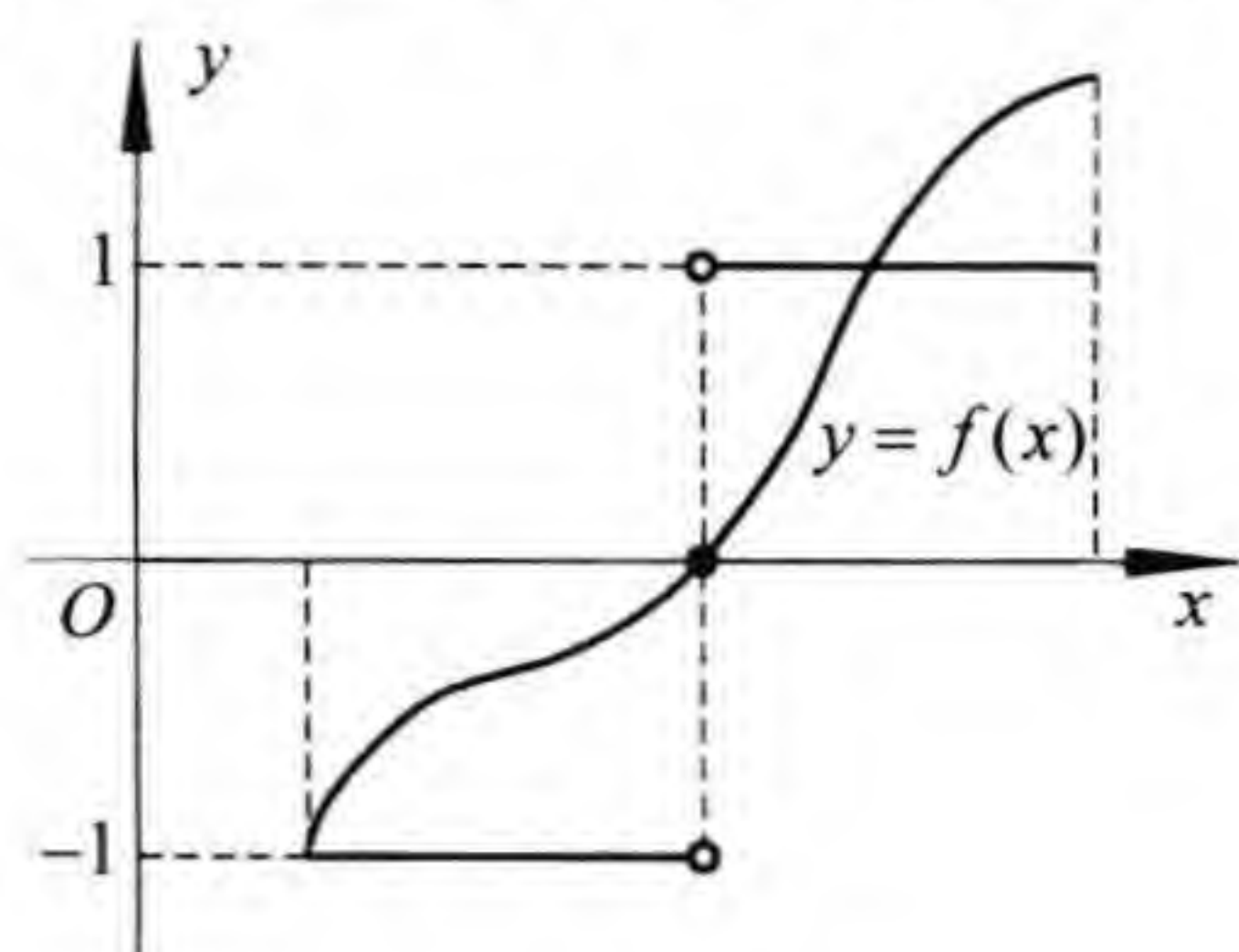


图 1.144

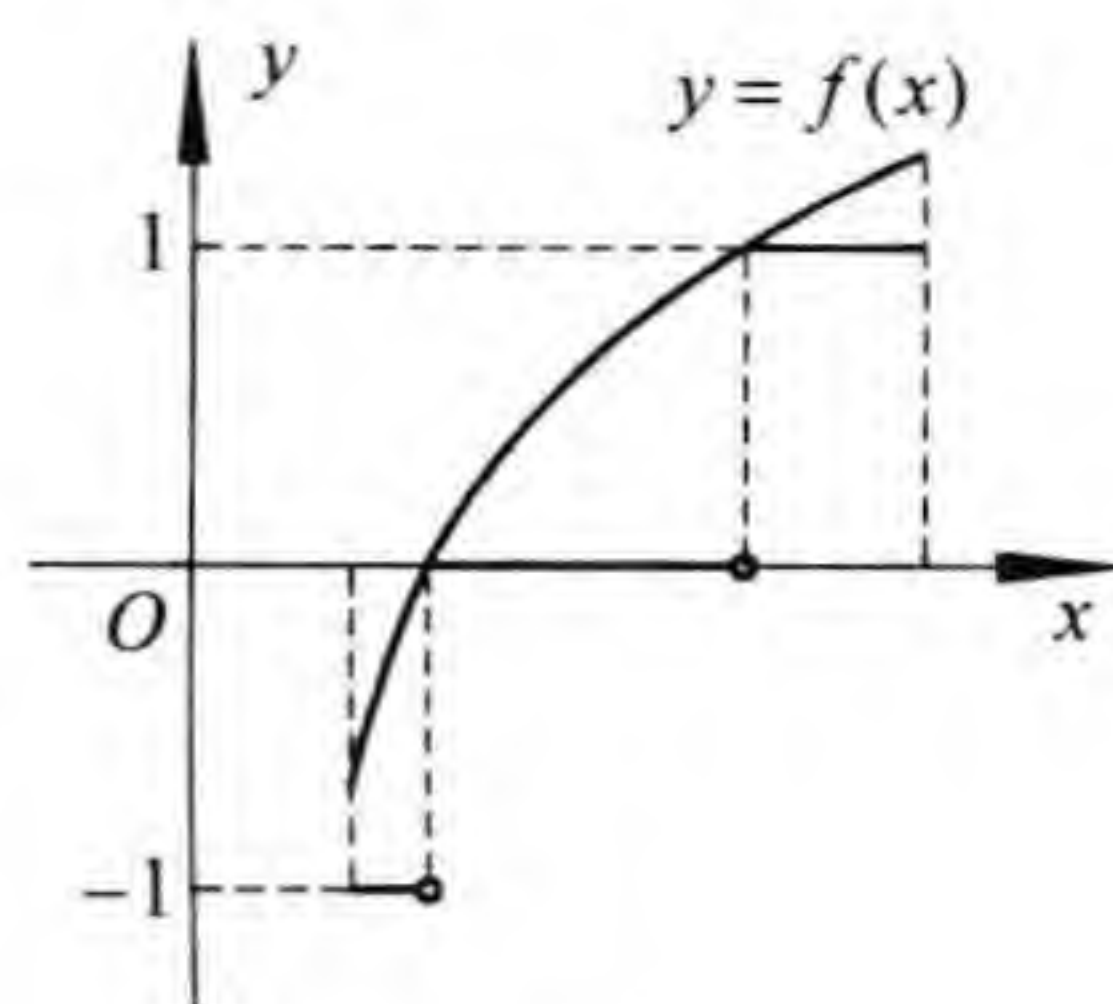


图 1.145

**【330】** 已知函数  $y=f(x)$  和  $y=g(x)$  的图像, 作下列各函数的图像:

(1)  $y=f(x)+g(x)$ ; (2)  $y=f(x)g(x)$ ; (3)  $y=f[g(x)]$ .

**解** (1) 利用图像相加法即得. 如图 1.146 所示.

(2) 利用图像相乘法即得. 如图 1.147 所示.

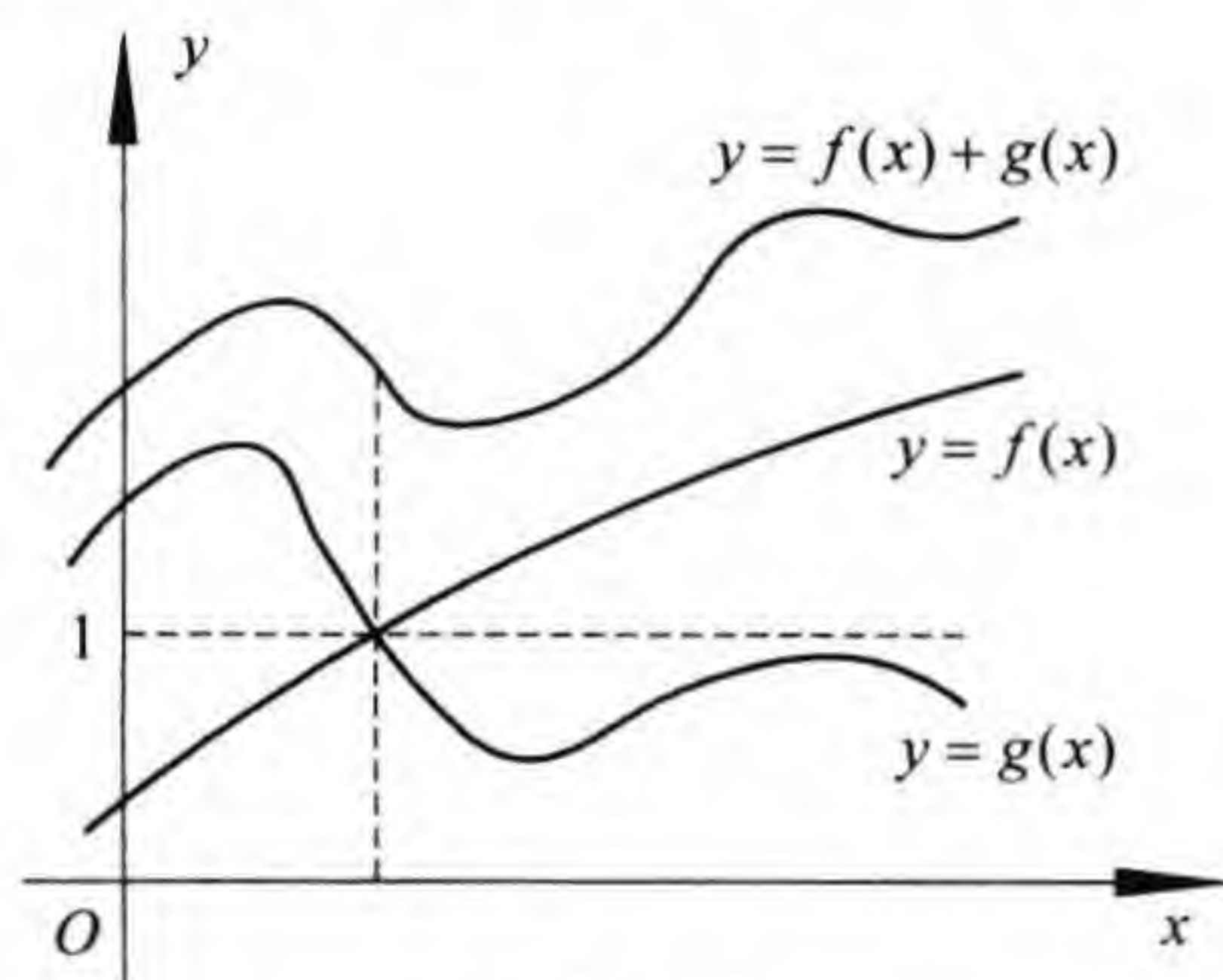


图 1.146

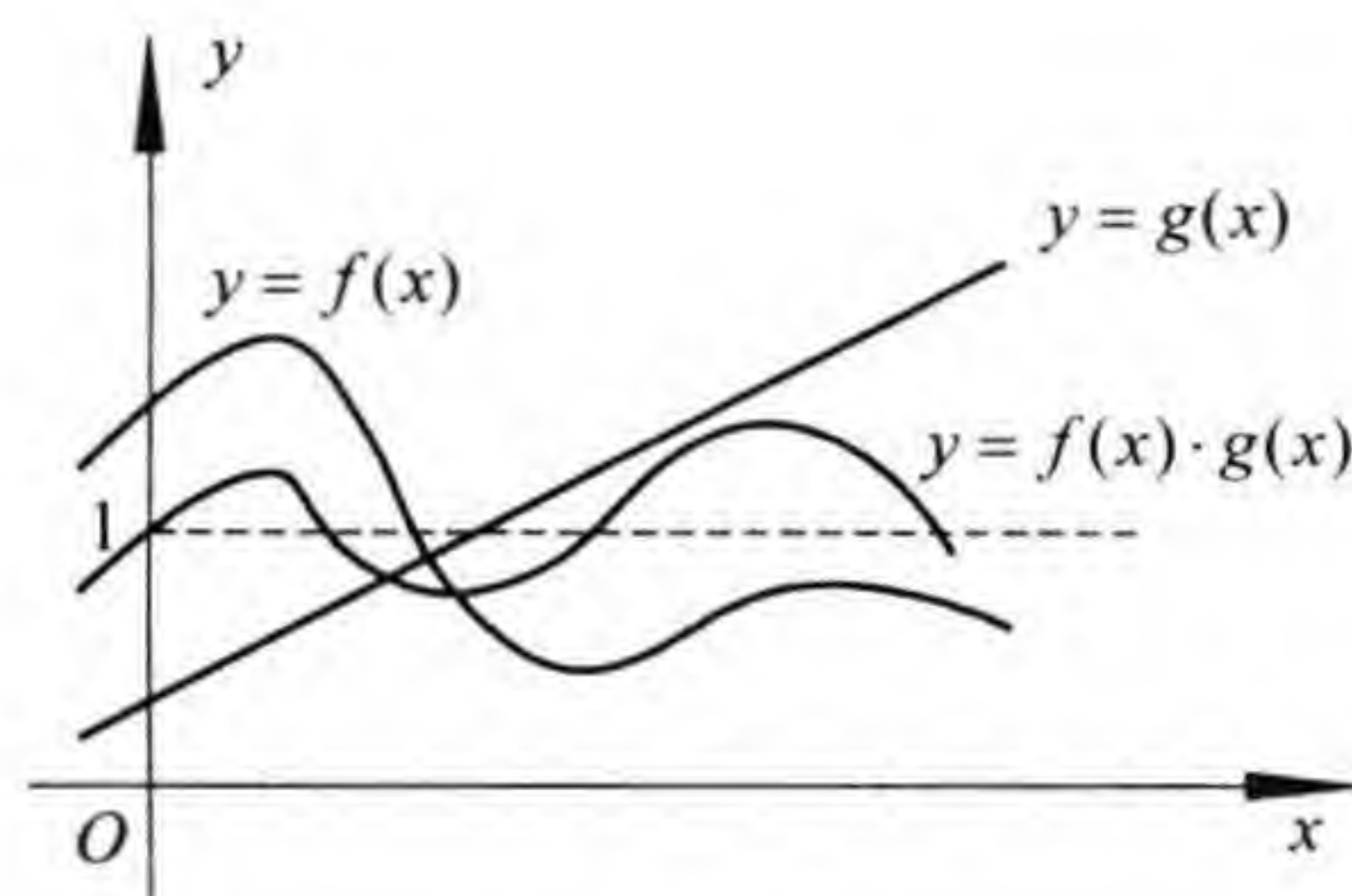


图 1.147

(3) 如图 1.148 所示. 设  $P$  点是  $Ox$  轴上横坐标为  $x$  的点. 通过  $P$  点引铅直线. 它和  $y=g(x)$  的图像相交得  $Q$  点 (当然假定值  $PQ$  在  $f(x)$  的存在域内).  $PQ=g(x)$ . 过  $Q$  点引水平线, 它与  $y=x$  交于  $R$  点, 过  $R$  作铅直线与  $Ox$  轴及  $y=f(x)$  分别交于  $T$  点及  $S$  点, 则  $OT=TR=PQ=g(x)$ , 因而  $TS=f[g(x)]$ . 最后, 把  $S$  点向通过  $P$  点的铅直线投影得  $M$  点, 此即函数  $y=f[g(x)]$  图像上的一点. 至于该图像上的其他点, 同法求得. 但要注意, 函数  $y=f[g(x)]$  的存在域是满足不等式

$$a \leq g(x) \leq b$$

的数  $x$  的集合, 式中  $[a, b]$  是  $f(x)$  的存在域.

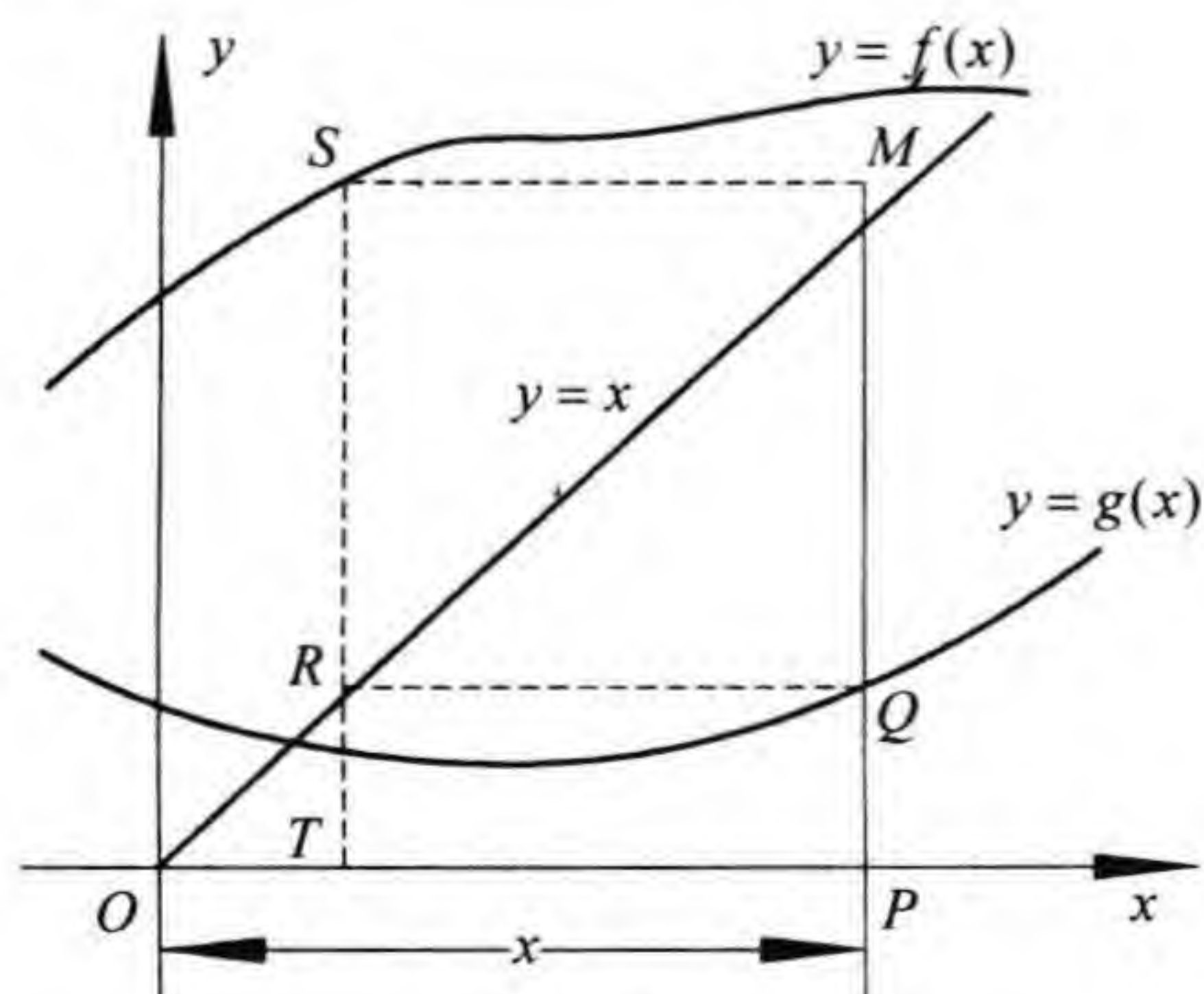


图 1.148



利用图像的加法,作下列函数的图像:

**【331】**  $y=1+x+e^x$ .

解 如图 1.149 所示.

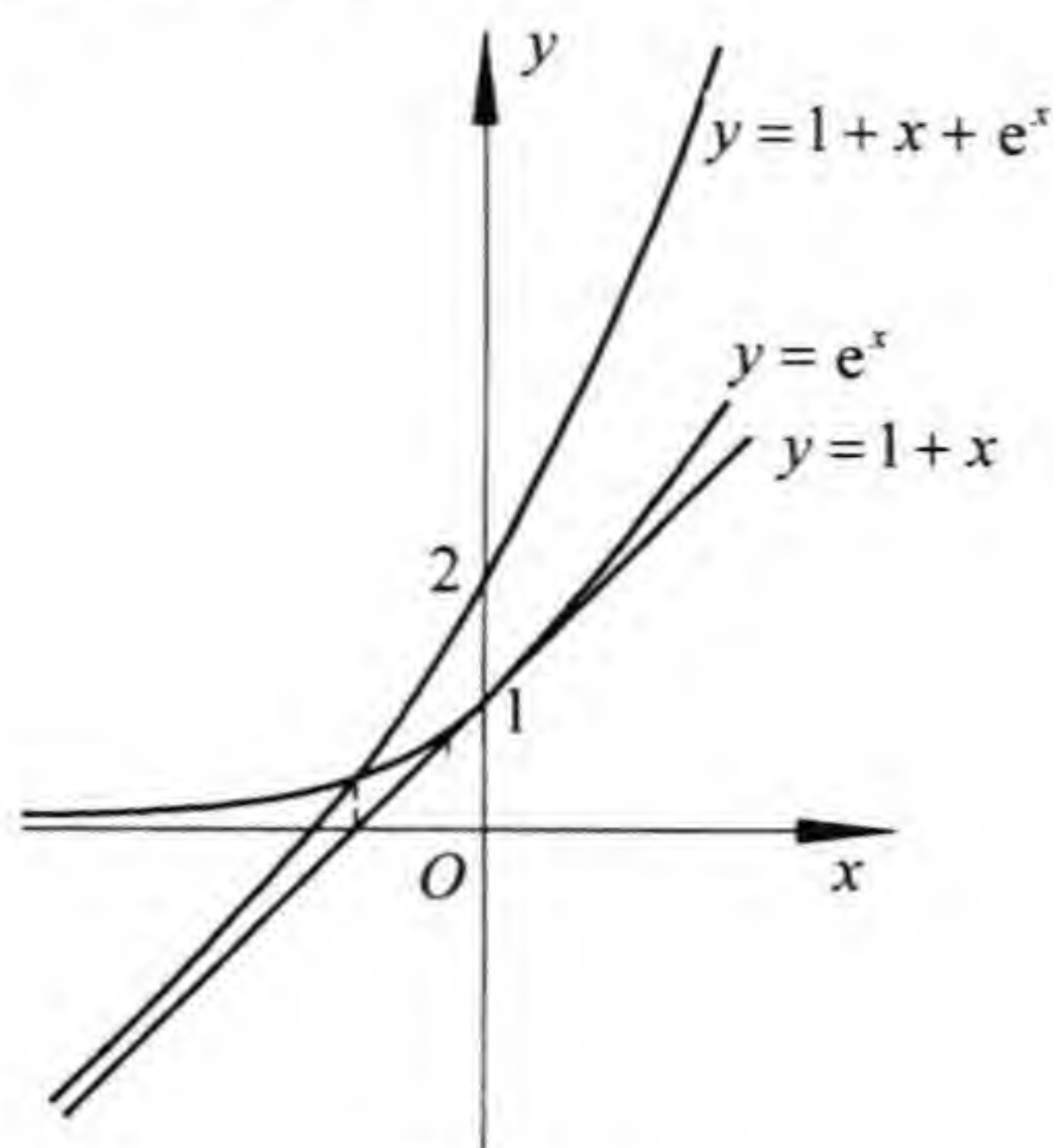


图 1.149

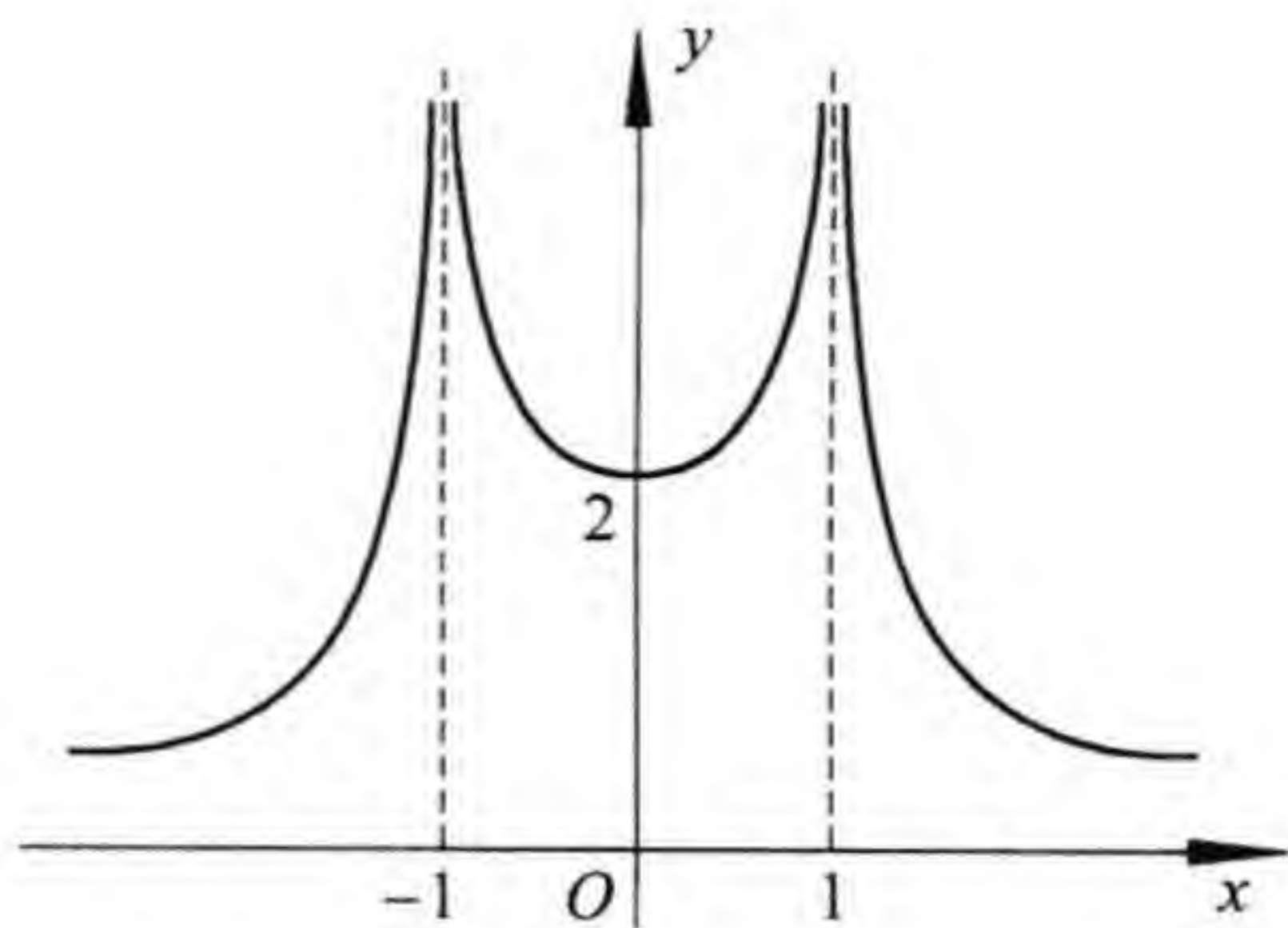


图 1.150

**【332】**  $y=(x+1)^{-2}+(x-1)^{-2}$ .

解 图像关于  $Oy$  轴对称, 如图 1.150 所示.

**【333】**  $y=x+\sin x$ .

解 如图 1.151 所示.  $P_1Q_1=P_2Q_2=\dots=1$ .

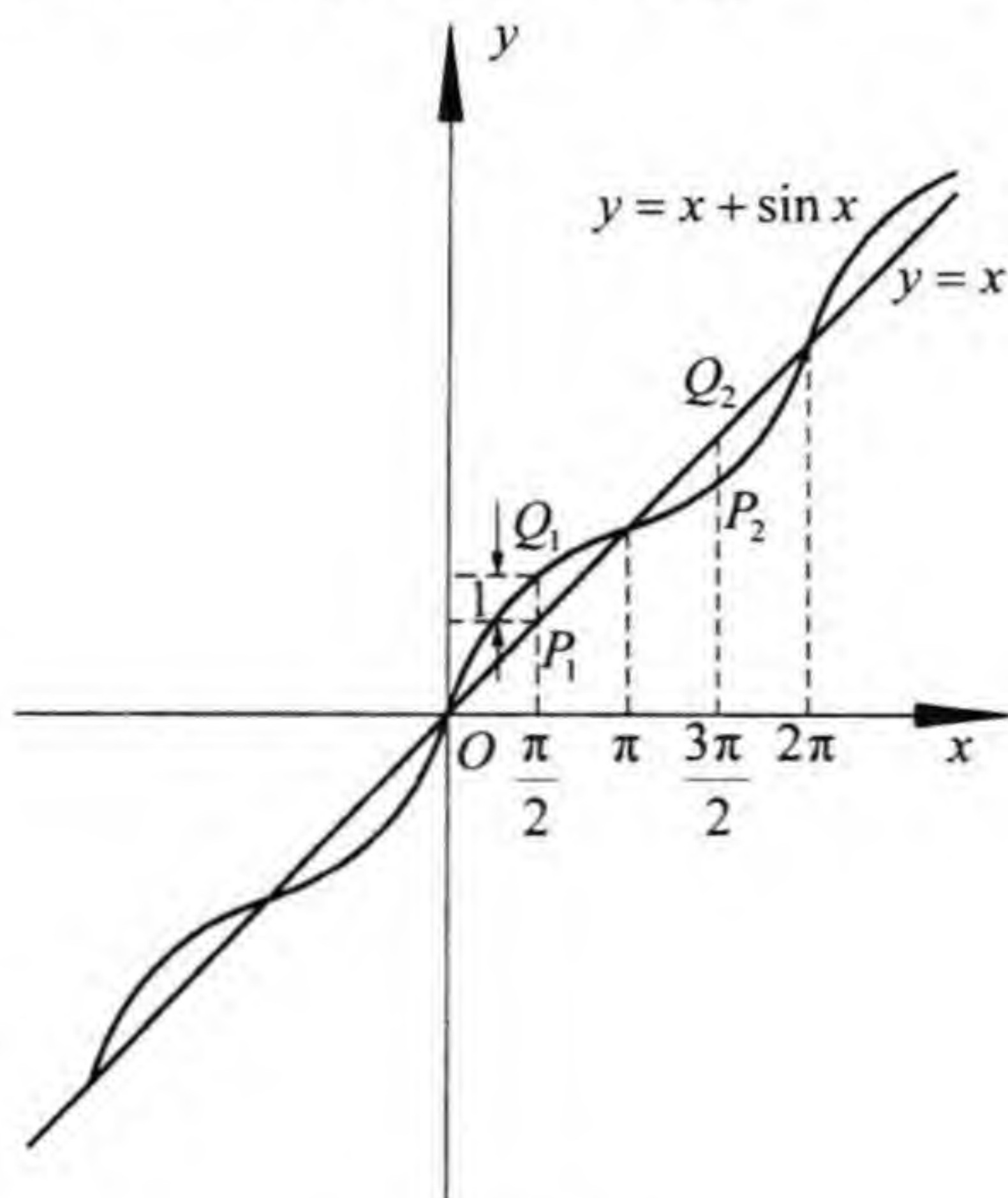


图 1.151

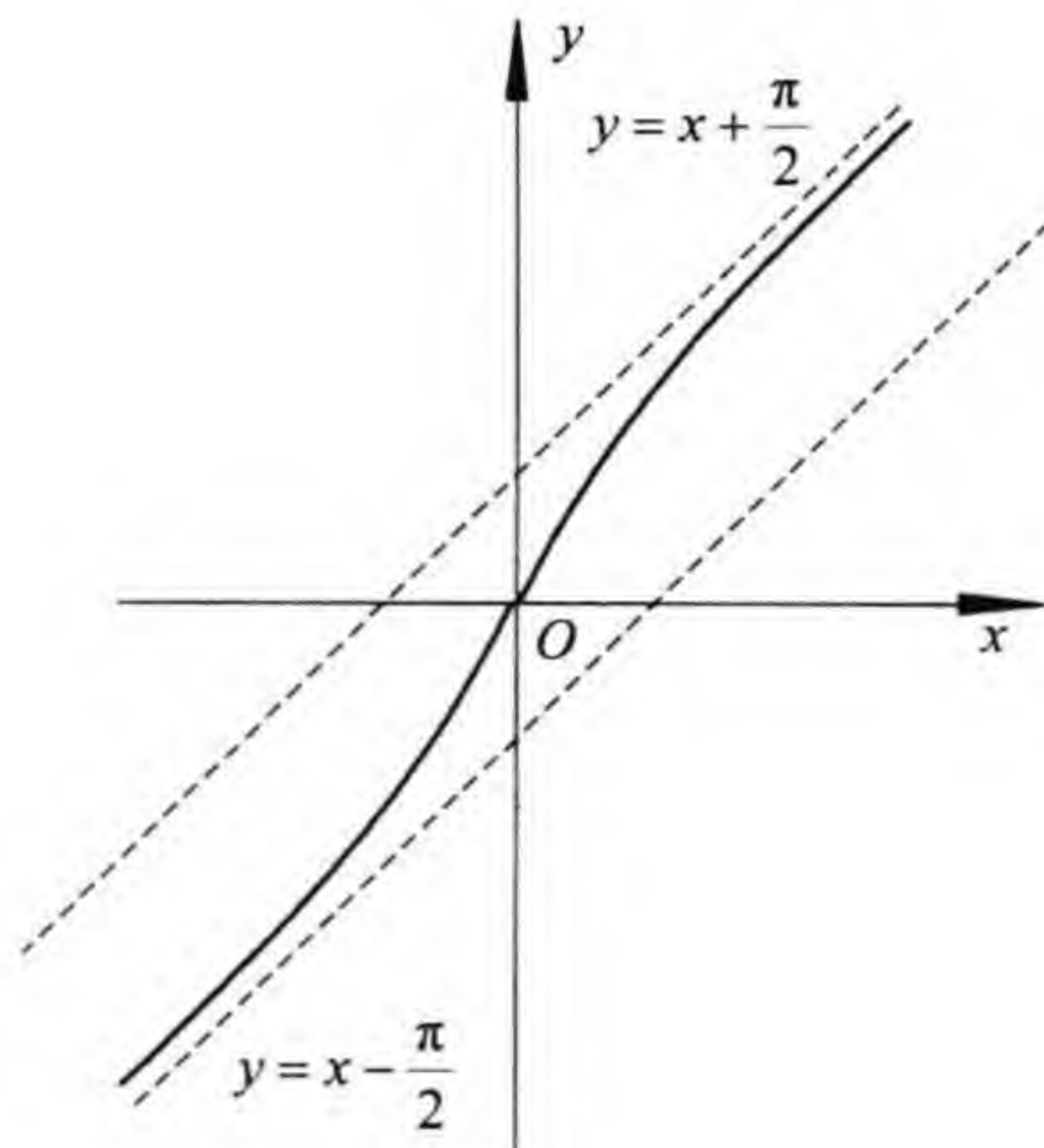


图 1.152

**【334】**  $y=x+\arctan x$ .

解 如图 1.152 所示. 图中仅画了主值的一支, 一般地, 在平行线  $y=x+(2k+1)\frac{\pi}{2}$  及  $y=x+(2k-1)\frac{\pi}{2}$  之间 ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 有类似的一支.

**【335】**  $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x$ .

解 图像关于  $Oy$  轴对称, 且关于直线  $x=k\pi$  对称. 周期为  $2\pi$ .

如图 1.153 所示.

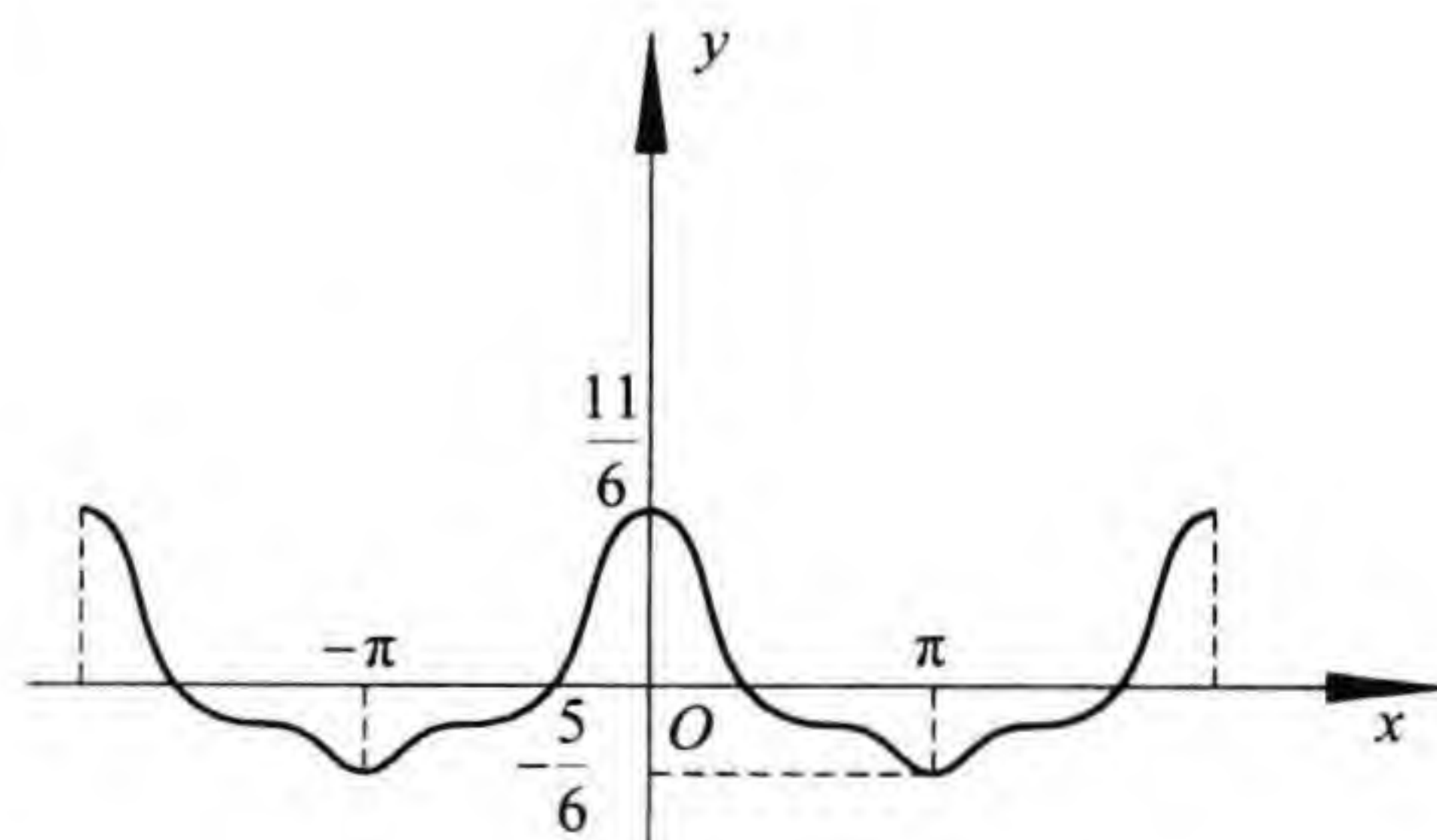


图 1.153



**【336】**  $y = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x.$

解 图像关于原点对称, 周期为  $2\pi$ , 且有  $f(x+\pi) = -f(x)$ , 故在  $[0, 2\pi]$  内图像关于直线  $x=\pi$  反对称\*. 因此, 我们只需做出  $[0, \pi]$  内的图像即可.

如图 1.154 所示.

\* ) 即关于点  $\pi$  对称, 也称之为以  $\pi$  为周期的反周期函数.

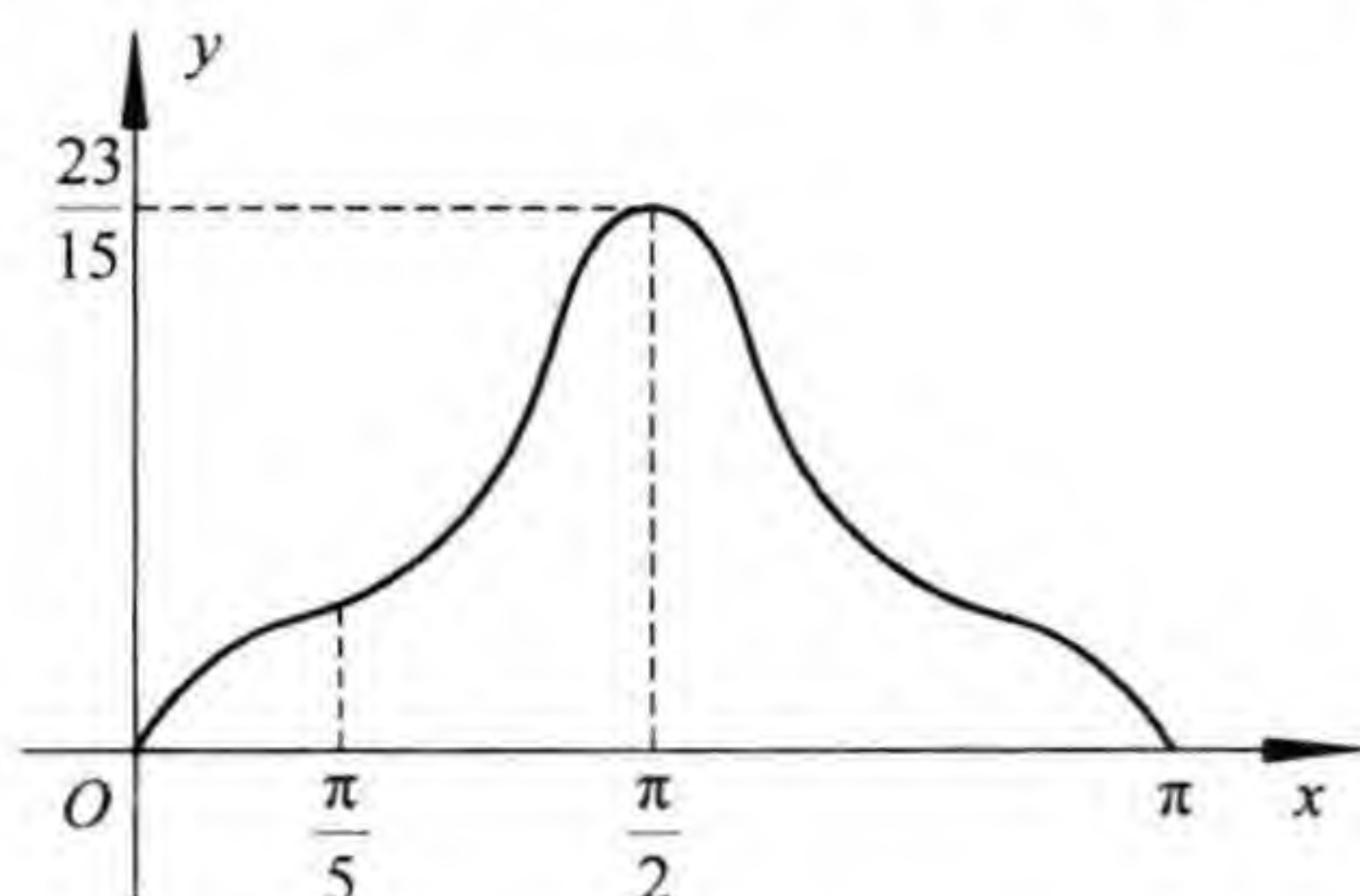


图 1.154

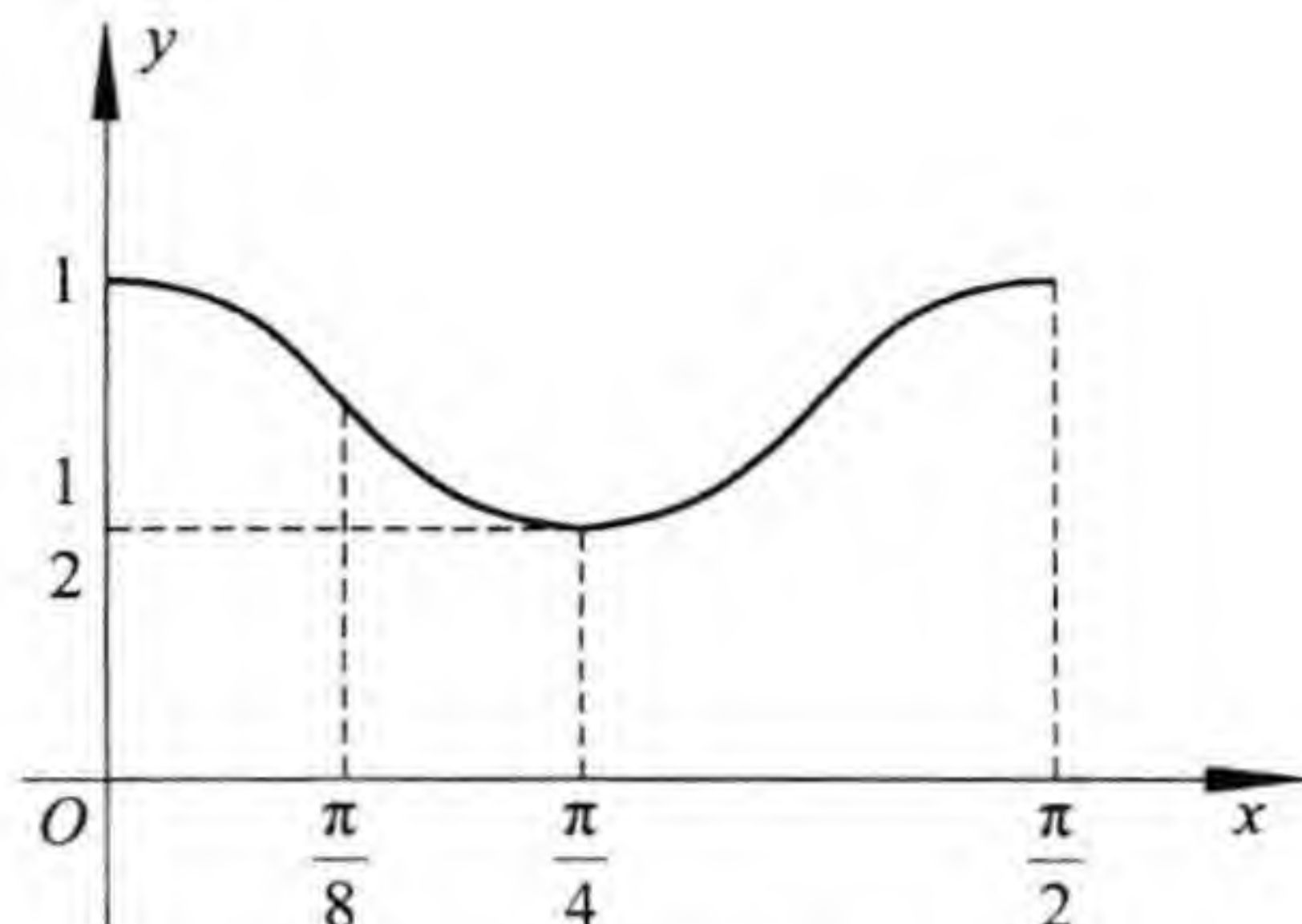


图 1.155

**【337】**  $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

解 图像关于  $Oy$  轴对称, 周期为  $\frac{\pi}{2}$ . 如图 1.155 所示.

**【338】**  $y = |1-x| + |1+x|.$

解 当  $-1 \leq x \leq 1$  时,  $y=2$ ;

当  $x < -1$  时,  $y = -2x$ ;

当  $x > 1$  时,  $y = 2x$ .

如图 1.156 所示.

**【339】**  $y = |1-x| - |1+x|.$

解 当  $-1 \leq x \leq 1$  时,  $y = -2x$ ; 当  $x < -1$  时,  $y = 2$ ; 当  $x > 1$  时,  $y = -2$ .

如图 1.157 所示.

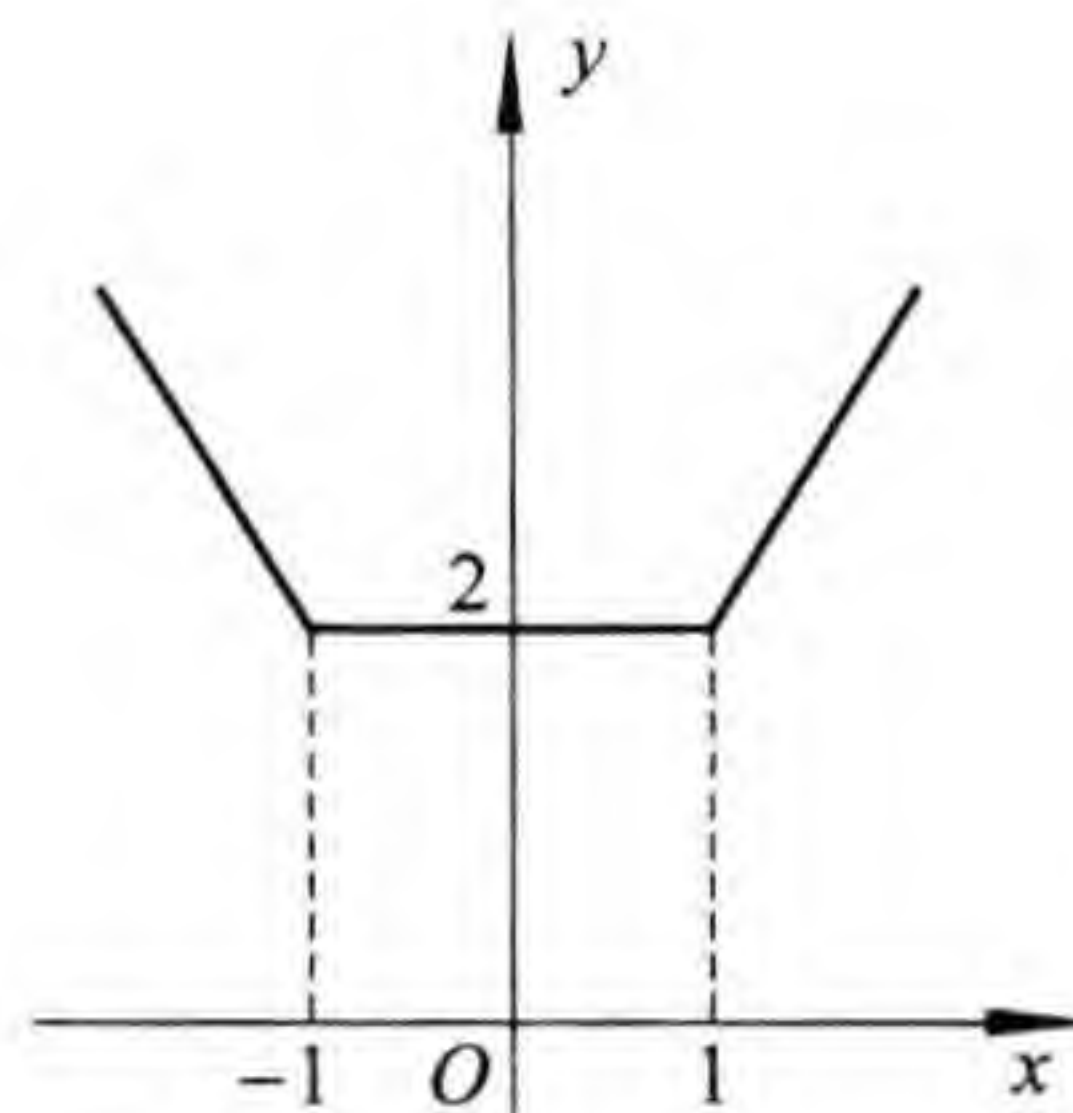


图 1.156

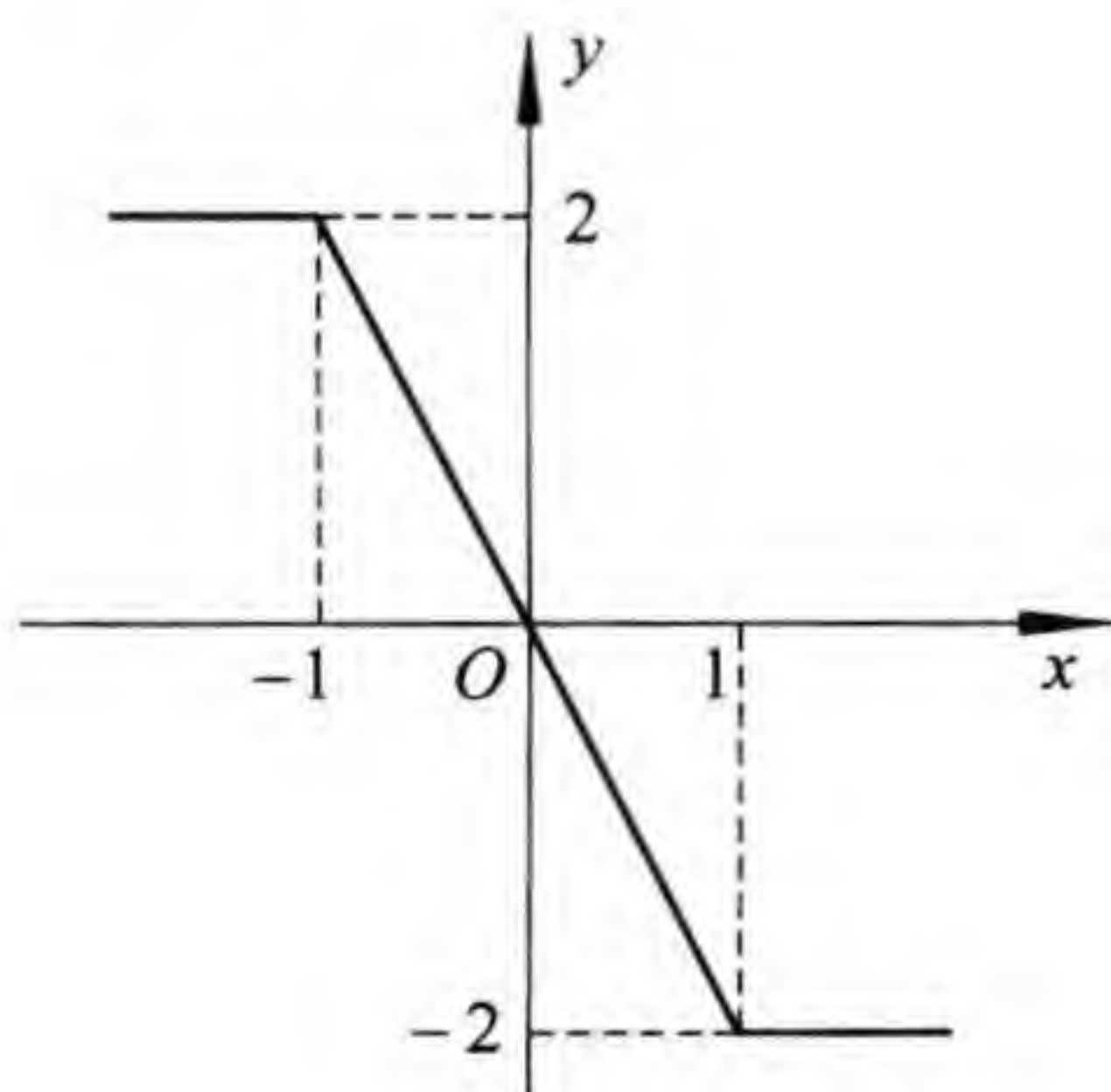


图 1.157

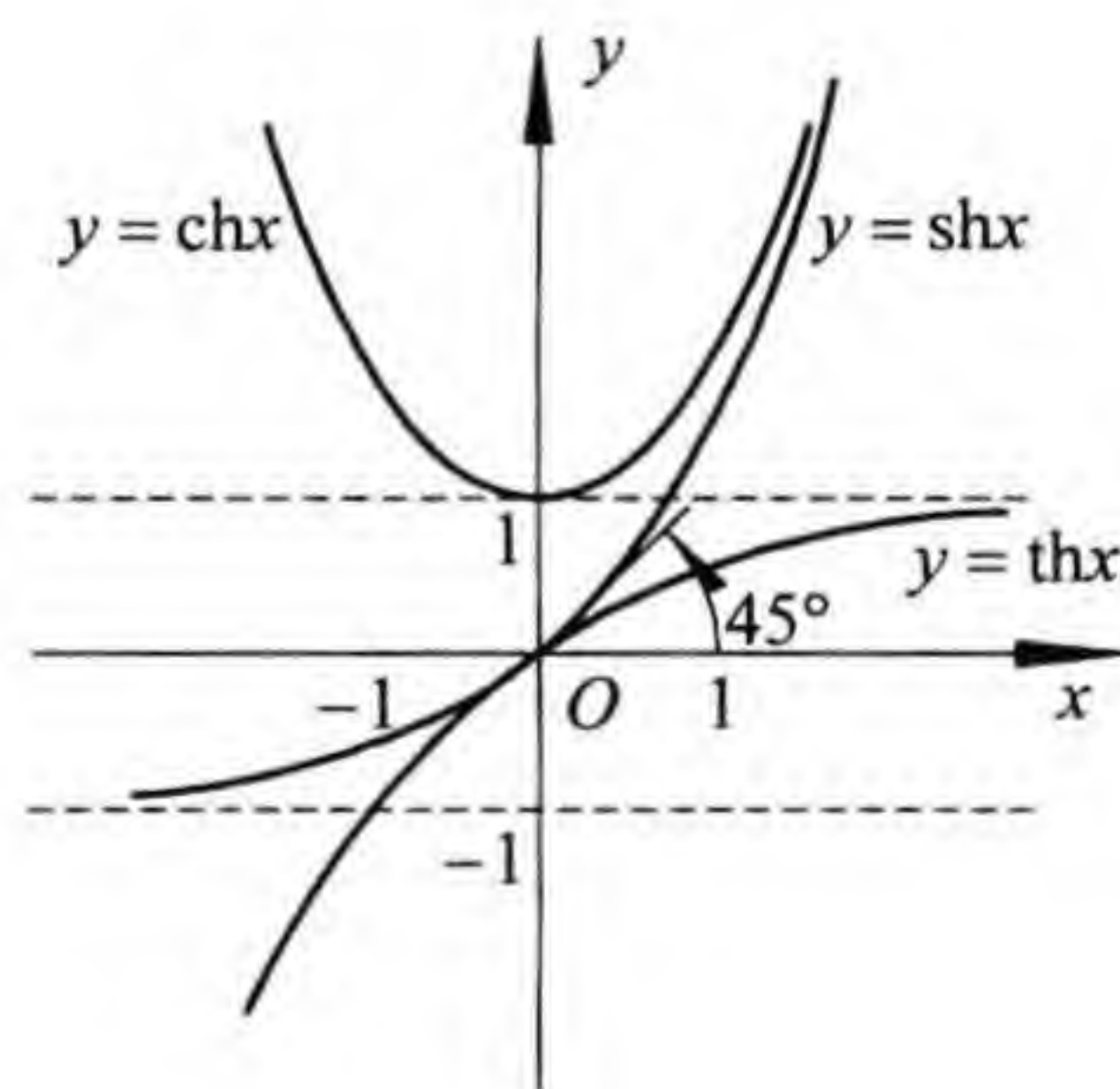


图 1.158

**【340】** 作双曲线函数的图像:

(1)  $y = \operatorname{ch} x$ , 式中  $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ;

(2)  $y = \operatorname{sh} x$ , 式中  $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ;

(3)  $y = \operatorname{th} x$ , 式中  $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ .

解 如图 1.158 所示.



利用图像的乘法,作下列函数的图像:

【341】  $y = x \sin x$ .

解 当  $x = k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时,  $y=0$ . 图像关于  $Oy$  轴对称.

当  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  时,  $y=x$ ; 又当  $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$  时,  $y=-x$ .

如图 1.159 所示.

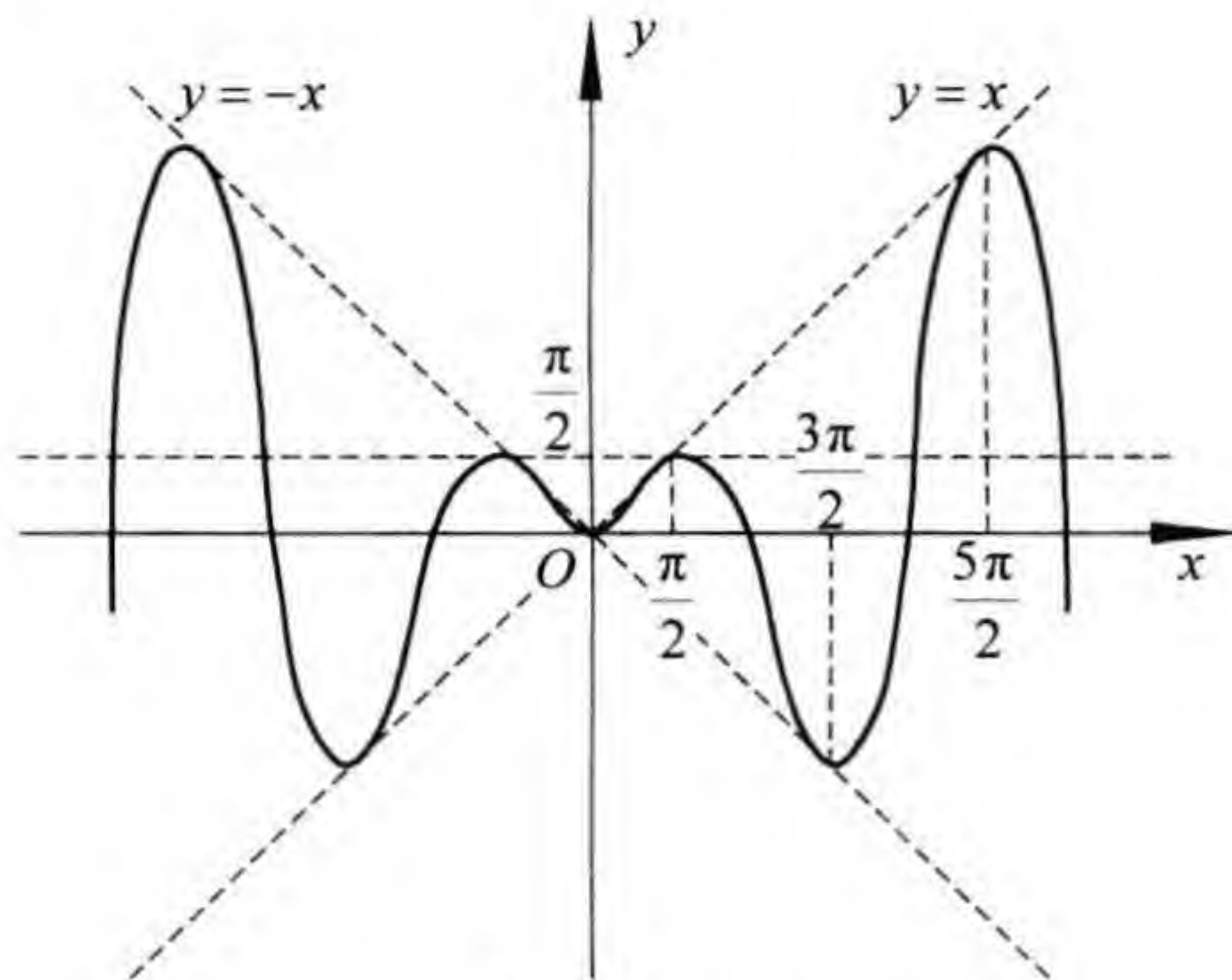


图 1.159

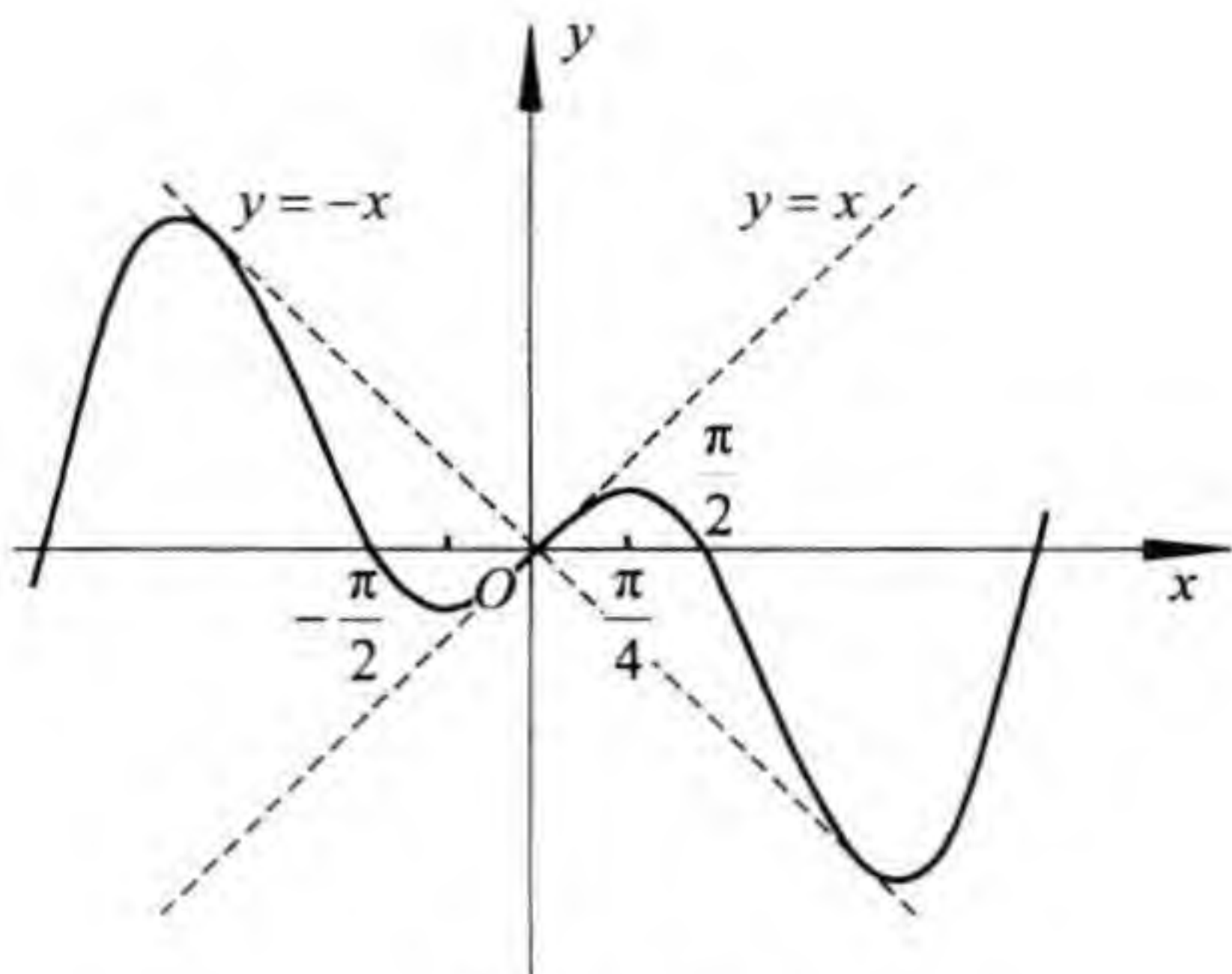


图 1.160

【342】  $y = x \cos x$ .

解 图像关于原点对称.

当  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时,  $y=0$ ; 当  $x = 2k\pi$  时,  $y=x$ ; 当  $x = (2k+1)\pi$  时,  $y=-x$ .

如图 1.160 所示.

【343】  $y = x^2 \sin^2 x$ .

解 只要将图像  $y = x \sin x$  作出后,再按 329 题(1)的作法画出.

如图 1.161 所示.

其实,我们也可由下列几点画出该函数的图像:

$$0 \leq y \leq x^2;$$

当  $x = k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时,  $y=0$ ;

当  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  时,  $y=x^2$ . 图像关于  $Oy$  轴对称.

【344】  $y = \frac{\sin x}{1+x^2}$ .

解 图像关于原点对称.

当  $x = k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时,  $y=0$ ; 当  $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$  时,  $y = -\frac{1}{1+x^2}$ ; 当  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  时,  $y = \frac{1}{1+x^2}$ .

当  $x \rightarrow \infty$  时,  $y \rightarrow 0$ . 如图 1.162 所示.

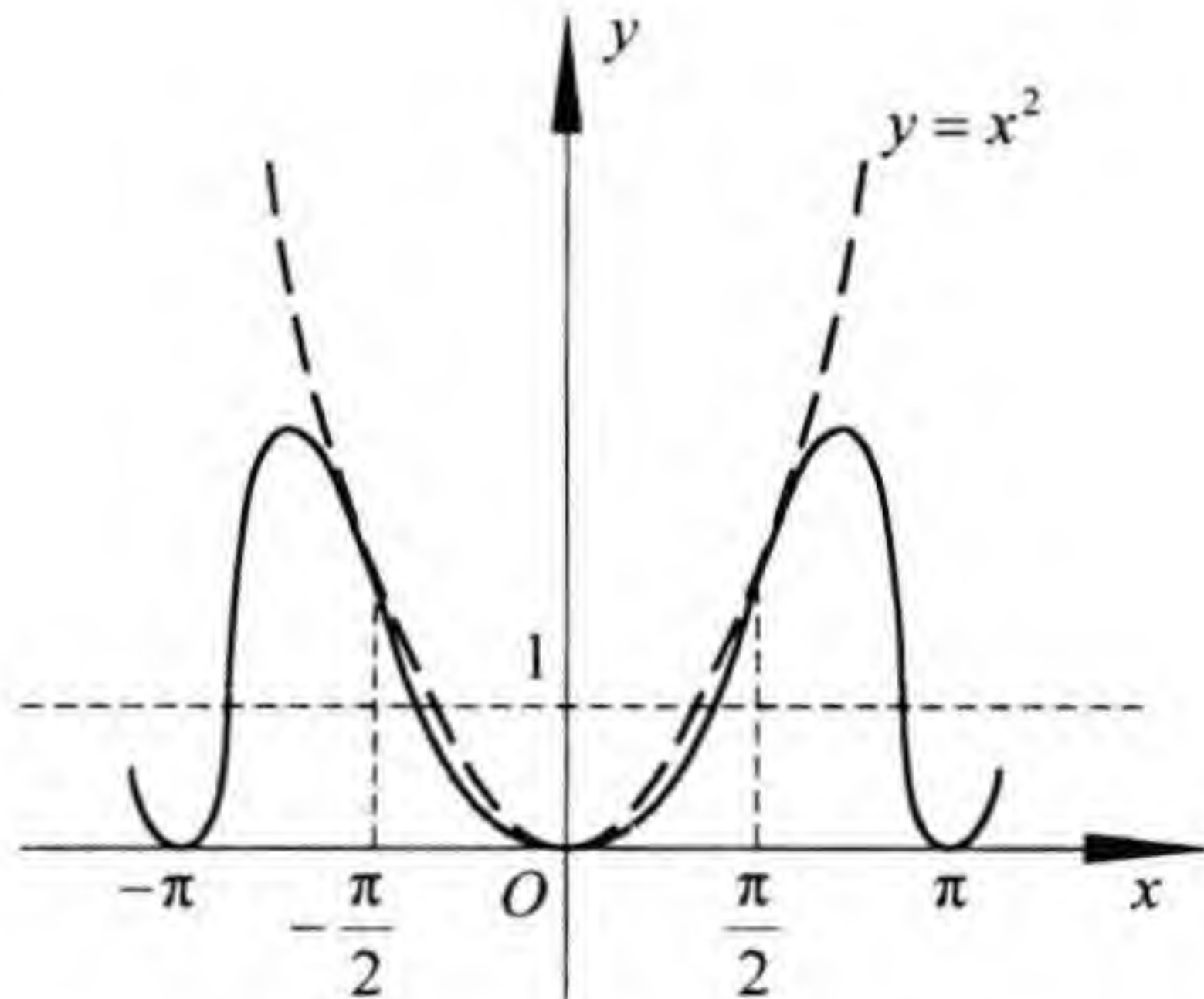


图 1.161

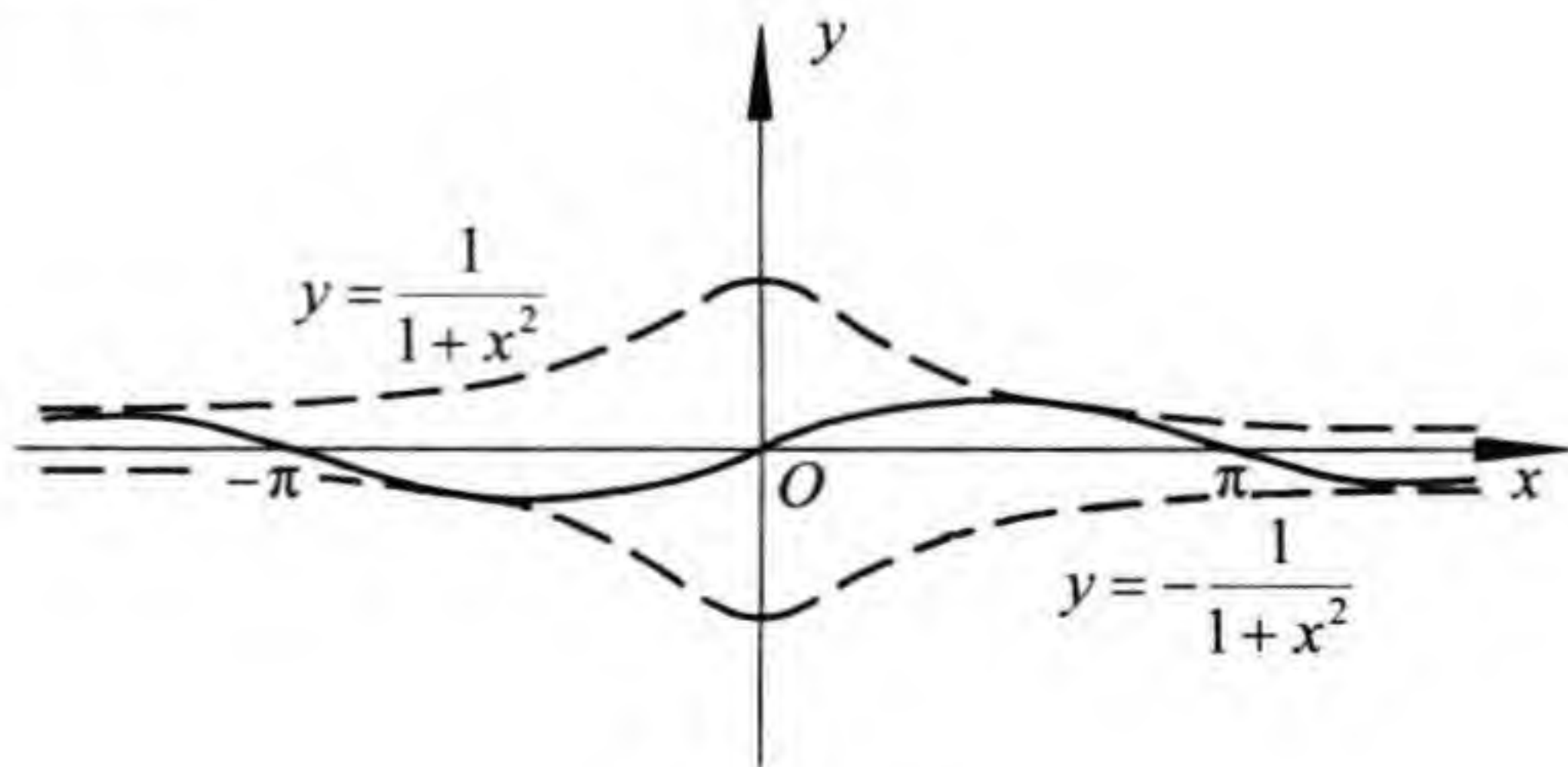


图 1.162



**【345】**  $y = e^{-x^2} \cos 2x$ .

解 因  $-e^{-x^2} \leq y \leq e^{-x^2}$ , 故图像在图像  $y = e^{-x^2}$  及  $y = -e^{-x^2}$  之间.

如图 1.163 所示.

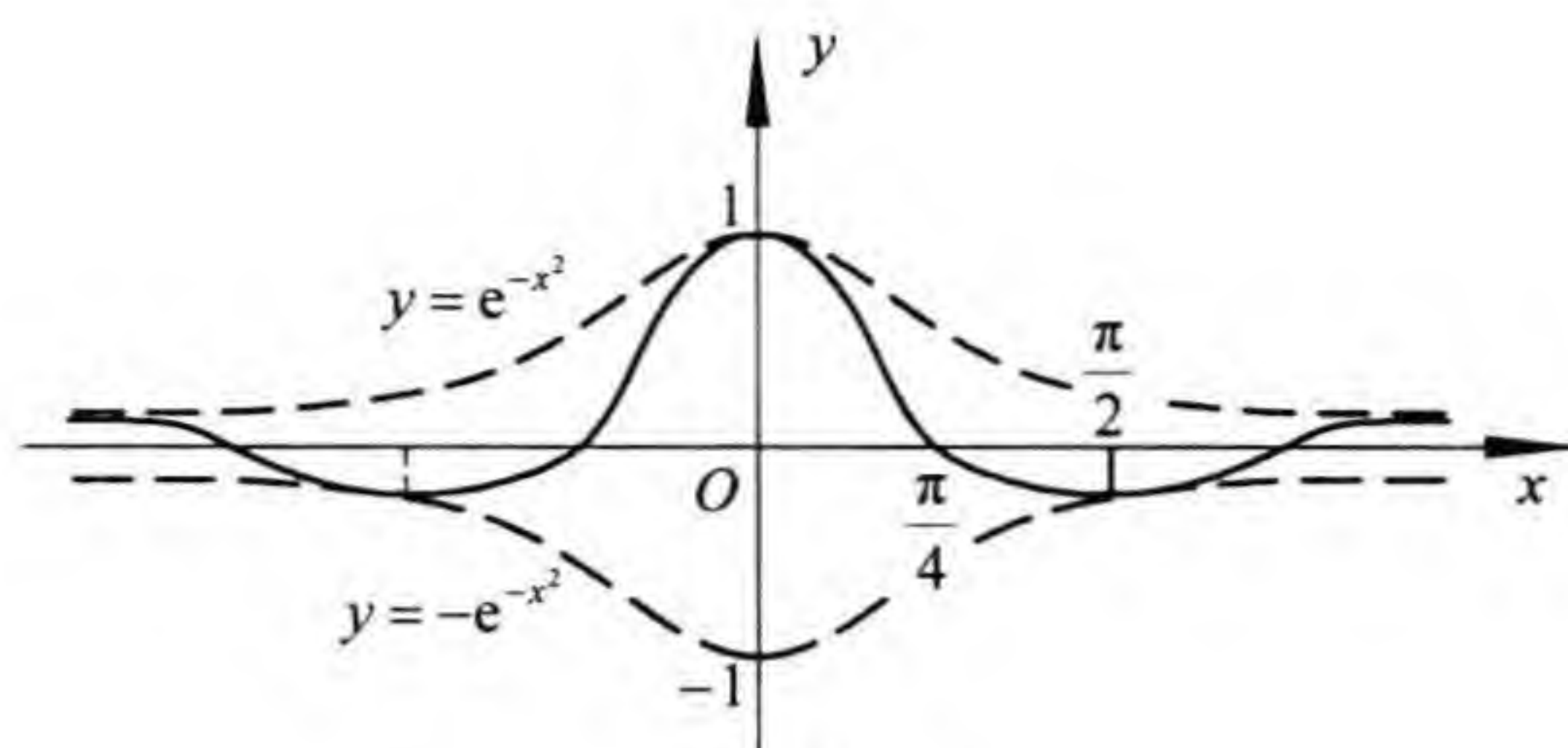


图 1.163

**【346】**  $y = x \operatorname{sgn}(\sin x)$ .

解 图像关于  $Oy$  轴对称.

当  $x = k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  时,  $y=0$ ; 当  $2k\pi < x < (2k+1)\pi$  时,  $y=x$ ; 当  $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$  时,  $y=-x$ .

如图 1.164 所示.

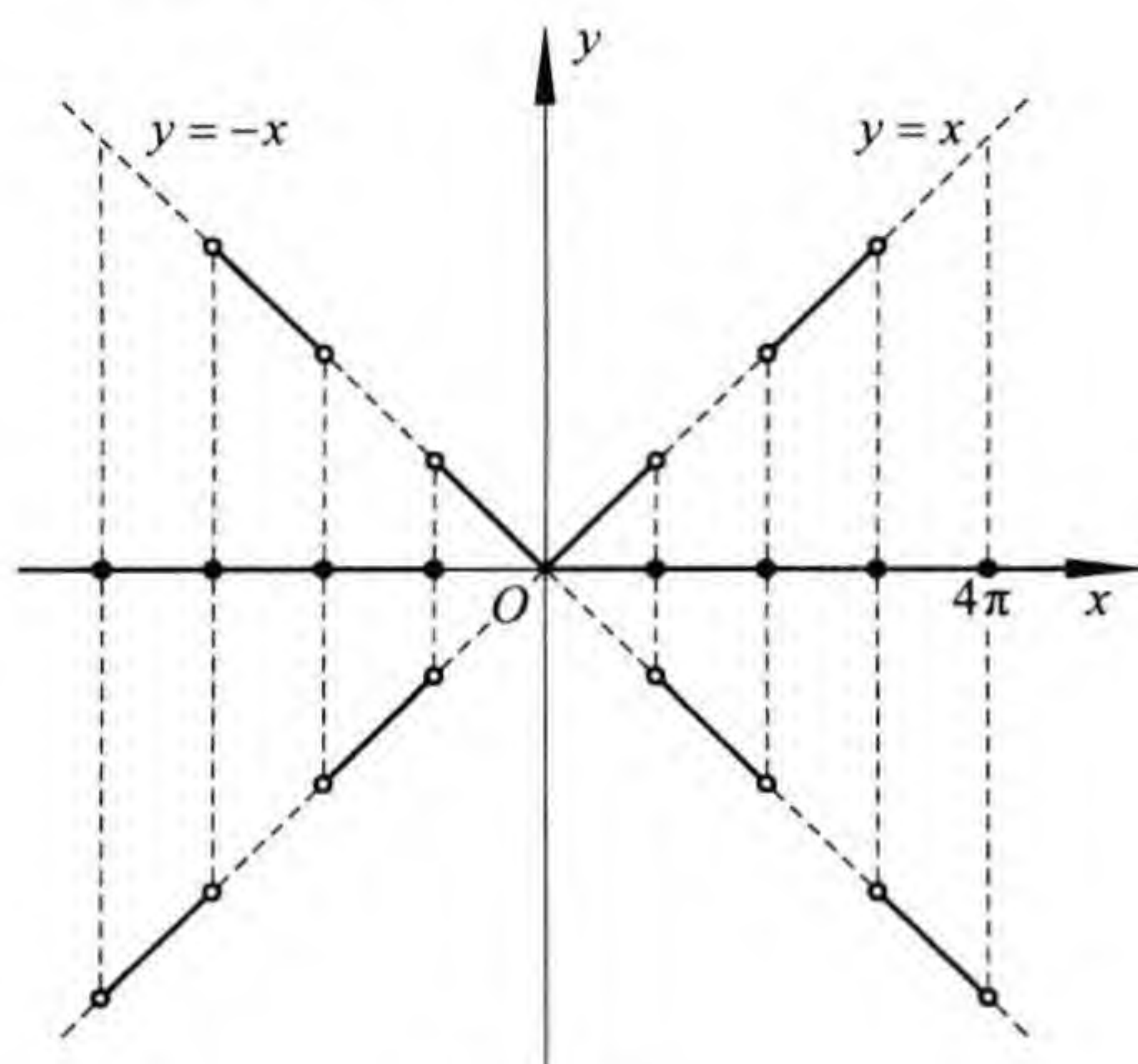


图 1.164

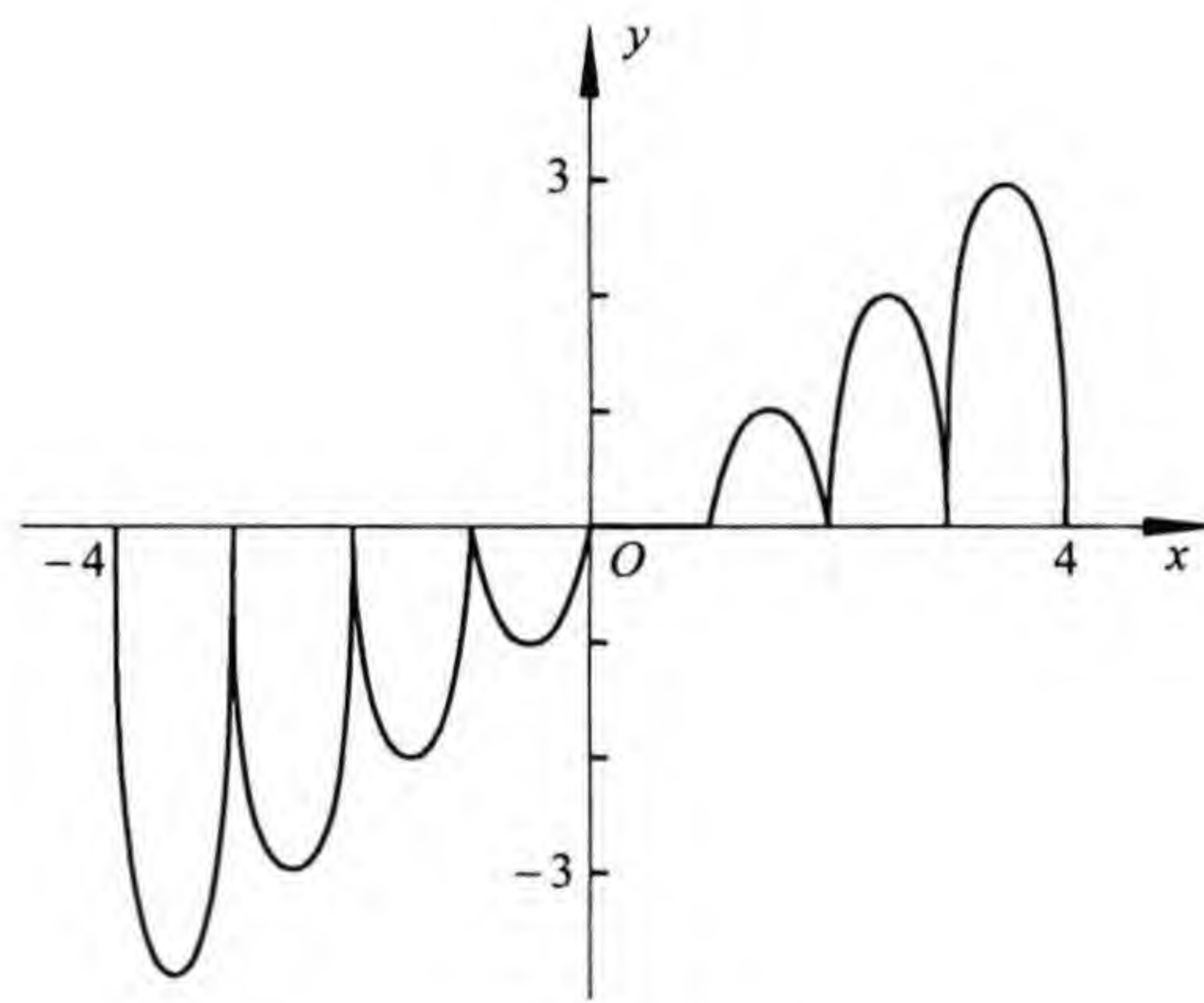


图 1.165

**【347】**  $y = [x] \cdot |\sin \pi x|$ .

解 当  $x = k (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  时,  $y=0$ ; 当  $n < x < n+1 (n \text{ 为正整数})$  时,  $y = n |\sin \pi x|$ .

如图 1.165 所示.

**【348】**  $y = \cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$ .

解 图像关于原点对称. 周期为  $\pi$ .

当  $x = k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  时,  $y=0$ ; 当  $2k\pi < x < (2k+1)\pi$  时,  $y = \cos x$ ; 当  $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$  时,  $y = -\cos x$ .

如图 1.166 所示.

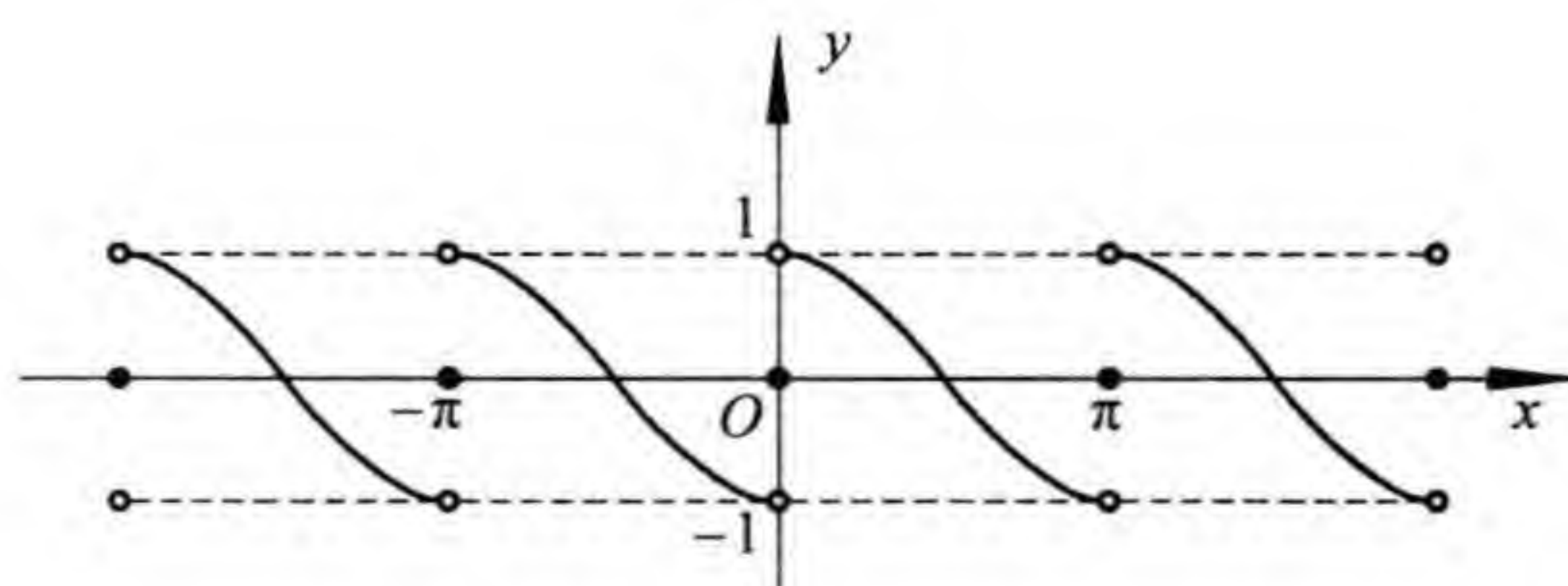


图 1.166



**【349】** 设  $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

作函数  $y = f(x)f(a-x)$  当 (1)  $a=0$ , (2)  $a=1$ , (3)  $a=2$  时的图像.

**解题思路** (1)  $f(x)$  为偶函数, 故  $y = f^2(x)$ . 由  $f(x)$  的定义得  $y = \begin{cases} (1+x)^2, & -1 \leq x < 0, \\ (1-x)^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

$$(2) y = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x-x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases} \quad (3) y = 0.$$

**解** (1)  $y = f(x)f(-x)$ . 因为  $f(x)$  为偶函数, 所以,  $y = f^2(x)$ . 由函数  $f(x)$  的定义易得

$$y = \begin{cases} (1+x)^2, & -1 \leq x < 0, \\ (1-x)^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

如图 1.167 所示.

(2)  $y = f(x)f(1-x)$ . 由函数  $f(x)$  的定义易得

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x-x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

如图 1.168 所示.

(3)  $y = f(x)f(2-x)$ . 由函数  $f(x)$  的定义易得  $y = 0$ .

如图 1.169 所示.

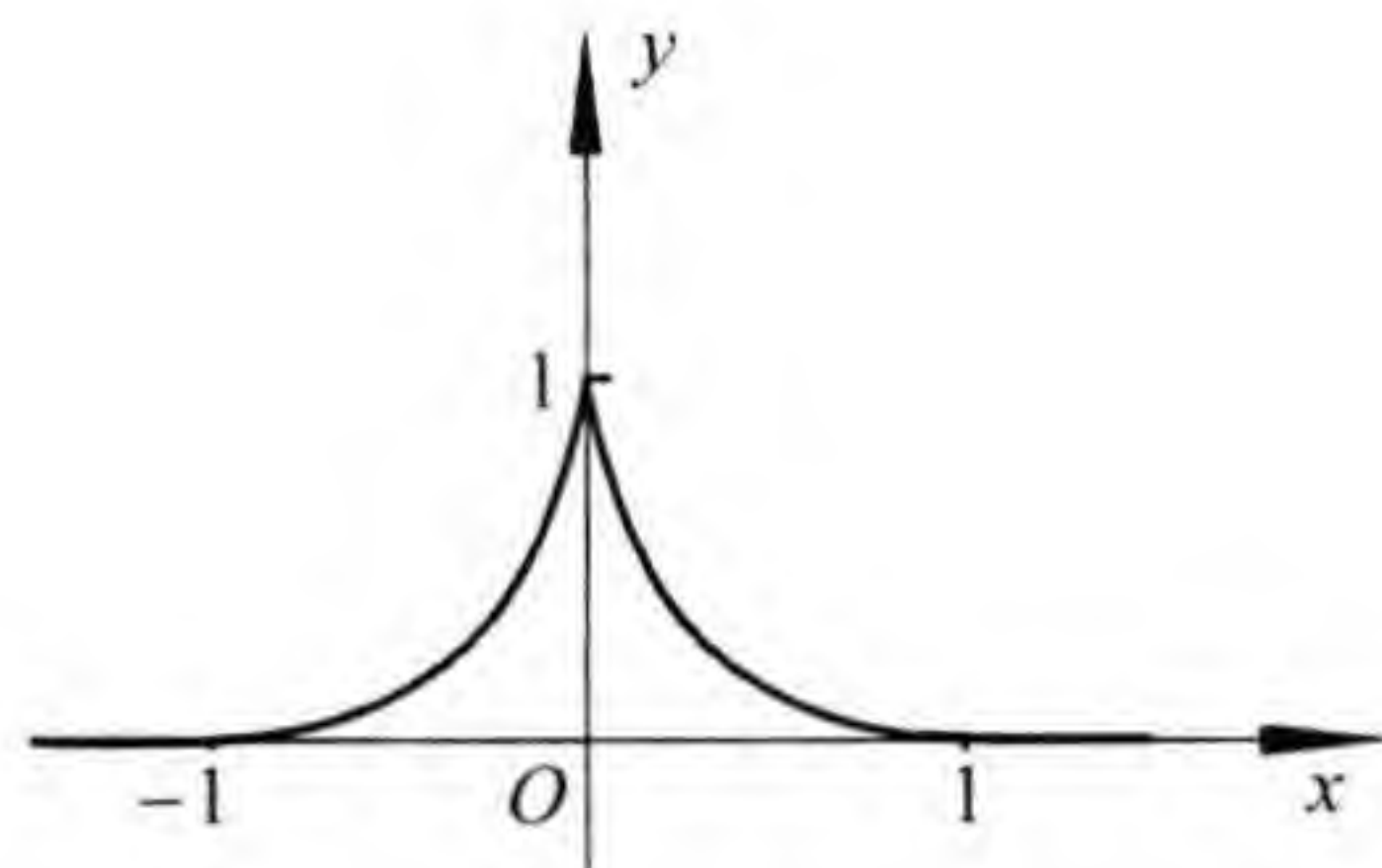


图 1.167

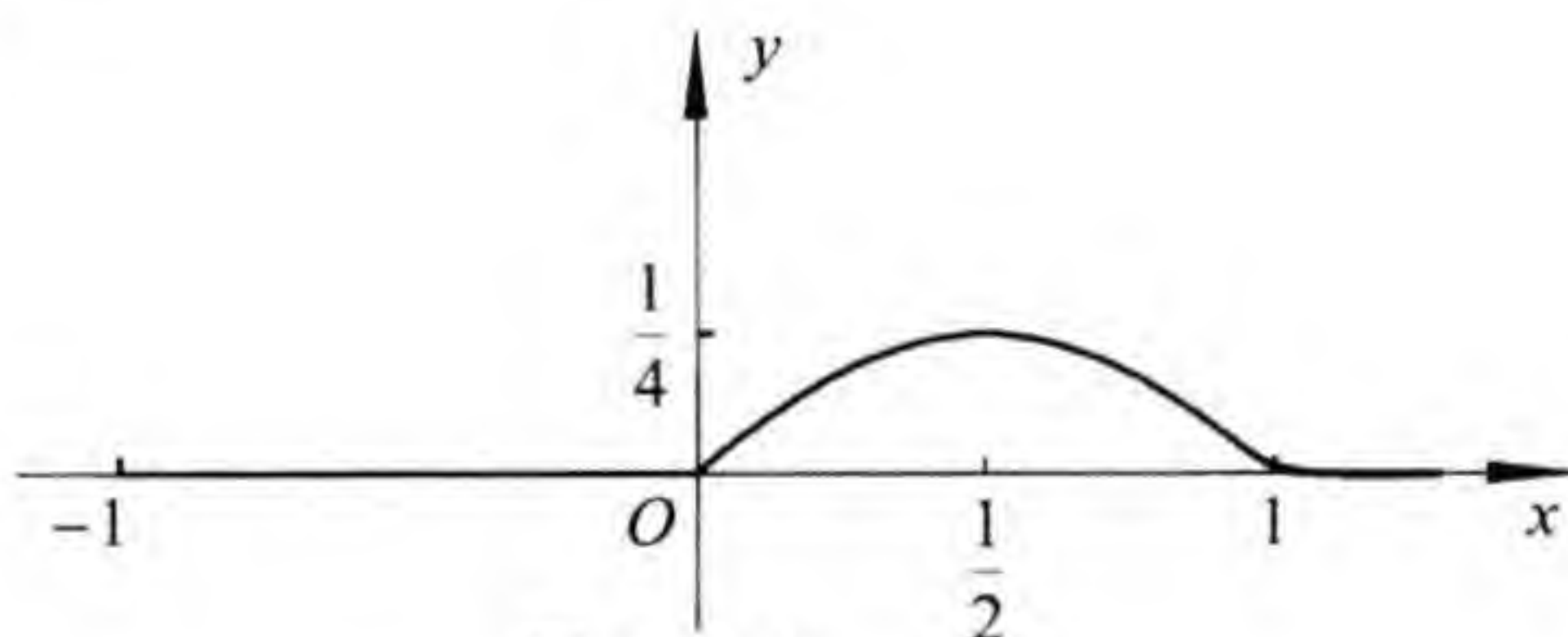


图 1.168

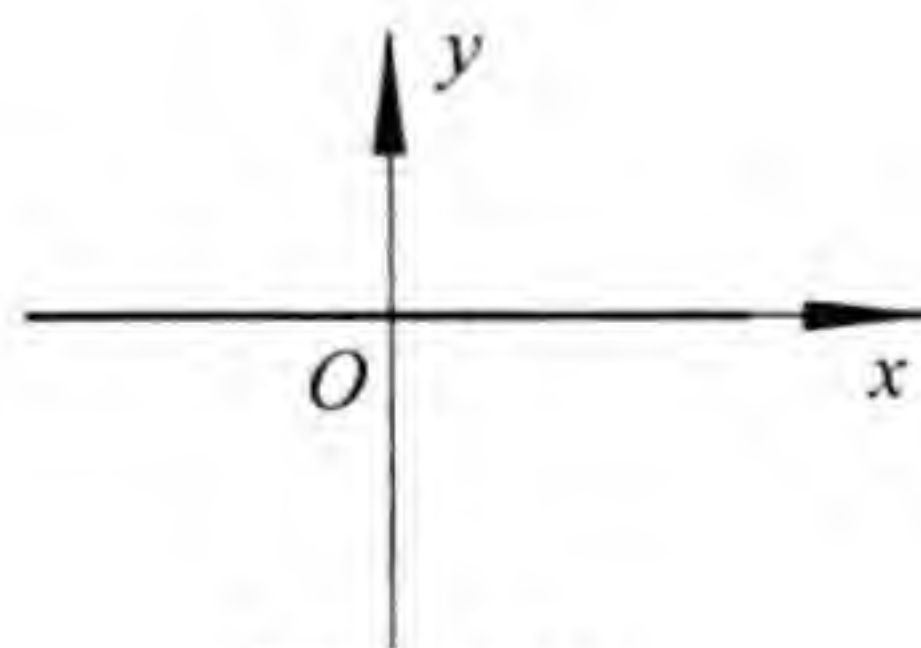


图 1.169

**【350】** 作函数  $y = x + \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$  的图像.

**解** 当  $2k < x < 2k+1$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) 时,  $\sin \pi x > 0$ ,  $\operatorname{sgn}(\sin \pi x) = 1$ , 因而,  $y = x + \sqrt{x}$ .

而当  $2k+1 < x < 2k+2$  时,  $y = x - \sqrt{x}$ . 图 1.170 中系函数  $y = \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$  的图像(黑粗线所示). 其中在  $y = x$  上的一支系  $y = \sqrt{x} + x$  的一段.

至于函数  $y = x + \sqrt{x} \cdot \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$  的图像如图 1.171 所示.

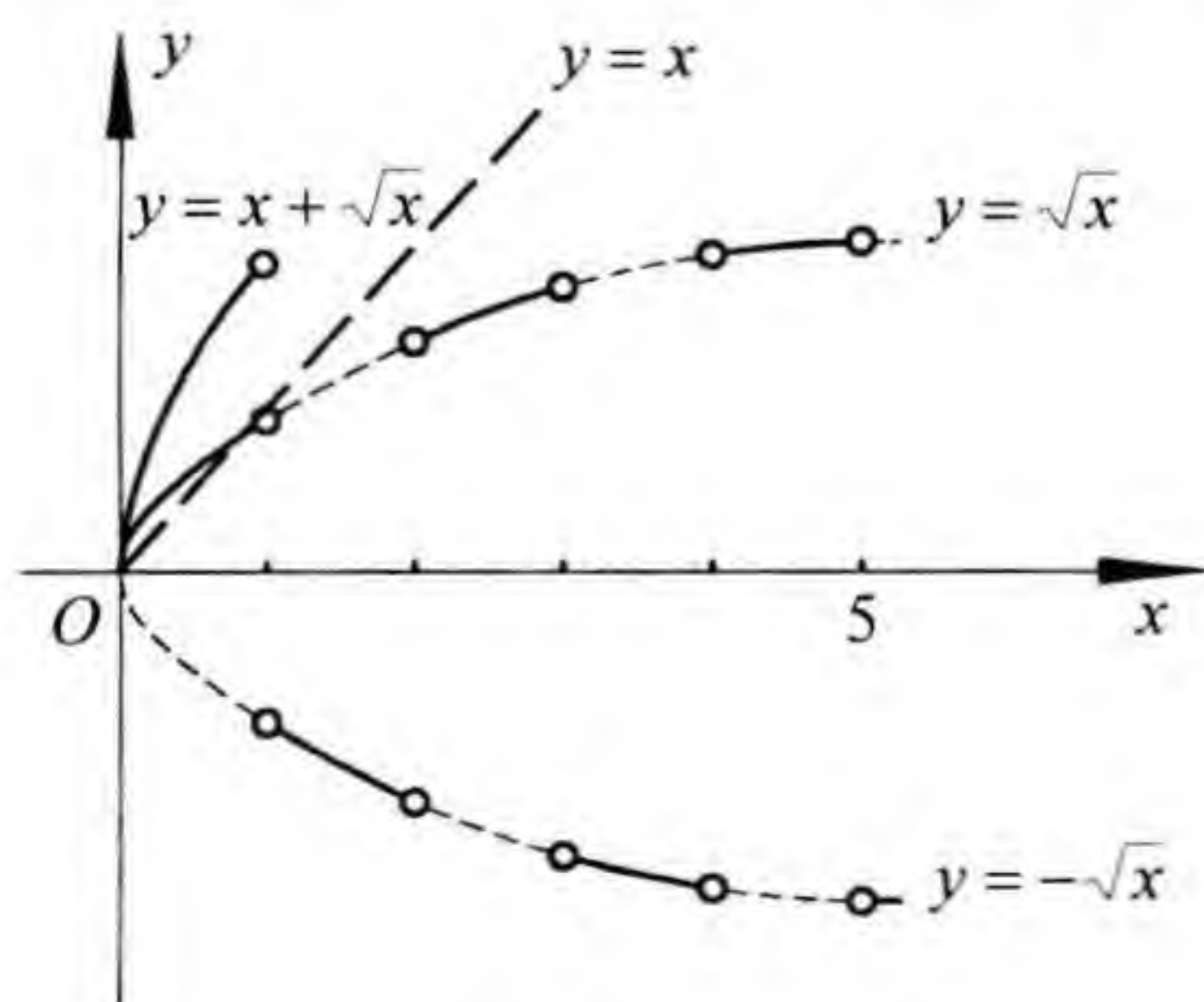


图 1.170

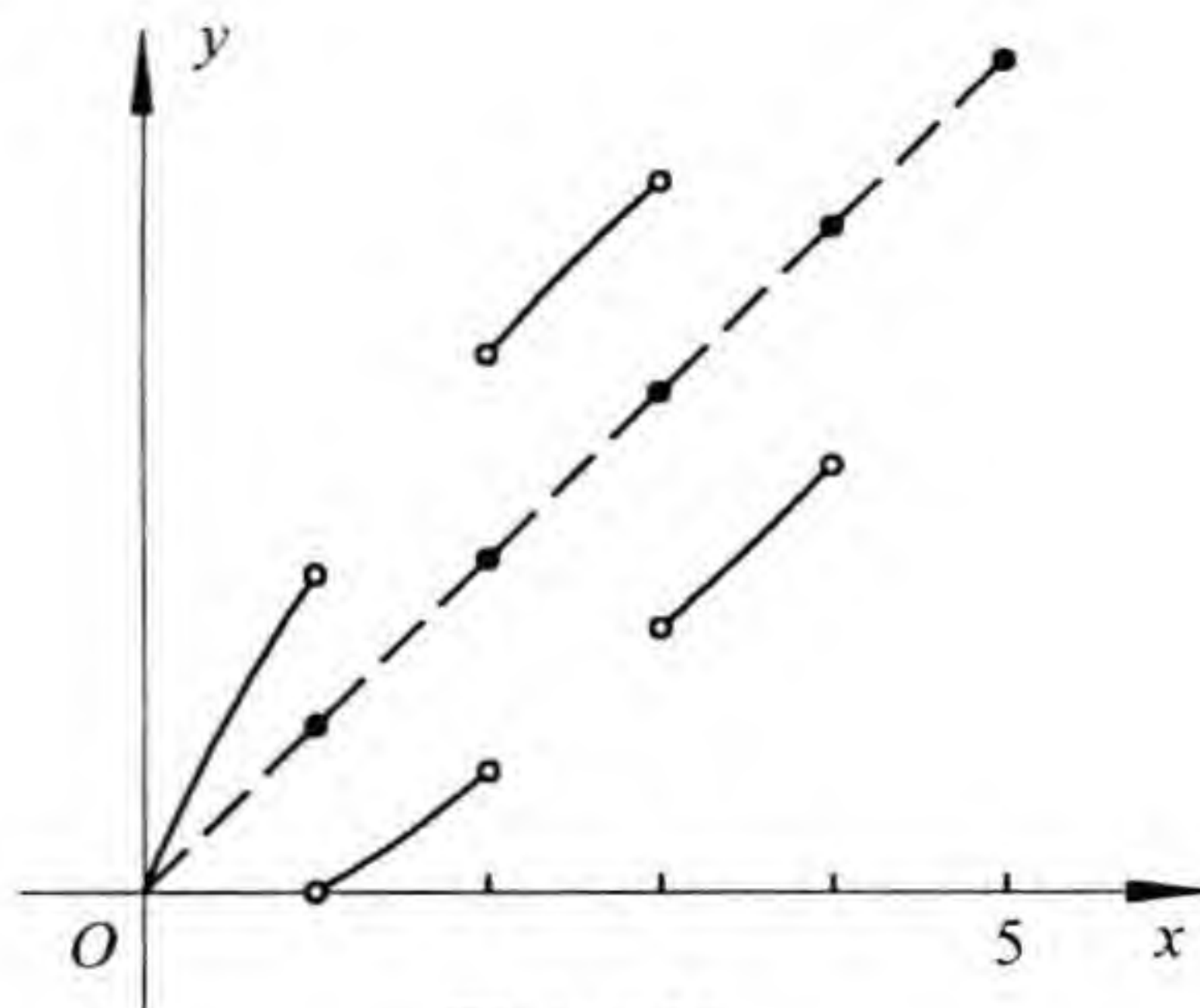


图 1.171



作函数  $y = \frac{1}{f(x)}$  的图像, 设:

**【351】**  $f(x) = x^2(1-x^2)$ .

解  $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2}$ .

利用图像的加法, 将函数  $y = \frac{1}{x^2}$  及  $y = \frac{1}{1-x^2}$  的图像相加即得, 如图 1.172 所示.

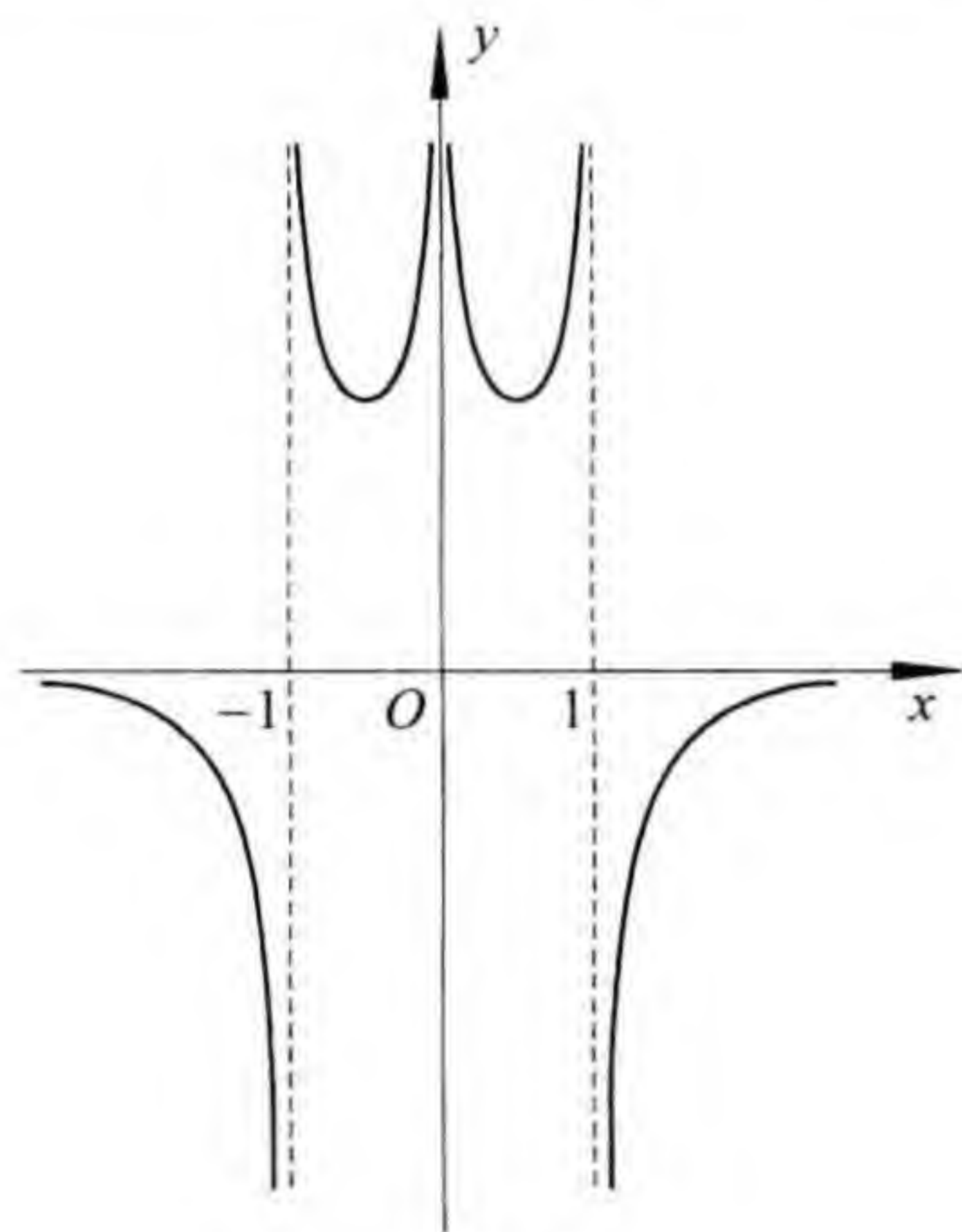


图 1.172

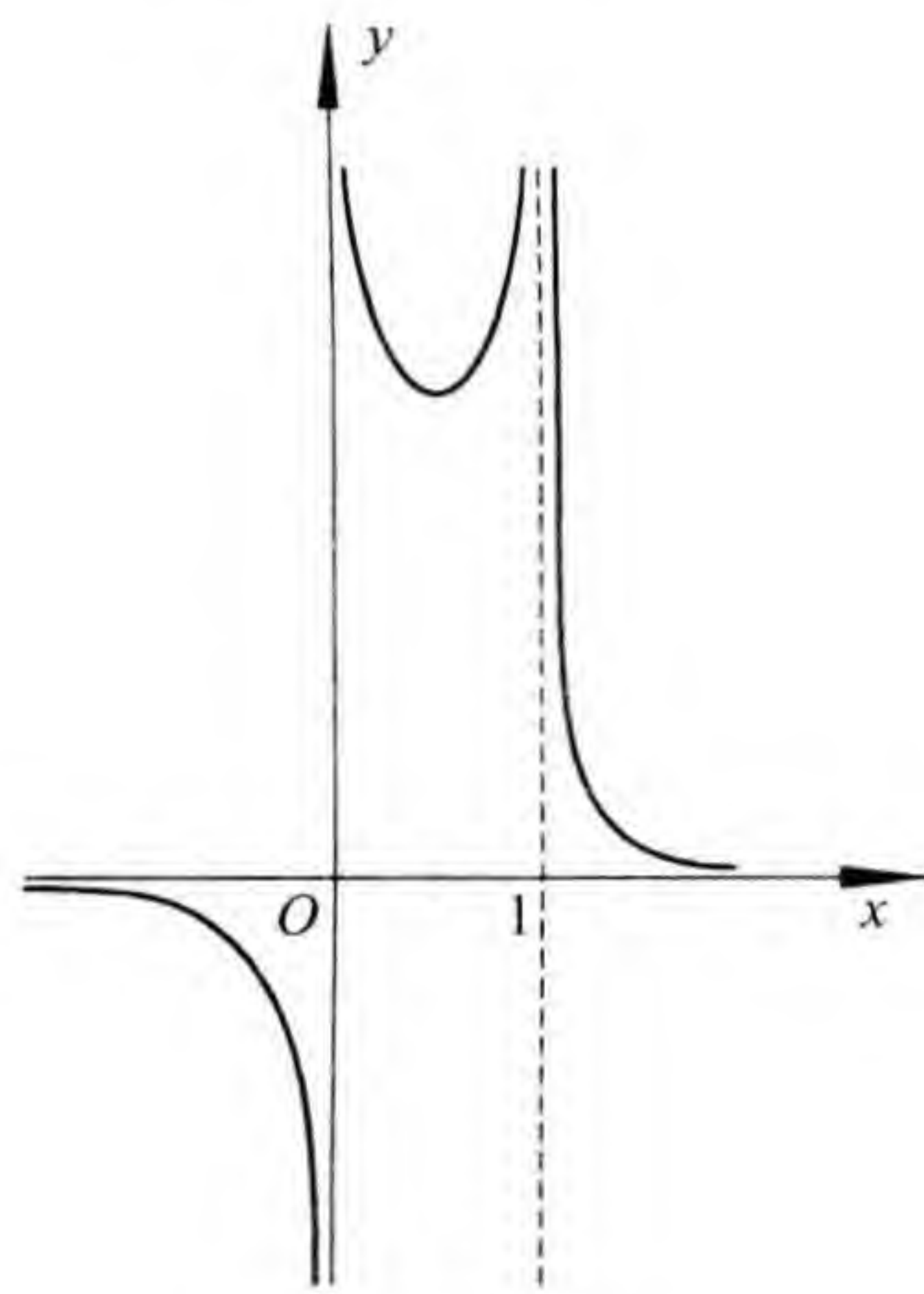


图 1.173

**【352】**  $f(x) = x(1-x)^2$ .

解  $y = \frac{1}{x(1-x)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$ . 当  $x > 0$  时,  $y > 0$ ; 当  $x < 0$  时,  $y < 0$ .

利用图像的加法即得, 如图 1.173 所示.

**【353】**  $f(x) = \sin^2 x$ .

解  $y = \frac{1}{\sin^2 x}$  是一周期为  $\pi$  的周期函数. 图像关于  $Oy$  轴对称. 如图 1.174 所示.

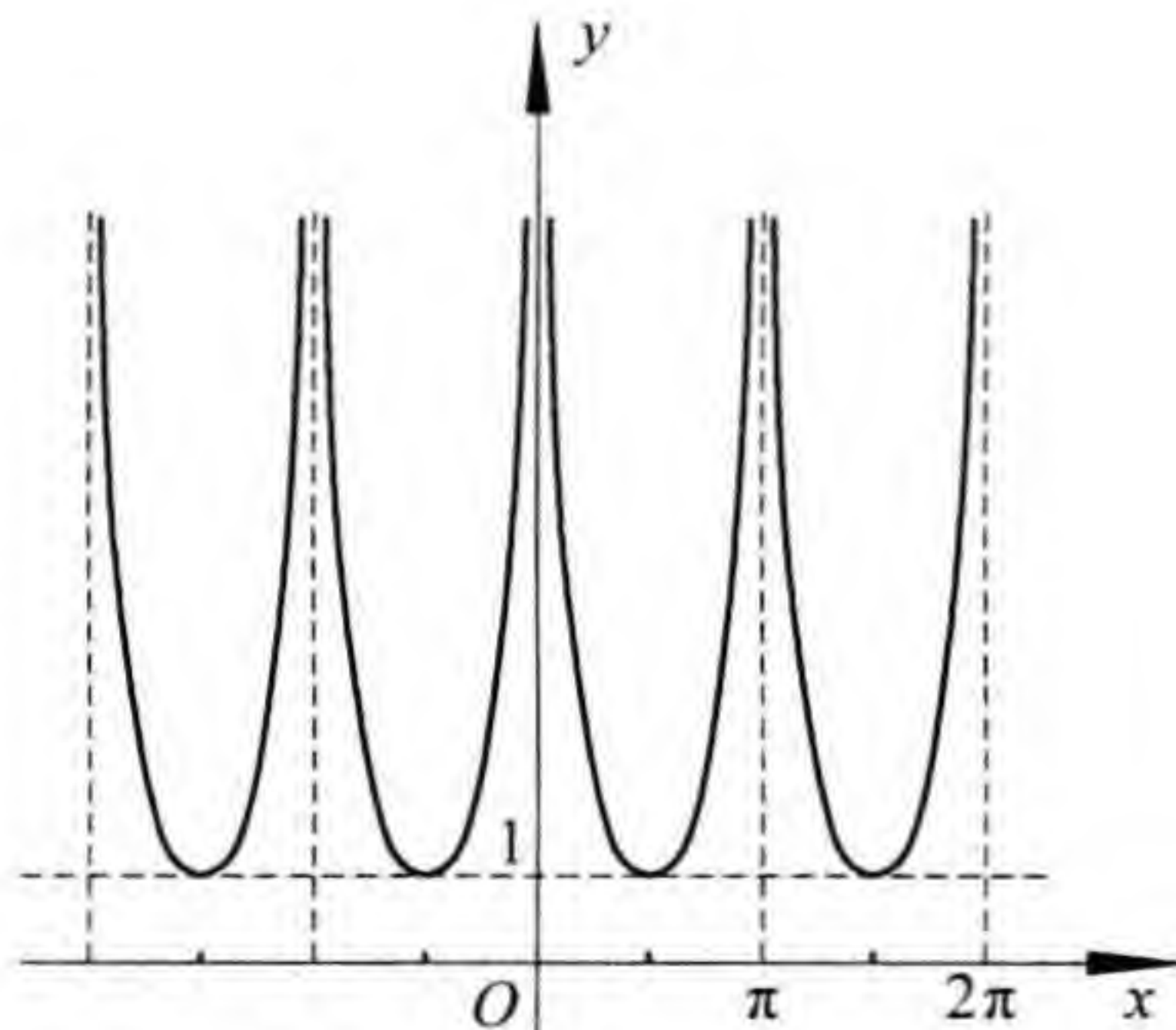


图 1.174

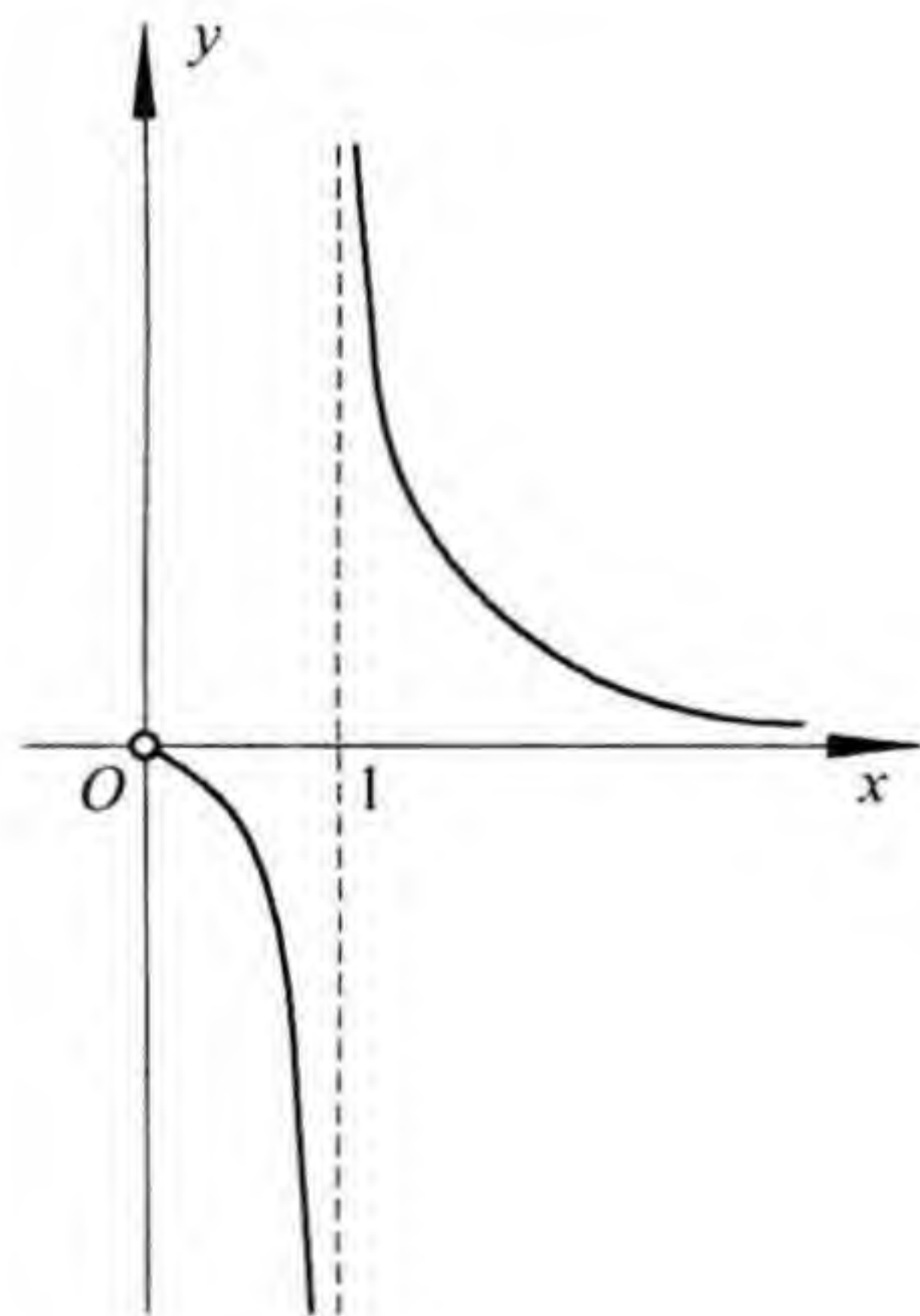


图 1.175

**【354】**  $f(x) = \ln x$ .

解  $y = \frac{1}{\ln x}$ . 当  $0 < x < 1$  时,  $y$  由 0 下降到  $-\infty$ ; 当  $1 < x < +\infty$  时,  $y$  由  $+\infty$  下降到 0.

如图 1.175 所示.



【355】  $f(x) = e^x \sin x$ .

解  $y = e^{-x} \csc x$ .

因为  $|\csc x| \geq 1$ , 所以,  $|y| \geq e^{-x}$ . 利用图像的乘法即得. 如图 1.176 所示.

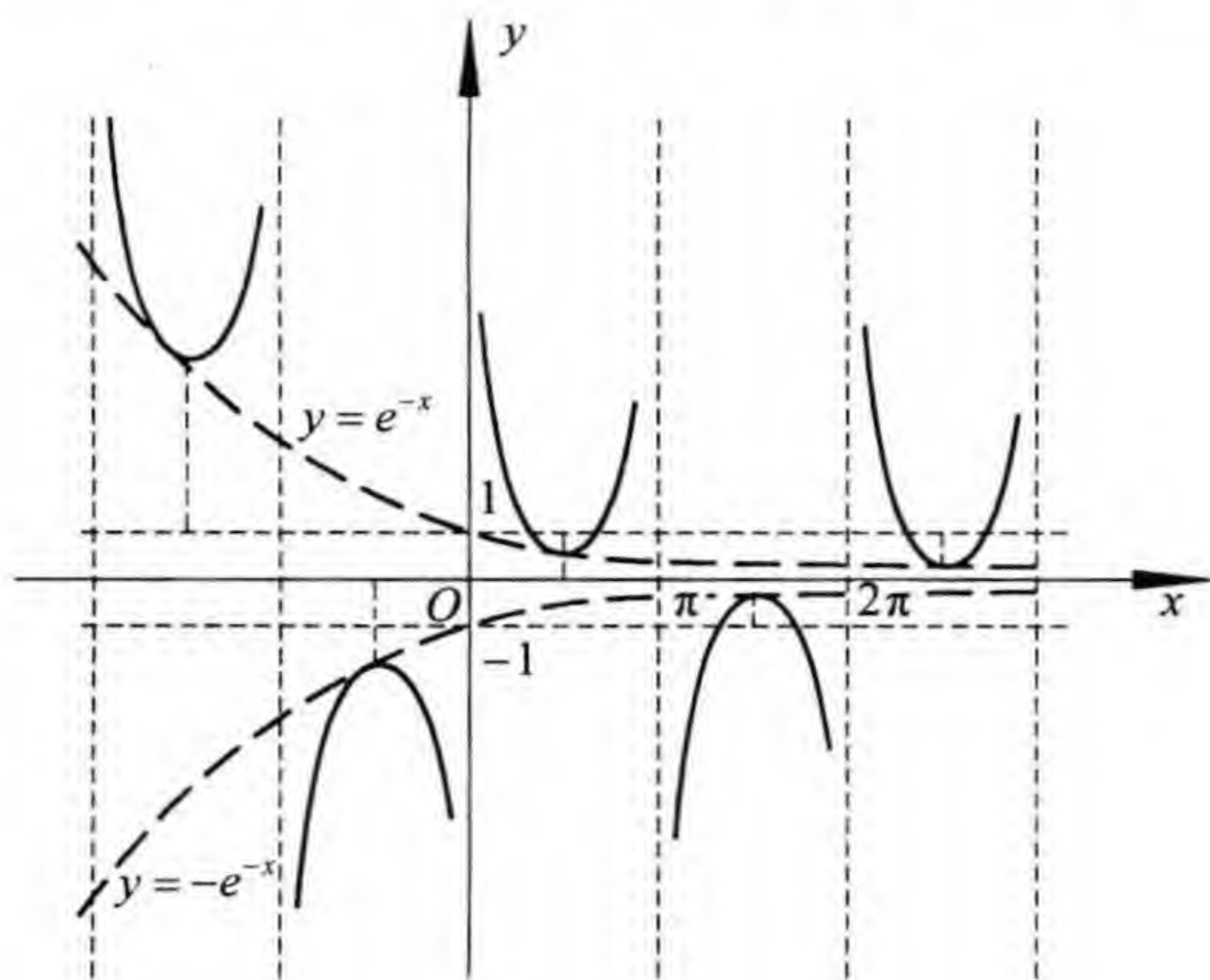


图 1.176

【356】 设  $f(u) = \begin{cases} -1, & -\infty < u < -1, \\ u, & -1 \leq u \leq 1, \\ 1, & 1 < u < +\infty. \end{cases}$

作复合函数  $y = f(u)$  的图像, 其中  $u = 2 \sin x$ .

解 如图 1.177 所示.

当  $|x - k\pi| \leq \frac{\pi}{6}$  时,  $y = 2 \sin x$ ;

当  $\frac{\pi}{6} < |x - k\pi| < \frac{5\pi}{6}$  时,  $y = (-1)^k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ .

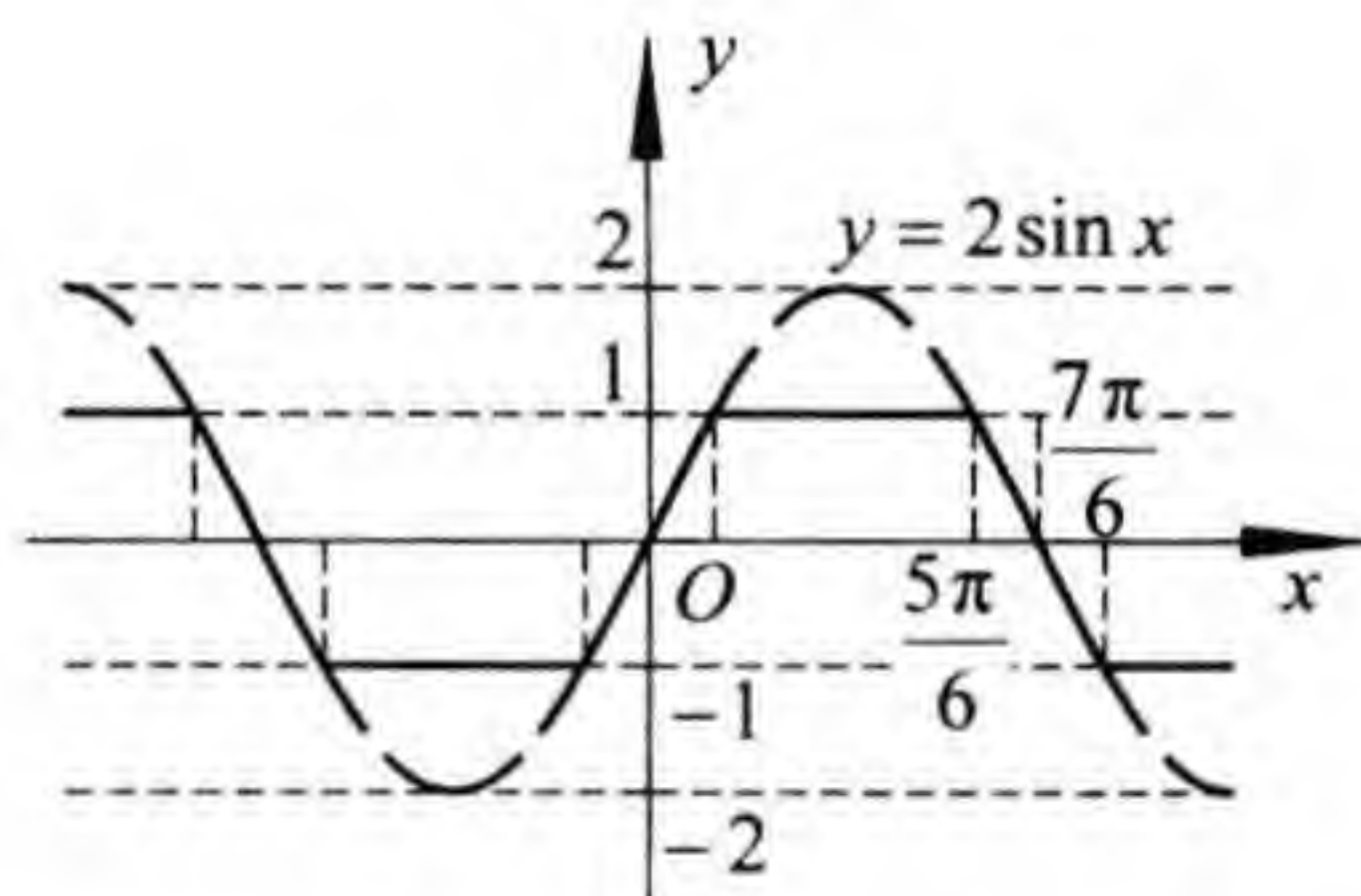


图 1.177

【357】 设  $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$  和  $\psi(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$  作下列函数的图像:

(1)  $y = \varphi[\varphi(x)]$ ; (2)  $y = \varphi[\psi(x)]$ ; (3)  $y = \psi[\varphi(x)]$ ; (4)  $y = \psi[\psi(x)]$ .

解 (1)  $\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$   $\varphi[\varphi(x)] = \varphi(x)$ . 如图 1.178 所示.

(2)  $\varphi[\psi(x)] = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$  如图 1.179 所示.

(3)  $\psi[\varphi(x)] = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$  如图 1.179 所示.

(4)  $\psi[\psi(x)] = \begin{cases} x^4, & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$  如图 1.180 所示.

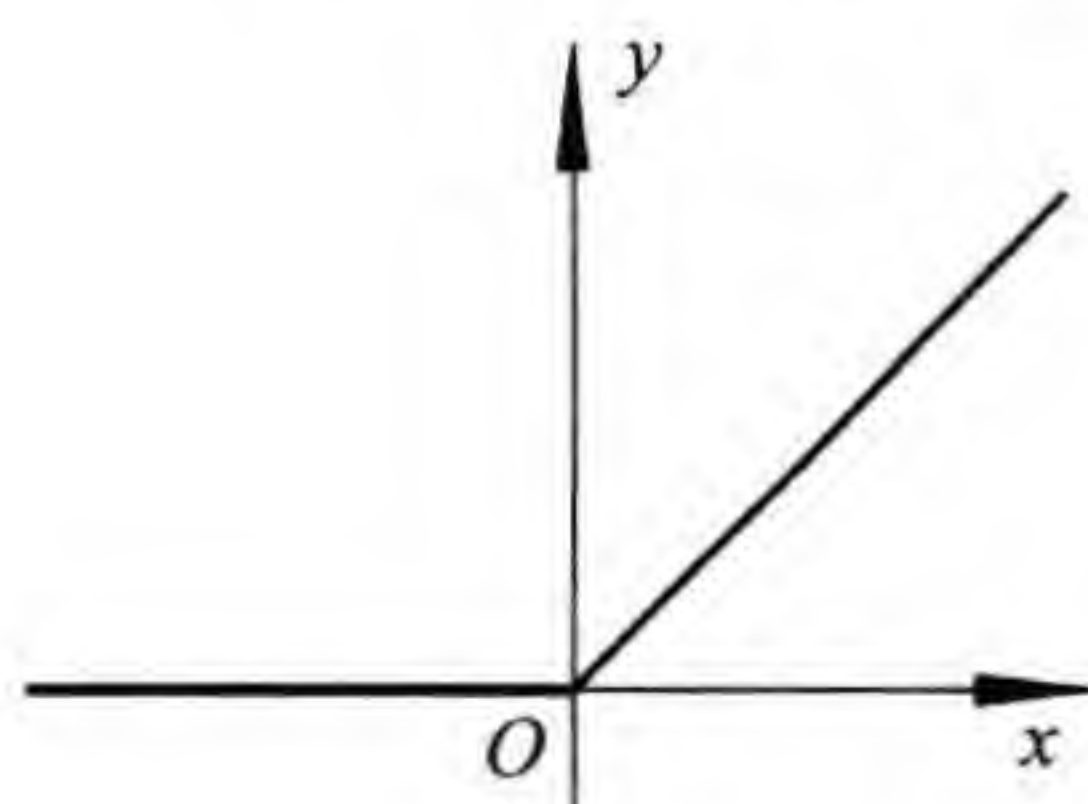


图 1.178

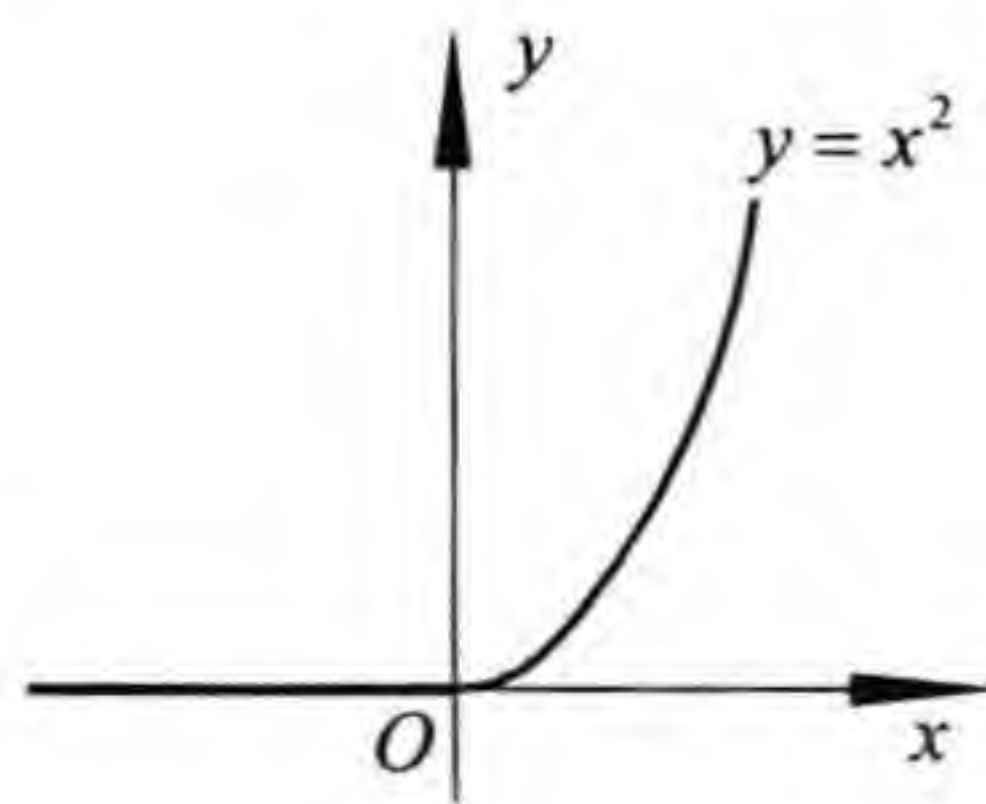


图 1.179

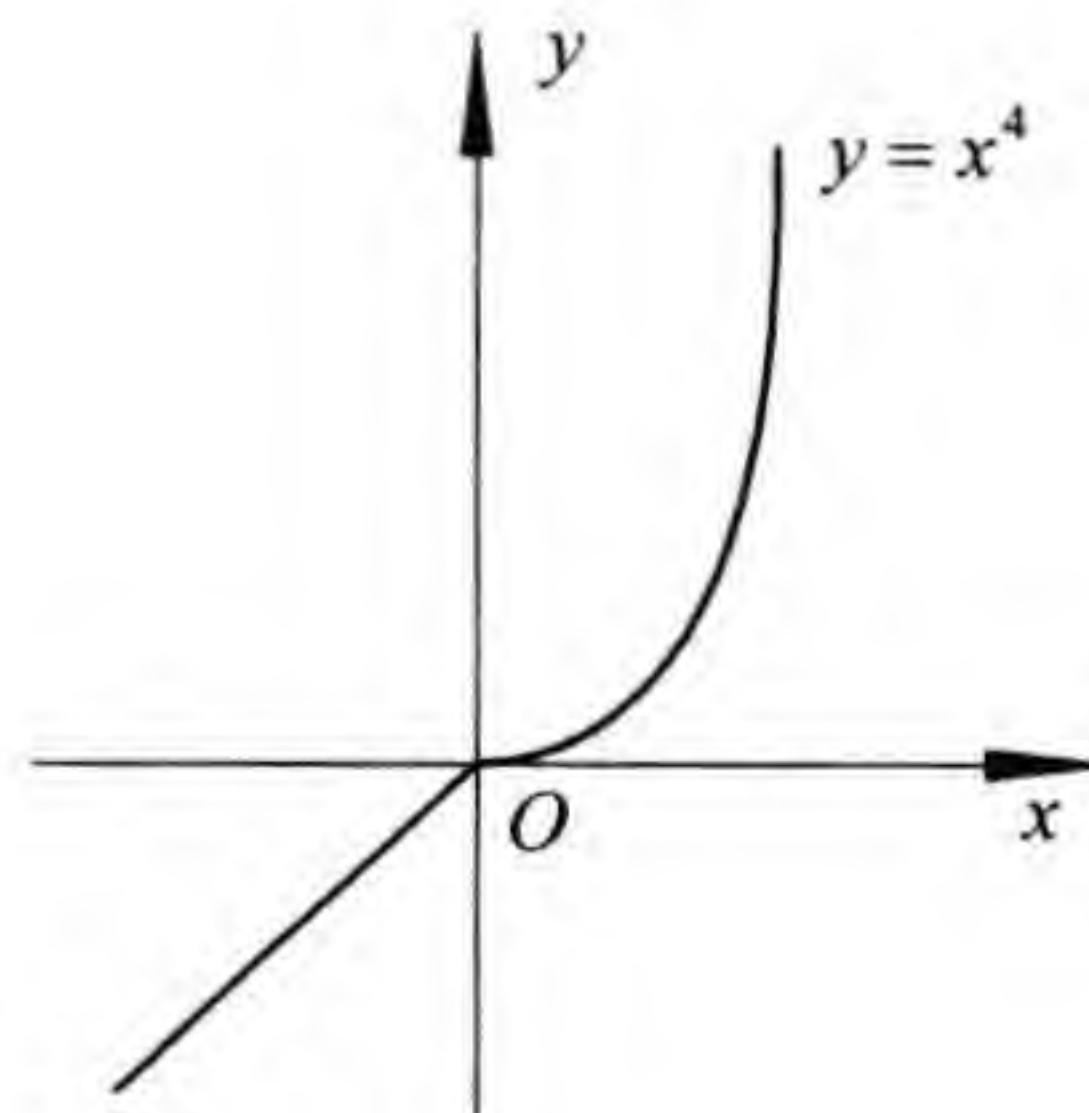


图 1.180

【358】 设



$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{及} \quad \psi(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| \leq 2, \\ 2, & |x| > 2. \end{cases}$$

作函数:

$$(1) y = \varphi[\varphi(x)]; \quad (2) y = \varphi[\psi(x)]; \quad (3) y = \psi[\varphi(x)]; \quad (4) y = \psi[\psi(x)]$$

的图像.

**提示** (2) 图像关于  $Oy$  轴对称. 分别就  $0 \leq x < 1$ ,  $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ ,  $\sqrt{3} < x \leq 2$  及  $x > 2$  加以讨论.

**解** (1)  $\varphi[\varphi(x)] = 1$ . 如图 1.181 所示.

(2)  $\varphi[\psi(x)] = \varphi[\psi(-x)]$ , 故图像关于  $Oy$  轴对称.

当  $0 \leq x < 1$  时,  $\psi(x) = 2 - x^2$ , 由于  $1 < 2 - x^2 \leq 2$ , 所以,  $\varphi[\psi(x)] = 0$ .

当  $1 \leq x \leq \sqrt{3}$  时,  $\psi(x) = 2 - x^2$ , 由于  $-1 \leq 2 - x^2 \leq 1$ , 所以,  $\varphi[\psi(x)] = 1$ .

当  $\sqrt{3} < x \leq 2$  时,  $\psi(x) = 2 - x^2$ , 由于  $-2 \leq 2 - x^2 < -1$ , 所以,  $\varphi[\psi(x)] = 0$ .

当  $x > 2$  时,  $\psi(x) = 2$ , 所以,  $\varphi[\psi(x)] = 0$ .

如图 1.182 所示.

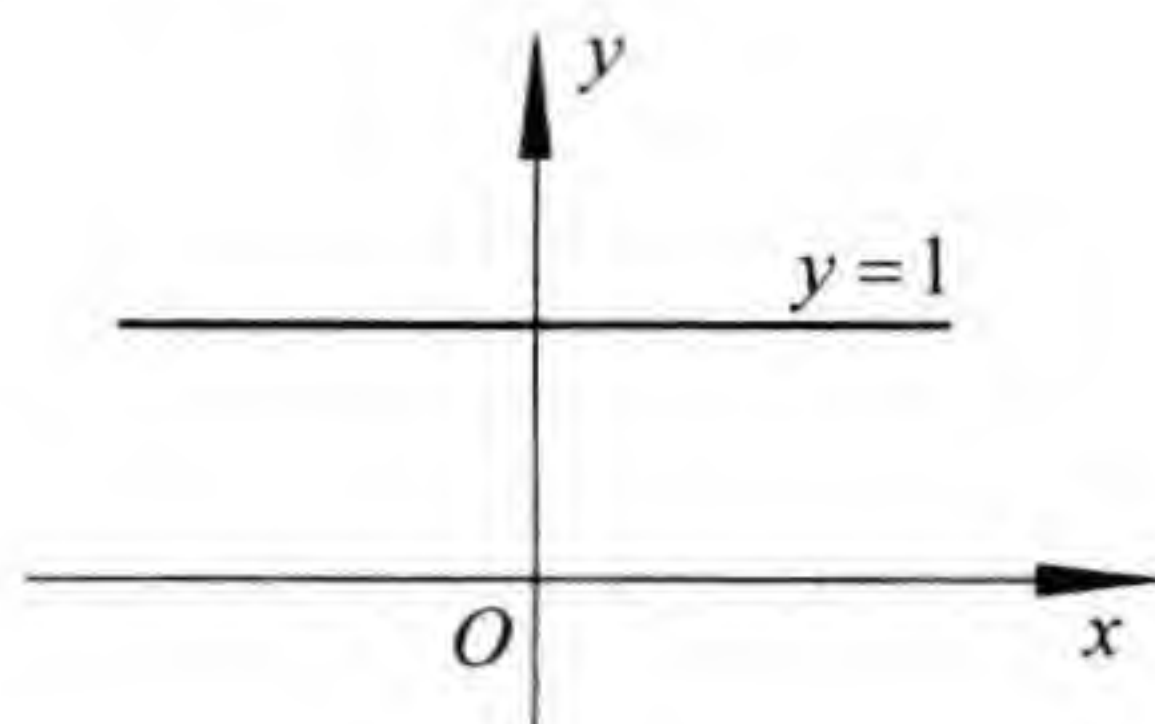


图 1.181

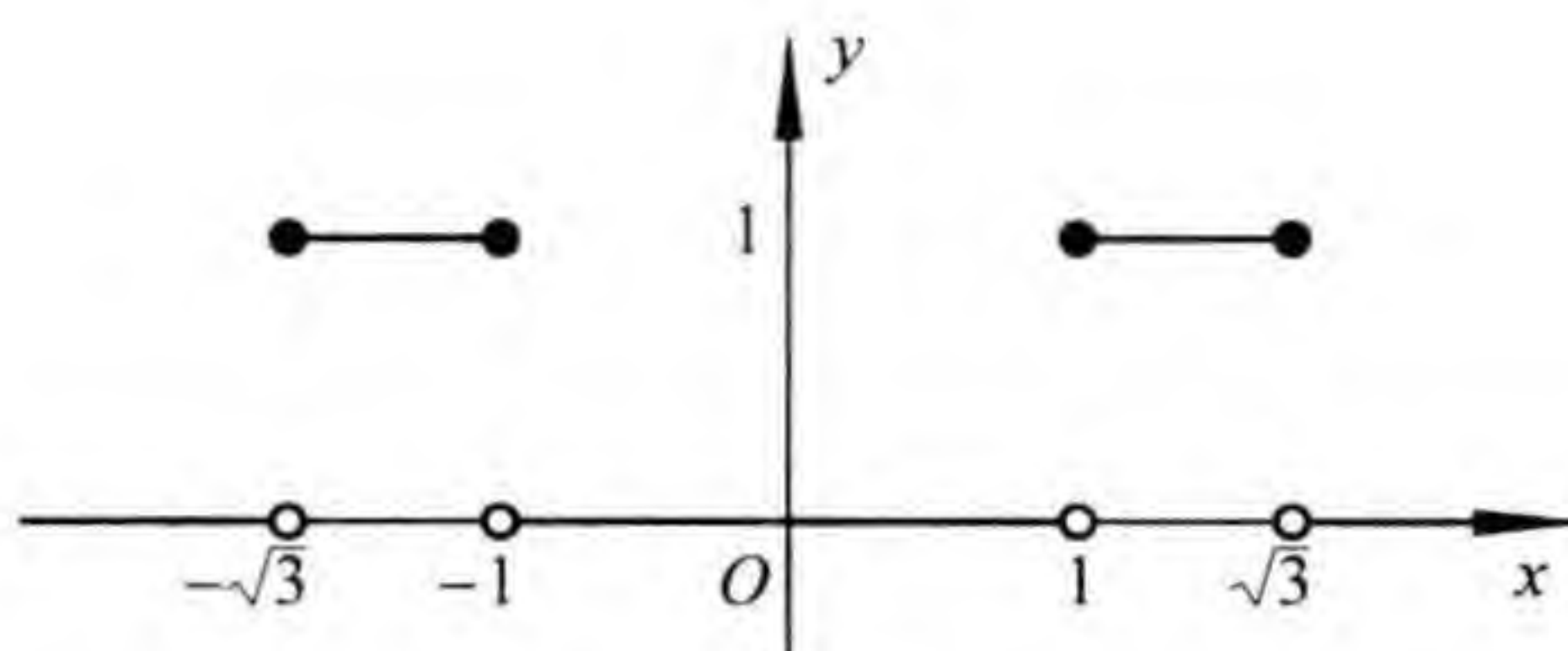


图 1.182

(3)  $\psi[\varphi(x)] = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 2, & |x| > 1. \end{cases}$  如图 1.183 所示.

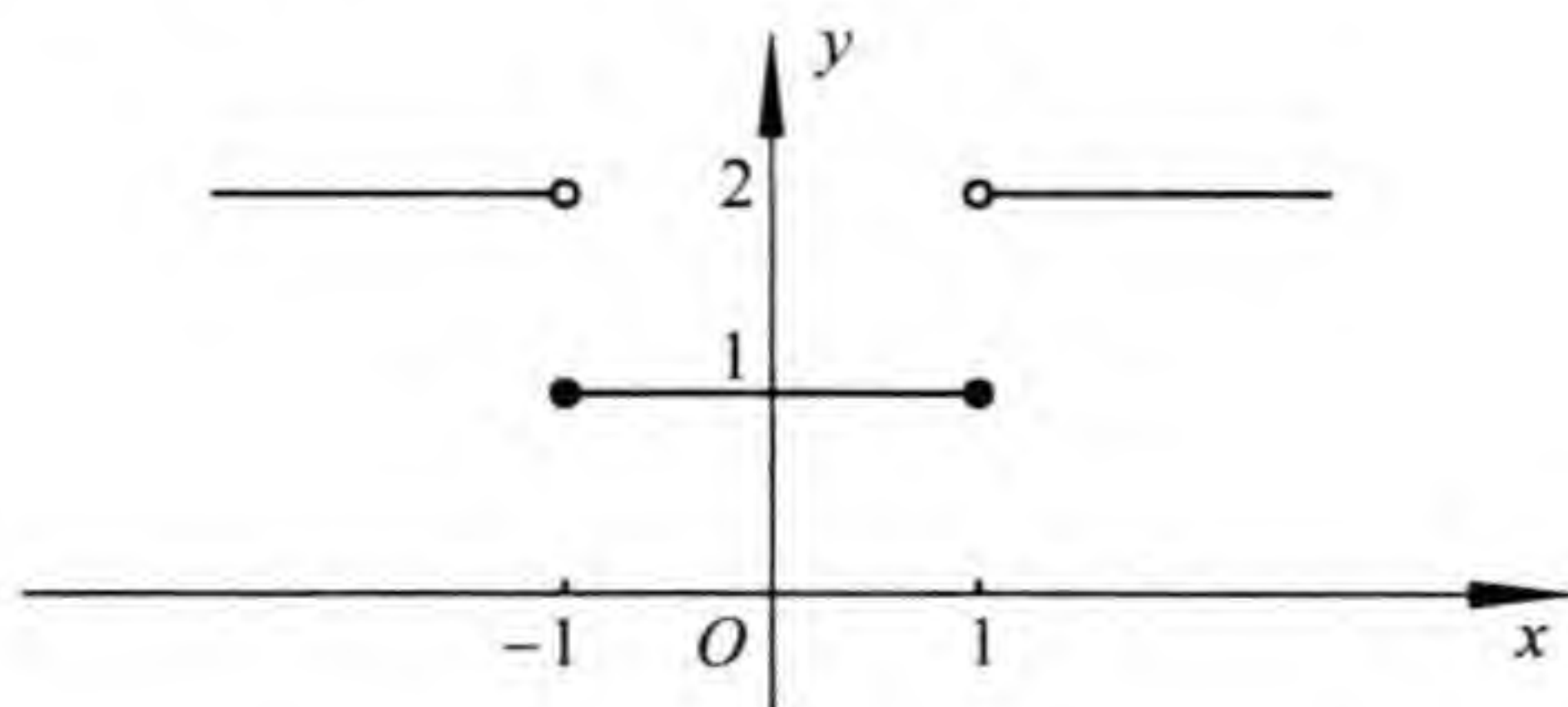


图 1.183

(4)  $\psi[\psi(x)] = \begin{cases} 2 - (2 - x^2)^2, & |x| \leq 2, \\ -2, & |x| > 2. \end{cases}$  如图 1.184 所示.

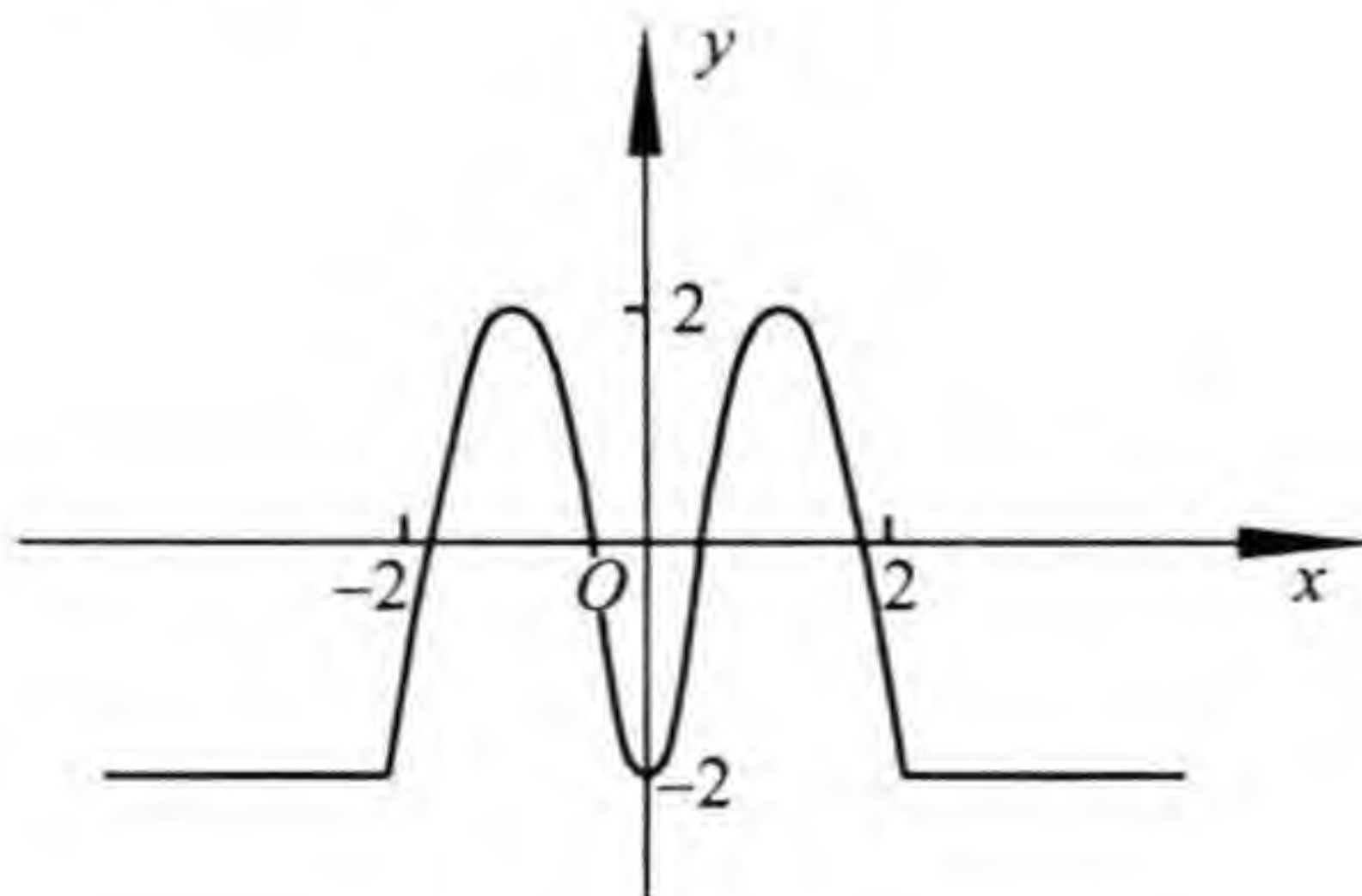


图 1.184

**【359】** 把定义于正数区域  $x > 0$  的函数  $f(x)$  延拓到负数区域  $x < 0$ , 使所得的函数为: (i) 偶函数; (ii) 奇函数, 并分别作出所得函数的图像:



(1)  $f(x) = 1 - x$ ; (2)  $f(x) = 2x - x^2$ ; (3)  $f(x) = \sqrt{x}$ ;

(4)  $f(x) = \sin x$ ; (5)  $f(x) = e^x$ ; (6)  $f(x) = \ln x$ .

解 (1)(i) 当  $x < 0$  时, 定义  $f(x) = 1 + x$ , 则  $f(x)$  在整个数轴上为偶函数.

(ii) 当  $x < 0$  时, 定义  $f(x) = -(1 + x)$ , 则  $f(x)$  在整个数轴上为奇函数.

如图 1.185 所示.

(2)(i) 当  $x < 0$  时, 定义  $f(x) = -2x - x^2$  即行; (ii) 当  $x < 0$  时, 定义  $f(x) = 2x + x^2$  即行.

如图 1.186 所示.

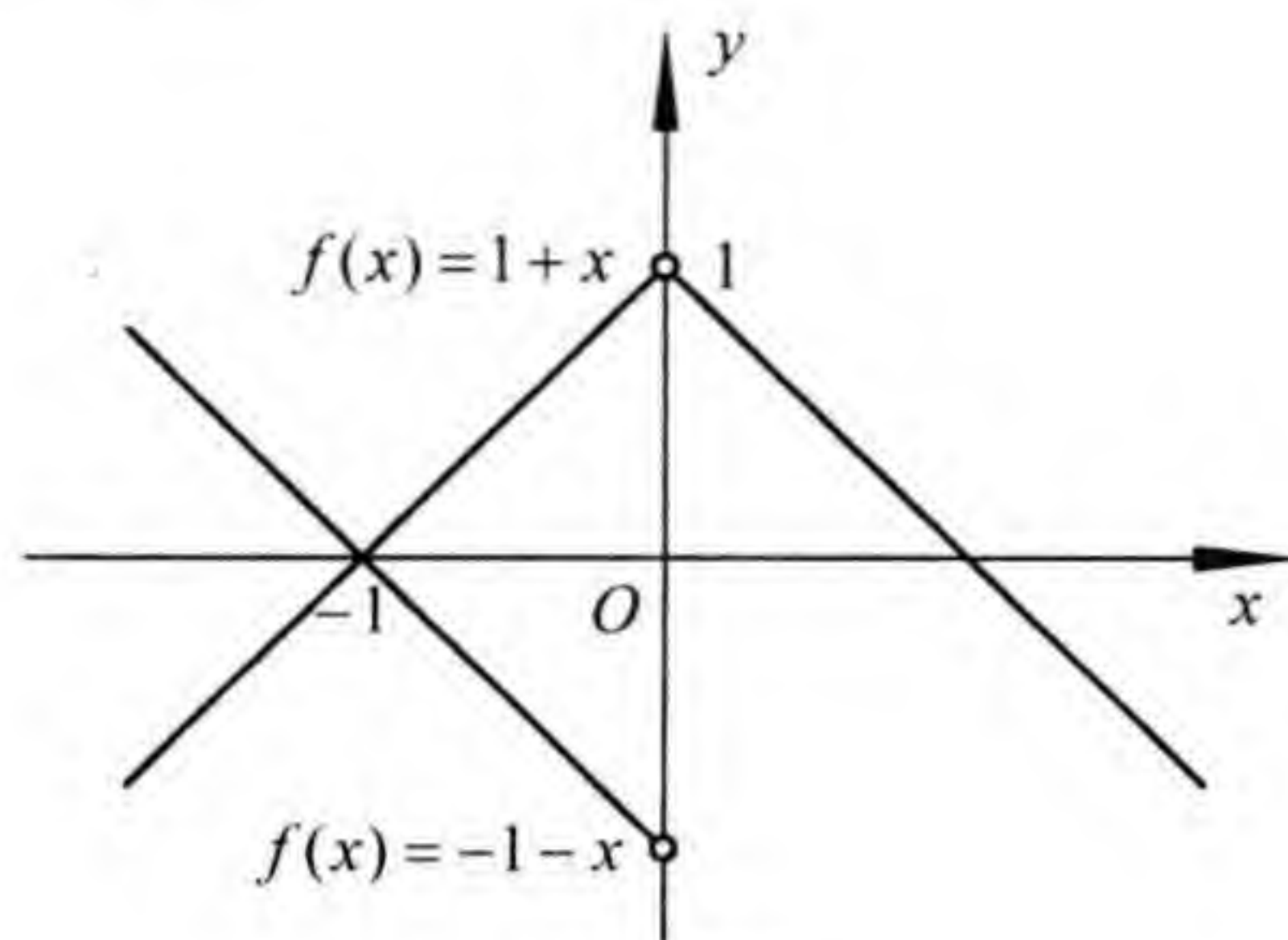


图 1.185

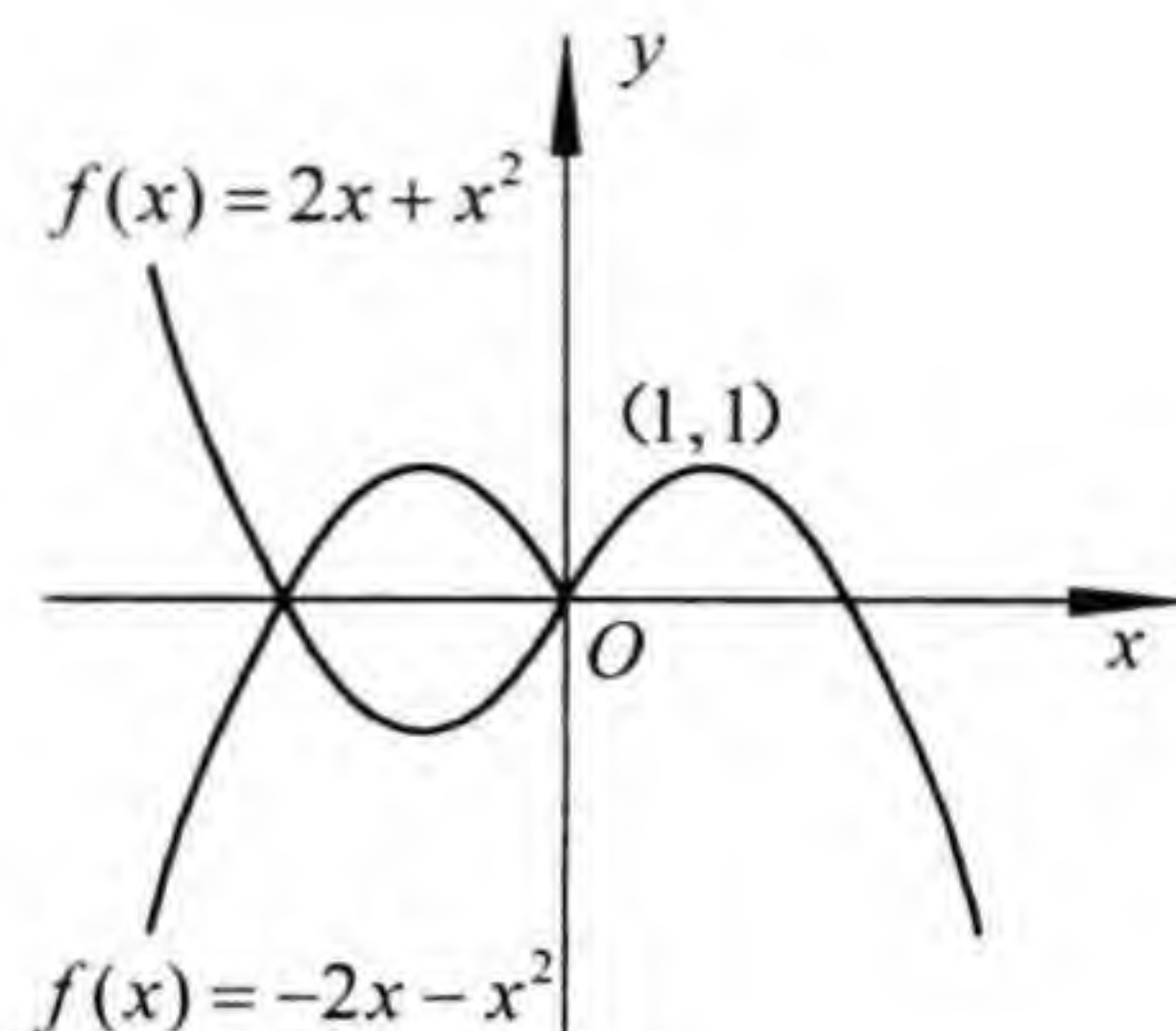


图 1.186

(3)(i) 当  $x < 0$  时, 定义  $f(x) = \sqrt{-x}$  即行; (ii) 当  $x < 0$  时, 定义  $f(x) = -\sqrt{-x}$  即行.

如图 1.187 所示.

(4)(i) 当  $x < 0$  时, 定义  $f(x) = -\sin x = |\sin x|$  即行; (ii) 当  $x < 0$  时, 定义  $f(x) = \sin x$  即行.

如图 1.188 所示.

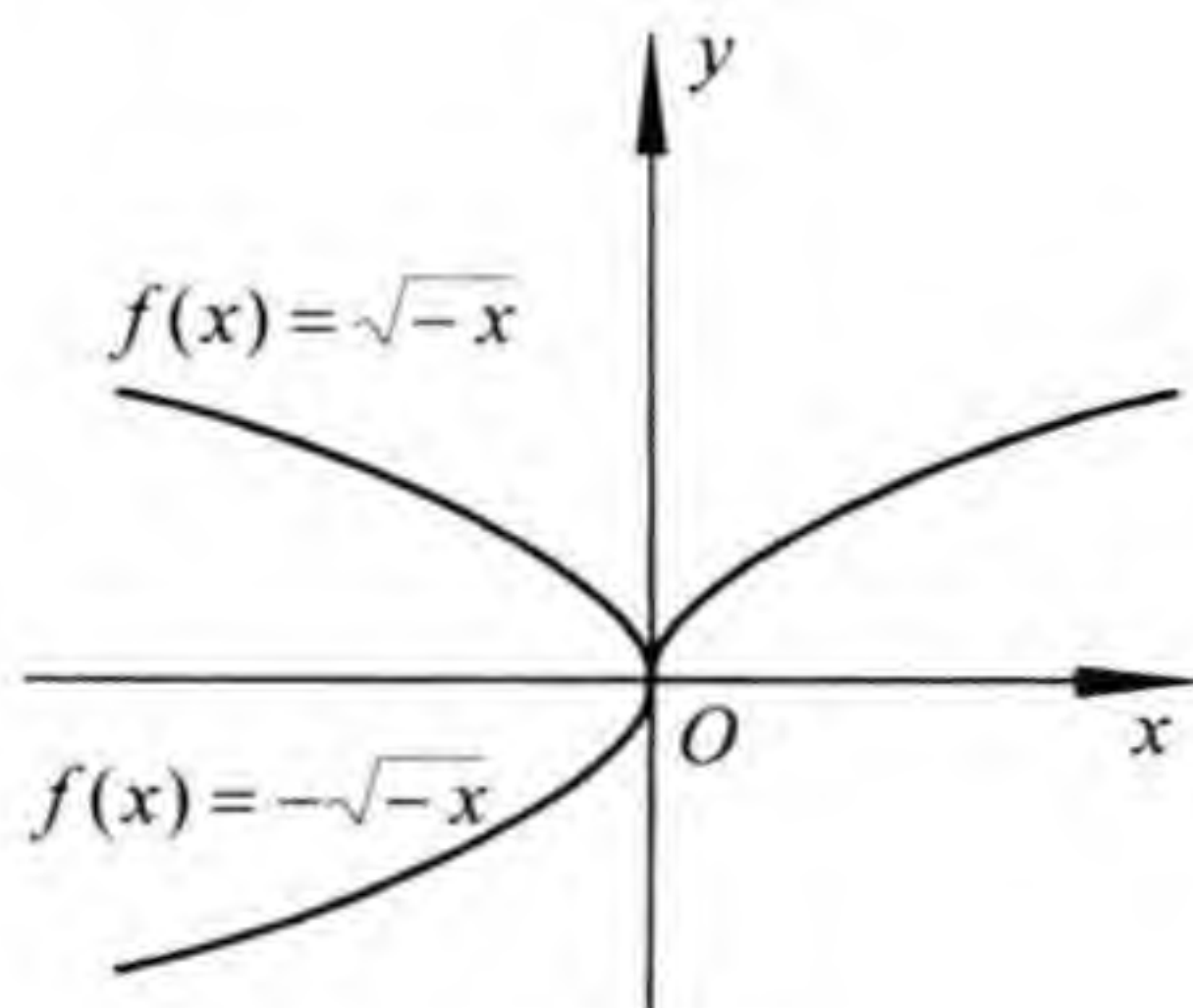


图 1.187

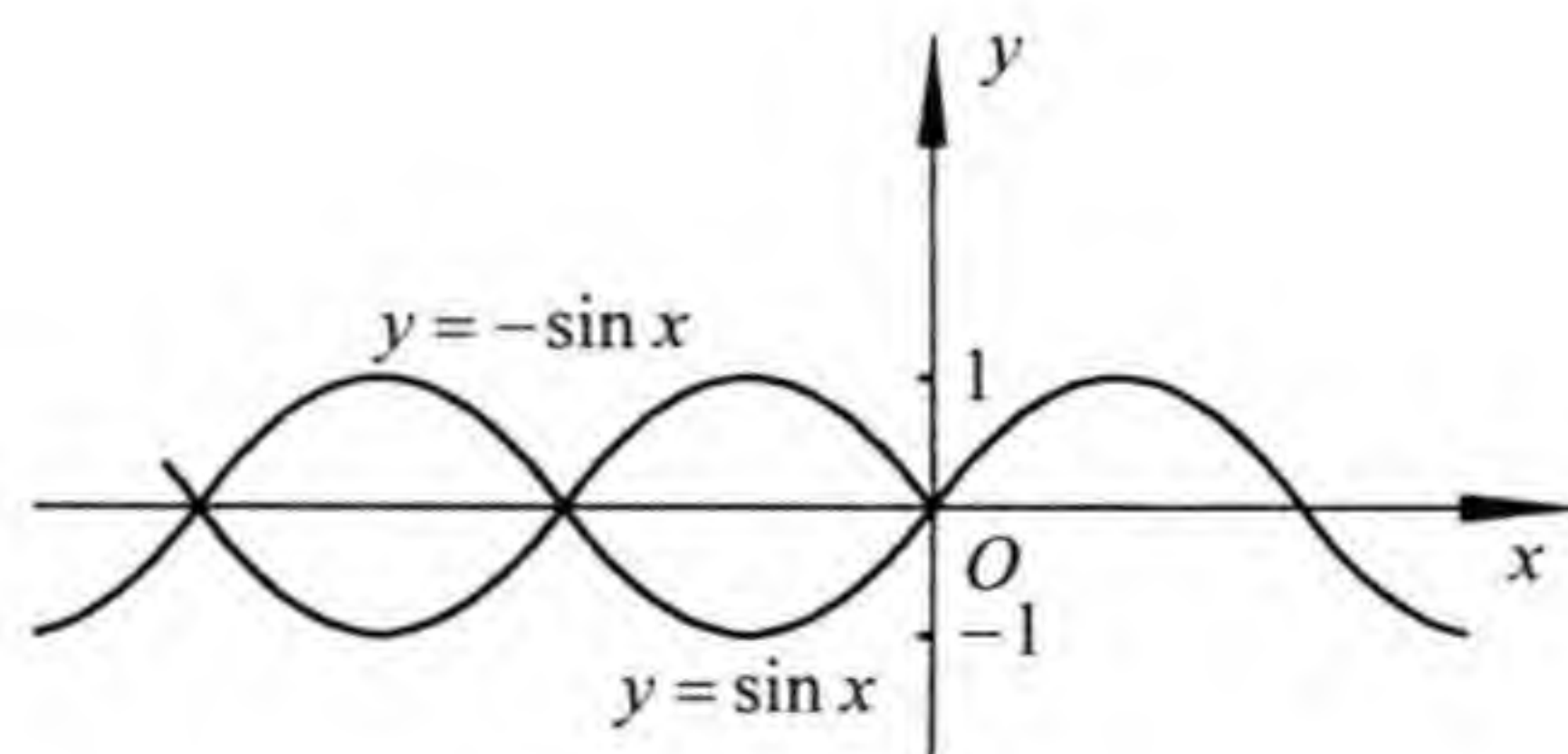


图 1.188

(5)(i) 当  $x < 0$  时, 定义  $f(x) = e^{-x}$  即行; (ii) 当  $x < 0$  时, 定义  $f(x) = -e^{-x}$  即行.

如图 1.189 所示.

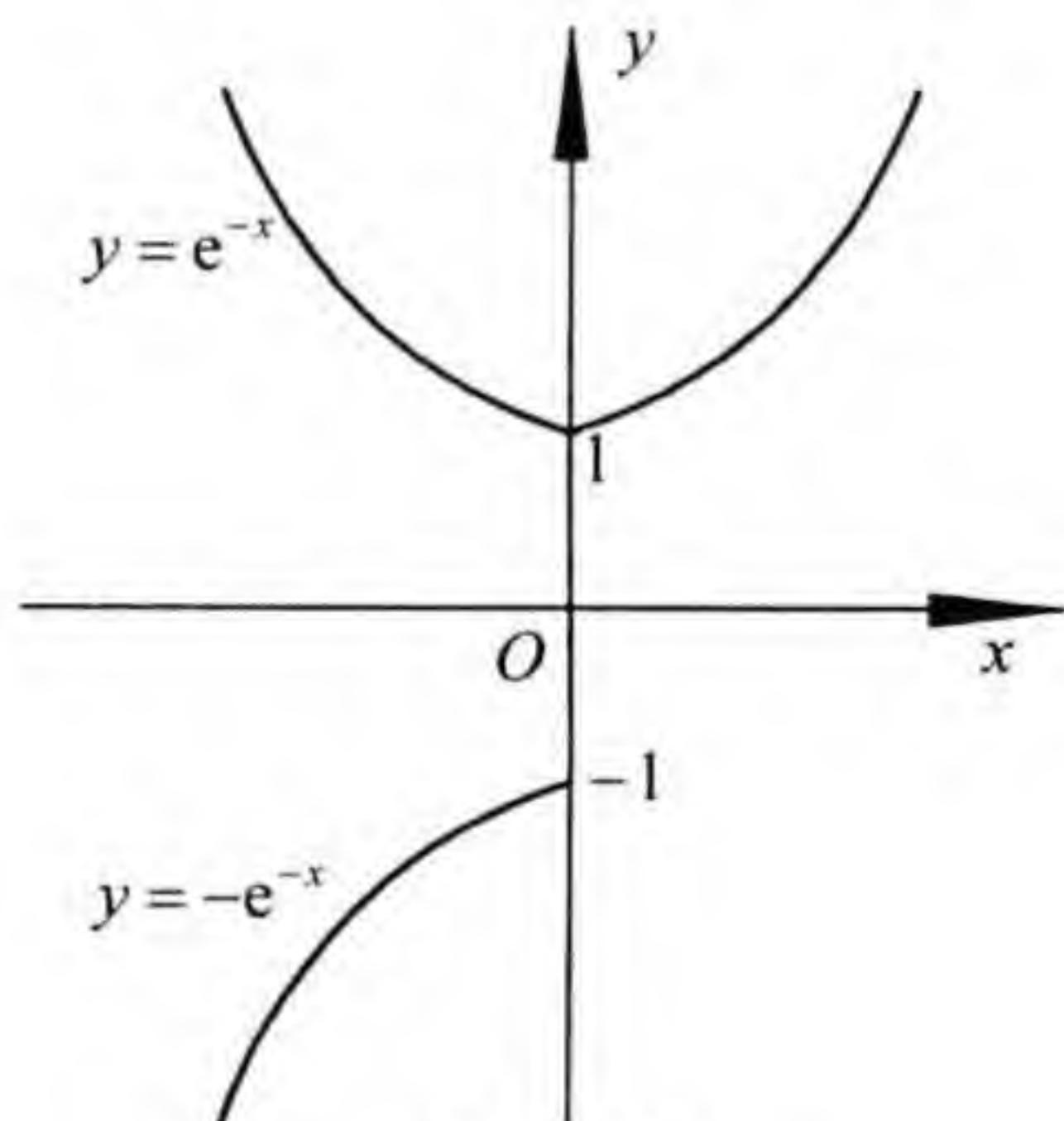


图 1.189

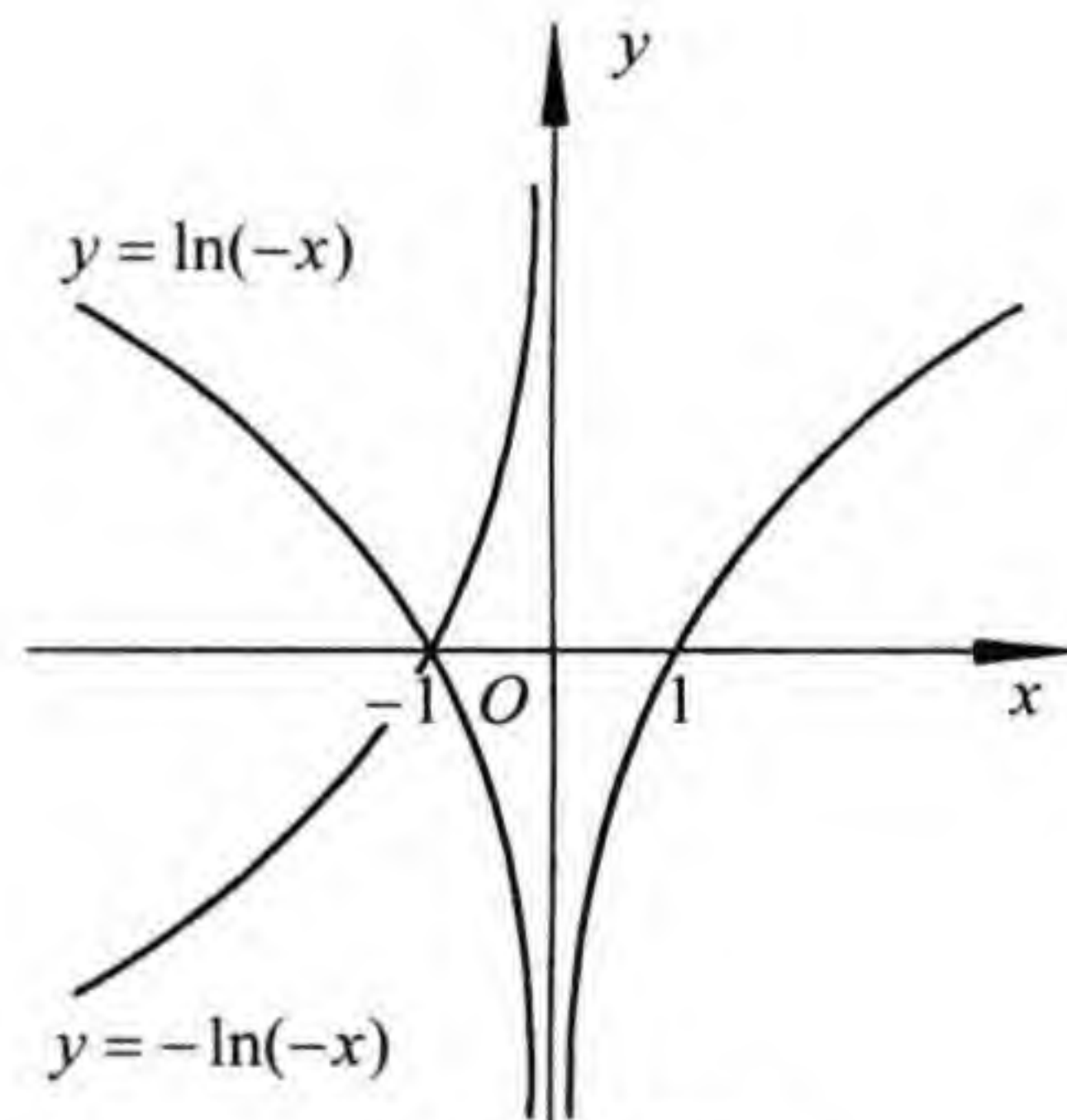


图 1.190

(6)(i) 当  $x < 0$  时, 定义  $f(x) = \ln(-x)$  即行; (ii) 当  $x < 0$  时, 定义  $f(x) = -\ln(-x)$  即行.

如图 1.190 所示.



**【360】** 确定下列函数的图像在竖直方向上的对称轴:

$$(1) y = ax^2 + bx + c; \quad (2) y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2};$$

$$(3) y = \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x} \quad (0 < a < b); \quad (4) y = a + b\cos x.$$

**解** (1)  $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ . 它关于直线  $x = -\frac{b}{2a}$  对称.

(2) 显然图像对于直线  $x = \frac{1}{2}$  对称.

(3) 显然图像对于直线  $x = \frac{b-a}{2}$  对称.

(4) 对于直线  $x = k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 对称.

**【361】** 确定下列函数的图像的对称中心:

$$(1) y = ax + b; \quad (2) y = \frac{ax+b}{cx+d}; \quad (3) y = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$

$$(4) y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}; \quad (5) y = 1 + \sqrt[3]{x-2}.$$

**解** (1) 显然对称中心为  $(x_0, ax_0 + b)$ ,  $x_0$  为任意实数.

(2) 设对称中心为  $(x_0, y_0)$ , 则对充分大的  $x$ , 有  $y$  使

$$y + y_0 = \frac{a(x+x_0)+b}{c(x+x_0)+d}, \quad -y + y_0 = \frac{a(-x+x_0)+b}{c(-x+x_0)+d},$$

由此易得  $x_0 = -\frac{d}{c}$ ,  $y_0 = \frac{a}{c}$ .

(3) 用类似于(2)的方法, 可得对称中心为  $(x_0, y_0)$ , 其中

$$x_0 = -\frac{b}{3a}, \quad y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d.$$

(4) 类似于(2), 可得对称中心为  $(2, 0)$ .

(5) 类似于(2), 可得对称中心为  $(2, 1)$ .

**【362】** 作周期函数的图像:

$$(1) y = |\sin x|; \quad (2) y = \operatorname{sgn} \cos x;$$

$$(3) y = f(x), \text{ 其中 } f(x) = A \frac{x}{l} \left(2 - \frac{x}{l}\right), \text{ 假设 } 0 \leq x \leq 2l \text{ 和 } f(x+2l) \equiv f(x);$$

$$(4) y = [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right]; \quad (5) y = (x), \text{ 此处 } (x) \text{ 为从数 } x \text{ 至与它最近的整数间的距离}.$$

**解** (1) 如图 1.191 所示, 周期  $\pi$ .

(2) 如图 1.192 所示, 周期  $2\pi$ .

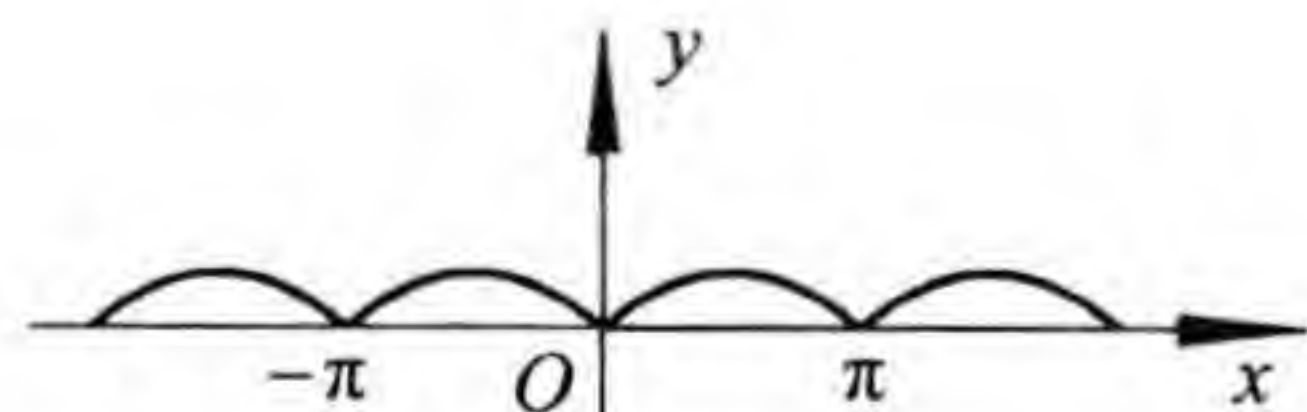


图 1.191

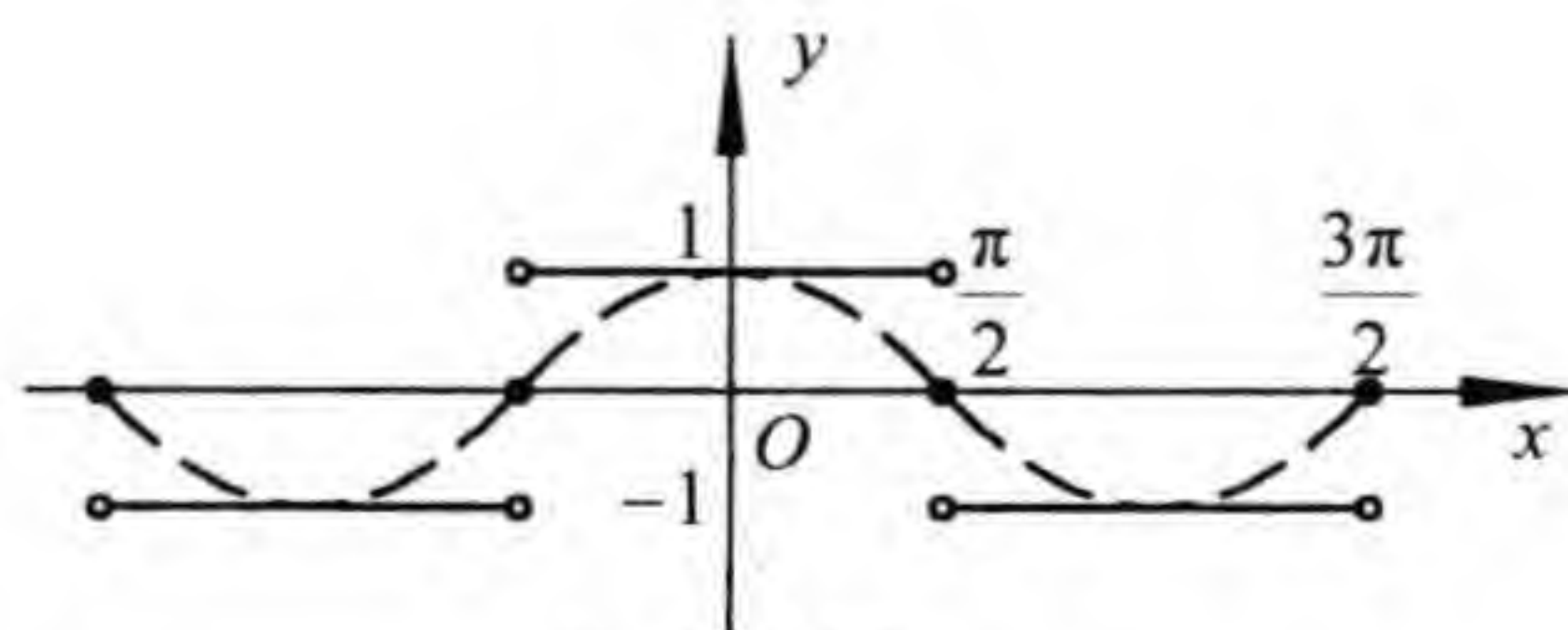


图 1.192

(3) 当  $0 \leq x \leq 2l$  时, 由  $f(x)$  的定义易得

$$f(x+2kl) = f(x) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

故知所给函数为以  $2l$  为周期的周期函数, 它在  $[0, 2l]$  内的图像为一抛物线, 顶点为  $(l, A)$ . 如图 1.193 所示.



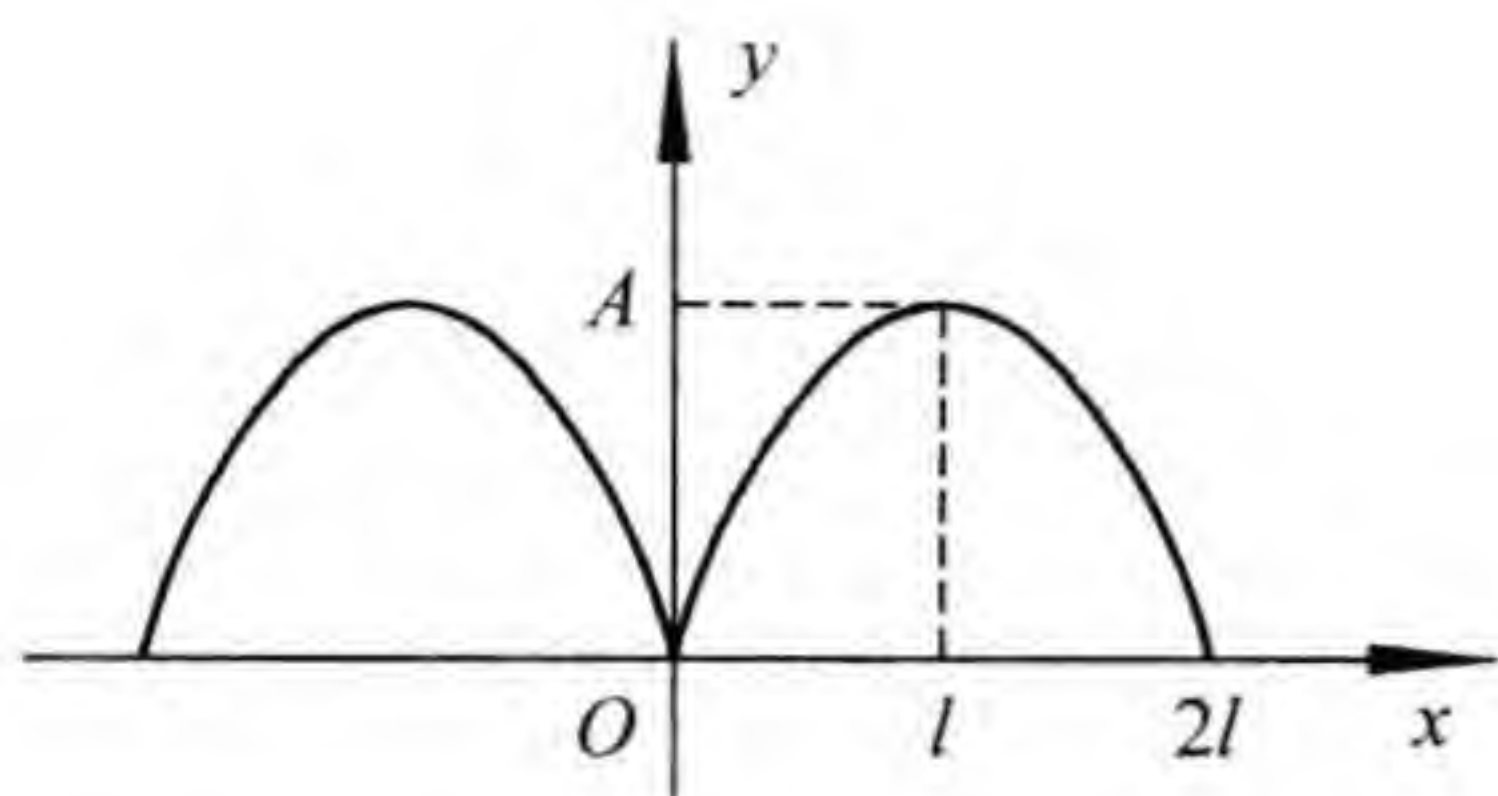


图 1.193

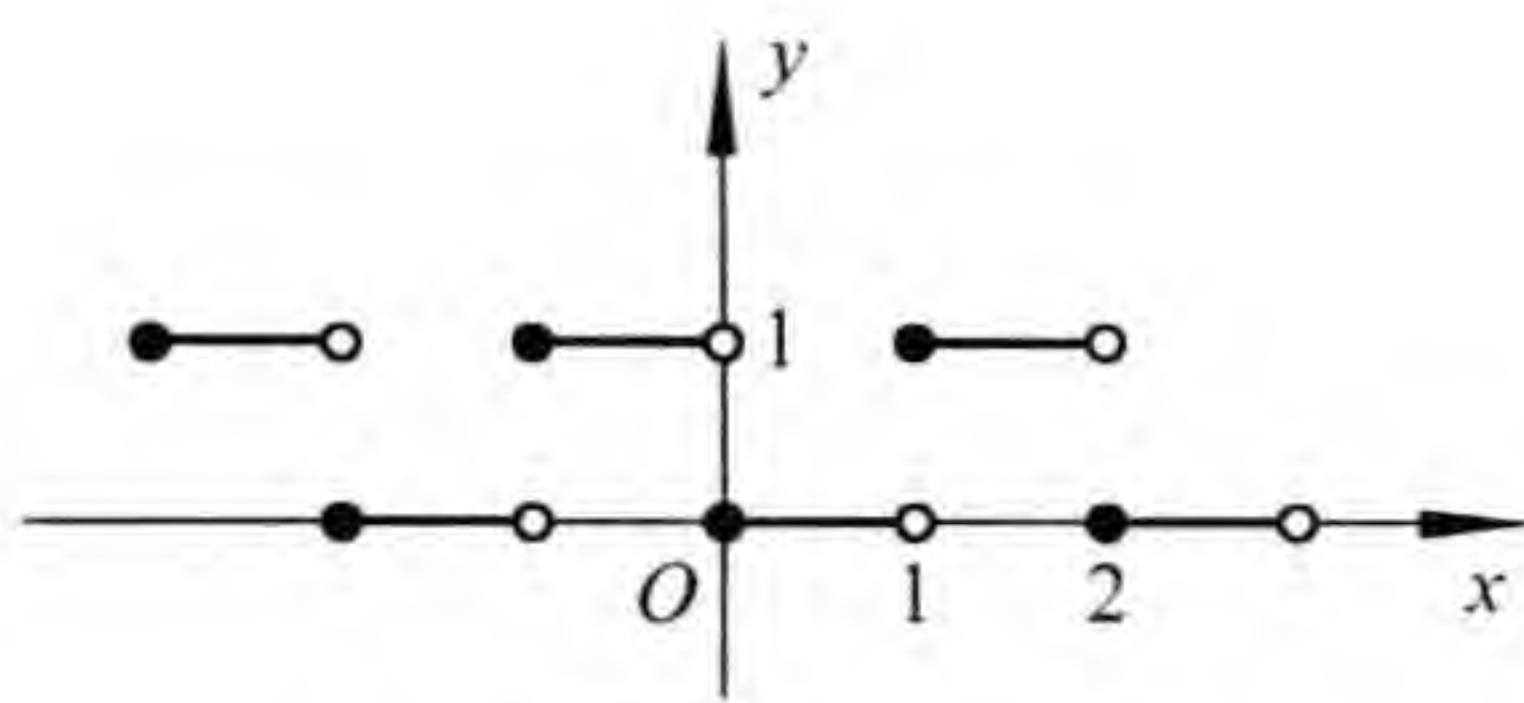


图 1.194

(4) 周期为  $2^*$ , 如图 1.194 所示.

\* ) 原本该题为  $y = |x| - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ , 当  $x \geq 0$  时, 它是以 2 为周期函数.

(5) 周期为 1, 如图 1.195 所示.

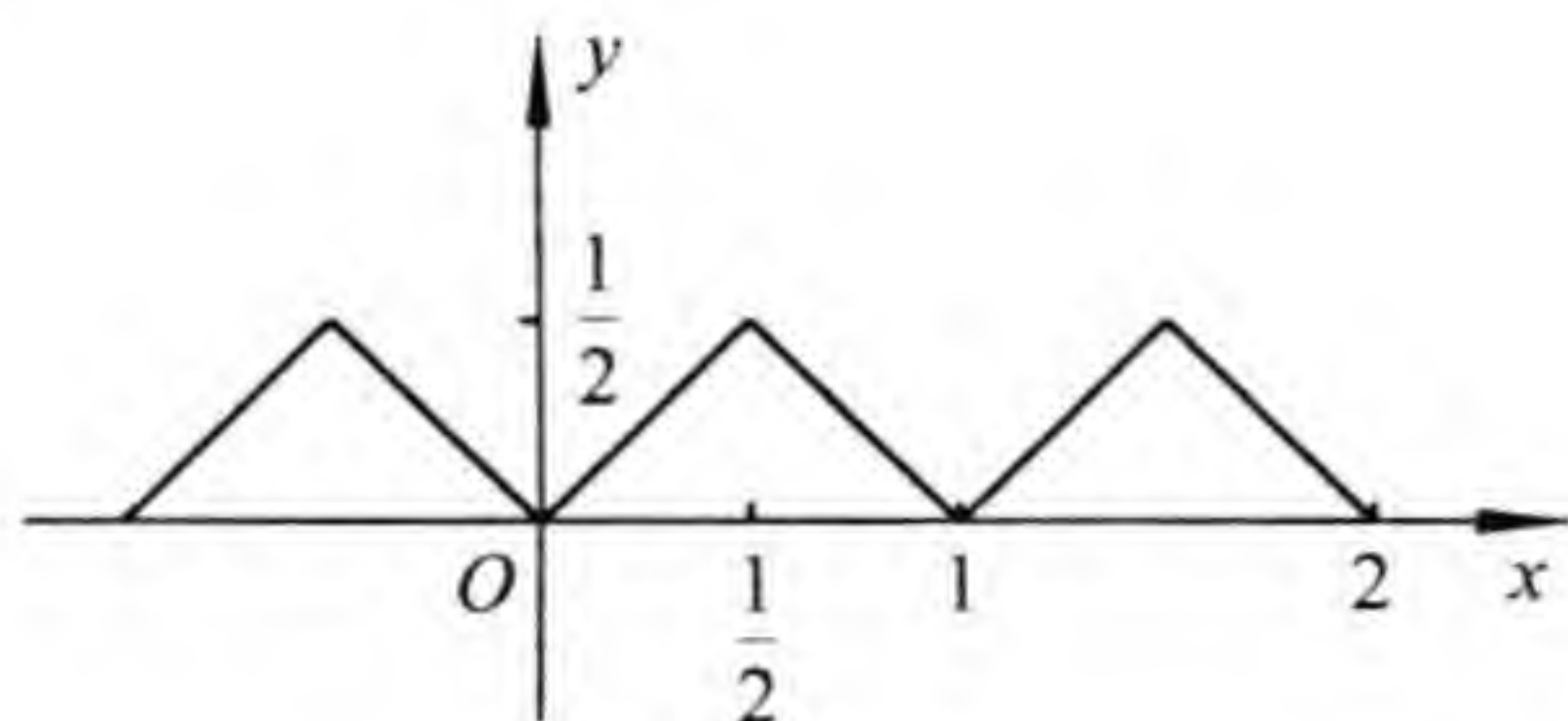


图 1.195

**【363】** 证明: 若函数  $y = f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 的图像关于竖直方向上的两条直线  $x = a$  和  $x = b$  ( $b > a$ ) 对称, 则函数  $f(x)$  为周期函数.

**证明思路** 设  $x \in R$ , 则有  $f(a+x) = f(a-x)$ ,  $f(b+x) = f(b-x)$ , 在前一等式中将  $x$  换成  $x + (b-a)$ , 可得  $f(b-x) = f(2a-b-x)$ . 再依次将  $b-x$  换成  $x$  及  $x$  换成  $2(b-a)+x$ , 即知周期  $T = 2(b-a)$ .

**证** 设  $x$  为任一实数, 则按假设有

$$f(a+x) = f(a-x) \quad \text{及} \quad f(b+x) = f(b-x).$$

在  $f(a+x) = f(a-x)$  中将  $x$  换成  $x + (b-a)$ , 则得

$$f(x+b) = f(a-x-b+a) = f(2a-b-x);$$

而  $f(x+b) = f(b-x)$ , 所以,

$$f(b-x) = f(2a-b-x).$$

将  $b-x$  换成  $x$ , 则得  $f(x) = f(2a-2b+x)$ .

再将  $x$  换成  $2(b-a)+x$ , 即得

$$f(x+2(b-a)) = f(x),$$

即  $f(x)$  为一以  $2(b-a)$  周期的周期函数. 如图 1.196 所示.

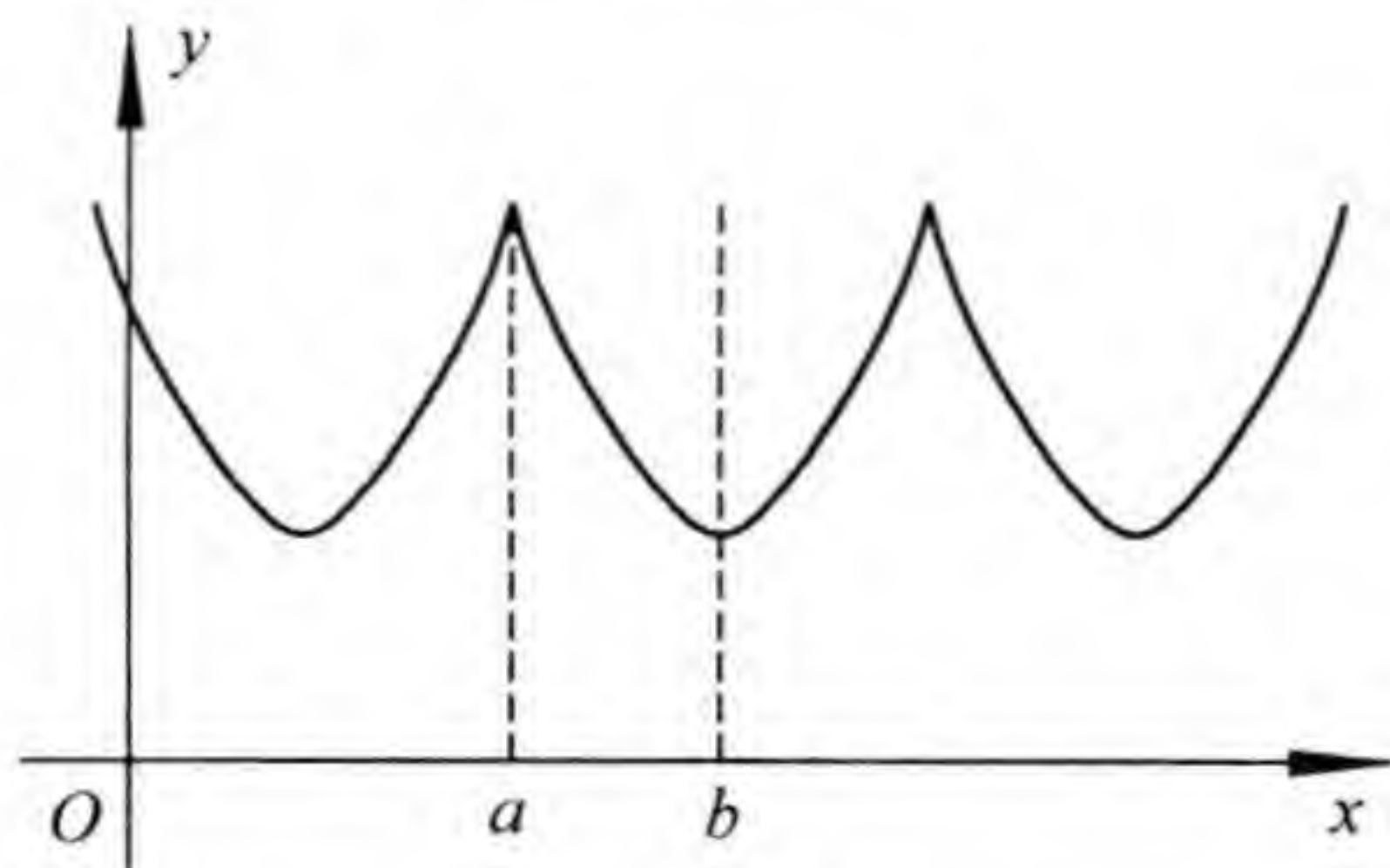


图 1.196

**【364】** 证明: 若函数  $y = f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 的图像关于两点  $A(a, y_0)$  和  $B(b, y_1)$  ( $b > a$ ) 对称, 则函数  $f(x)$  是线性函数与周期函数的和. 特别是, 若  $y_0 = y_1$ , 则函数  $f(x)$  是周期函数.

**证明思路** 设  $x \in R$ , 则有  $f(a+x) - y_0 = y_0 - f(a-x)$ ,  $f(b+x) - y_1 = y_1 - f(b-x)$ . 在前一等式中, 将  $x$  换成  $x + (b-a)$ , 可得  $f(b-x) = 2(y_1 - y_0) + f(2a-b-x)$ . 再依次将  $b-x$  换成  $x$  及  $x$  换成  $2(b-a)+x$ , 又可得  $f(x) = 2(y_0 - y_1) + f[2(b-a)+x]$ .



令  $f(x) = -\frac{y_0 - y_1}{b-a}x + \varphi(x)$ , 可证  $\varphi(x) = \varphi[x + 2(b-a)]$ .

证 设  $x$  是任一实数, 按假设有:

$$f(a+x) - y_0 = y_0 - f(a-x), \quad (1)$$

$$f(b+x) - y_1 = y_1 - f(b-x). \quad (2)$$

在(1)中, 将  $x$  换成  $x + (b-a)$  则得

$$f(b+x) - y_0 = y_0 - f(2a-b-x). \quad (3)$$

将(3)代入(2)得

$$2y_1 - f(b-x) = 2y_0 - f(2a-b-x),$$

即

$$f(b-x) = 2(y_1 - y_0) + f(2a-b-x). \quad (4)$$

在(4)中, 将  $b-x$  换成  $x$ , 则得

$$f(x) = 2(y_1 - y_0) + f(2a-2b+x). \quad (5)$$

再在(5)中将  $x$  换成  $2(b-a) + x$ , 则得

$$f(x) = 2(y_0 - y_1) + f[2(b-a) + x]. \quad (6)$$

令

$$f(x) = -\frac{y_0 - y_1}{b-a}x + \varphi(x). \quad (7)$$

下面证明  $\varphi(x)$  一定是周期函数. 事实上, 由(7)式我们有

$$f[x + 2(b-a)] = -\frac{y_0 - y_1}{b-a}[x + 2(b-a)] + \varphi[x + 2(b-a)],$$

$$f(x) - f[x + 2(b-a)] = 2(y_0 - y_1) + \varphi(x) - \varphi[x + 2(b-a)].$$

因此, 由(6)式可得

$$\varphi(x) = \varphi[x + 2(b-a)]. \quad (8)$$

由(7)式和(8)式可知,  $f(x)$  是一个线性函数与一个周期函数的和.

若  $y_0 = y_1$ , 则由(7)式和(8)式可知,  $f(x)$  是一个周期函数.

**【365】** 证明: 若函数  $y = f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 的图像关于点  $A(a, y_0)$  和直线  $x = b$  ( $b \neq a$ ) 对称, 则函数  $f(x)$  是周期函数.

**证明思路** 设  $x \in R$ , 则有  $f(a+x) - y_0 = y_0 - f(a-x)$ ,  $f(b+x) = f(b-x)$ . 在前一等式中, 依次将  $x$  换成  $x + (b-a)$ ,  $b-x$  换成  $x$  及  $x$  换成  $2b-2a+x$ , 可得  $f(2b-2a+x) = f(2a-2b+x)$ . 若再将  $x$  换成  $2b-2a+x$ , 即知  $f(x)$  为一以  $4(b-a)$  为周期的周期函数.

证 设  $x$  为任一实数, 按假设则有

$$f(a+x) - y_0 = y_0 - f(a-x), \quad f(b+x) = f(b-x). \quad (1)$$

在(1)的前一等式中, 将  $x$  换成  $x + (b-a)$ , 则得

$$f(b+x) = 2y_0 - f(2a-b-x),$$

即

$$f(b-x) = 2y_0 - f(2a-b-x). \quad (2)$$

在(2)中, 将  $b-x$  换成  $x$ , 则得

$$f(x) = 2y_0 - f(2a-2b+x). \quad (3)$$

在(3)中, 将  $x$  换成  $2b-2a+x$ , 则得

$$f(2b-2a+x) = 2y_0 - f(x). \quad (4)$$

由(3)、(4)得  $f(2a-2b+x) = f(2b-2a+x)$ , 再将  $x$  换成  $2b-2a+x$ , 即得

$$f(x) = f(4(b-a) + x).$$

此即证明  $f(x)$  为一以  $4(b-a)$  为周期的周期函数.



**【366】** 设  $f(x+1)=2f(x)$ , 且当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f(x)=x(1-x)$ , 作函数  $y=f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 的图像.

**解** 当  $0 \leq x \leq 1$  时, 图像为一抛物线, 顶点为  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ . 当  $1 \leq x \leq 2$  时, 只要将纵标放大 2 倍, 余类推. 如图 1.197 所示.

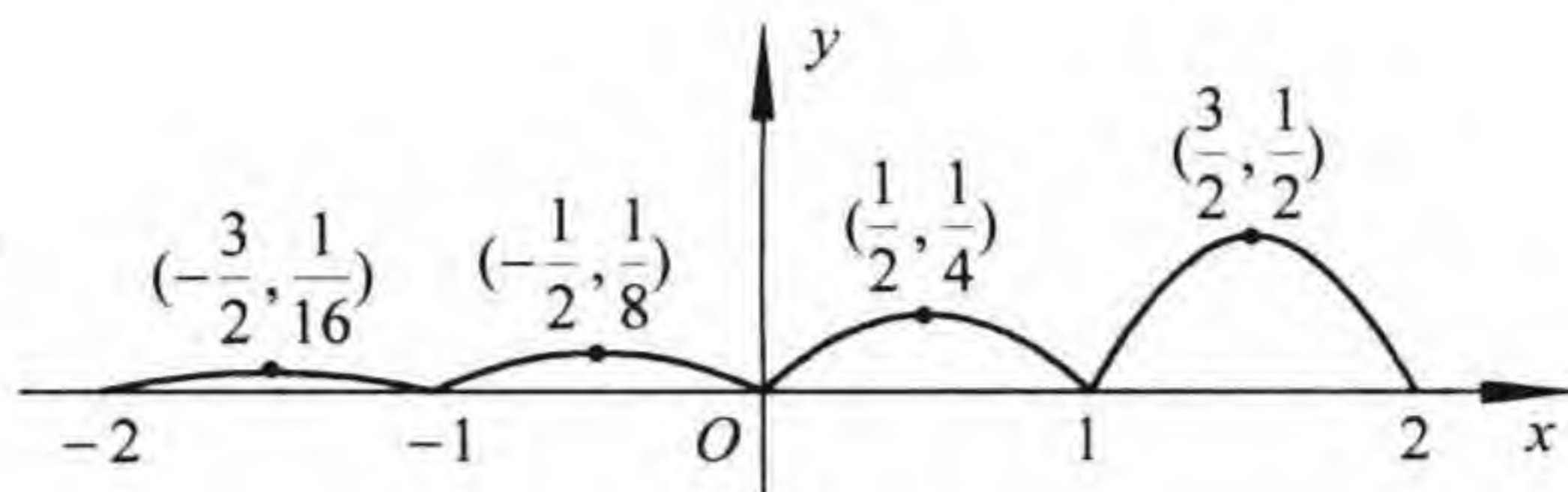


图 1.197

当  $x = \frac{2n+1}{2}$  时,  $y = \frac{2^n}{4} = 2^{n-2}$ , 因而当  $n \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow +\infty$ ; 当  $n \rightarrow -\infty$  时,  $y \rightarrow 0$ .

**【367】** 设  $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$ , 且当  $0 \leq x \leq \pi$  时,  $f(x)=0$ . 作函数  $y=f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 的图像.

**解** 由题设知: 当  $0 \leq x \leq \pi$  时,  $f(x)=0$ ;

当  $\pi < x \leq 2\pi$  时, 设  $0 < x_1 \leq \pi$ , 则有  $f(x)=f(x_1+\pi)=f(x_1)+\sin x_1=\sin x_1$ ;

当  $2\pi < x \leq 3\pi$  时, 设  $\pi < x_2 \leq 2\pi$ , 则有  $f(x)=f(x_2+\pi)=f(x_2)+\sin x_2=0$ ;

余类推. 周期为  $2\pi$ . 如图 1.198 所示.

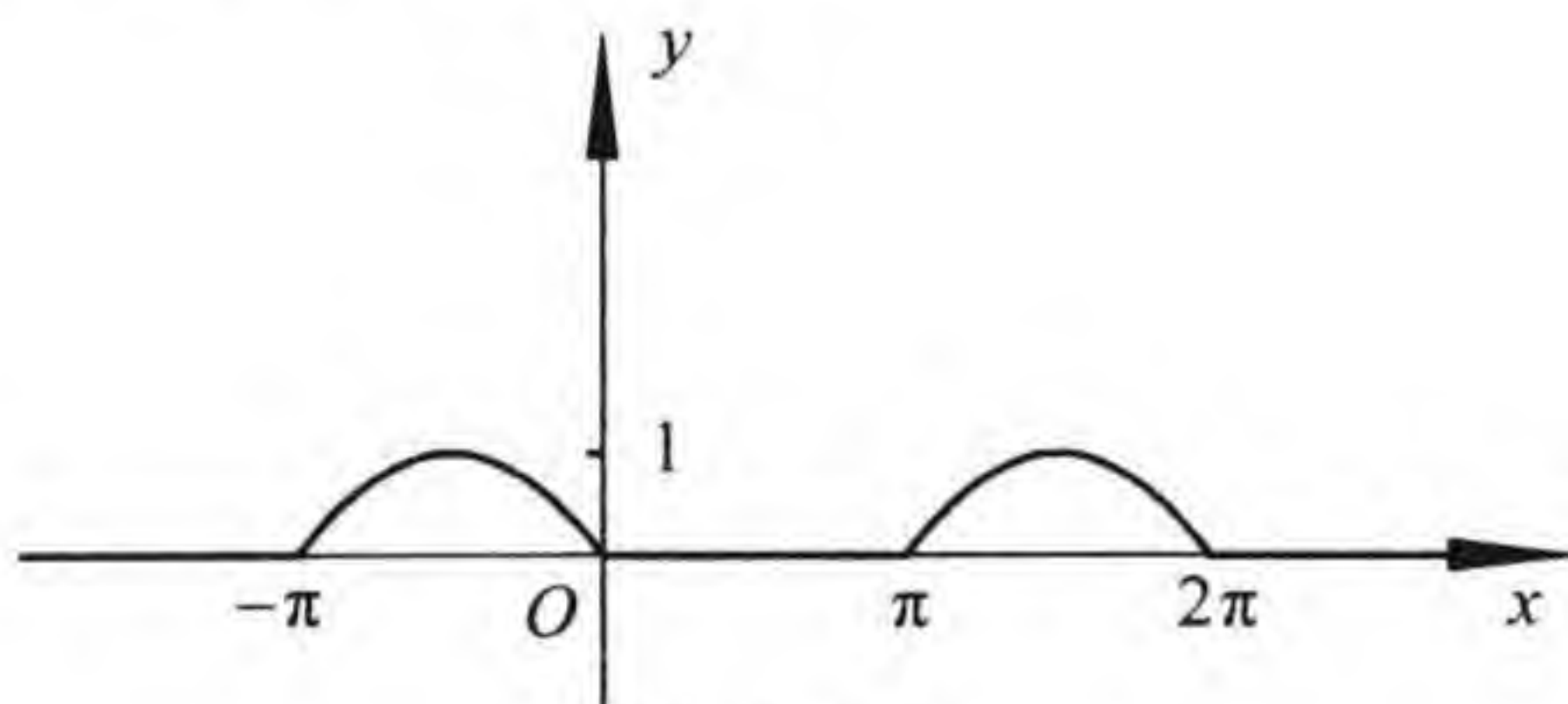


图 1.198

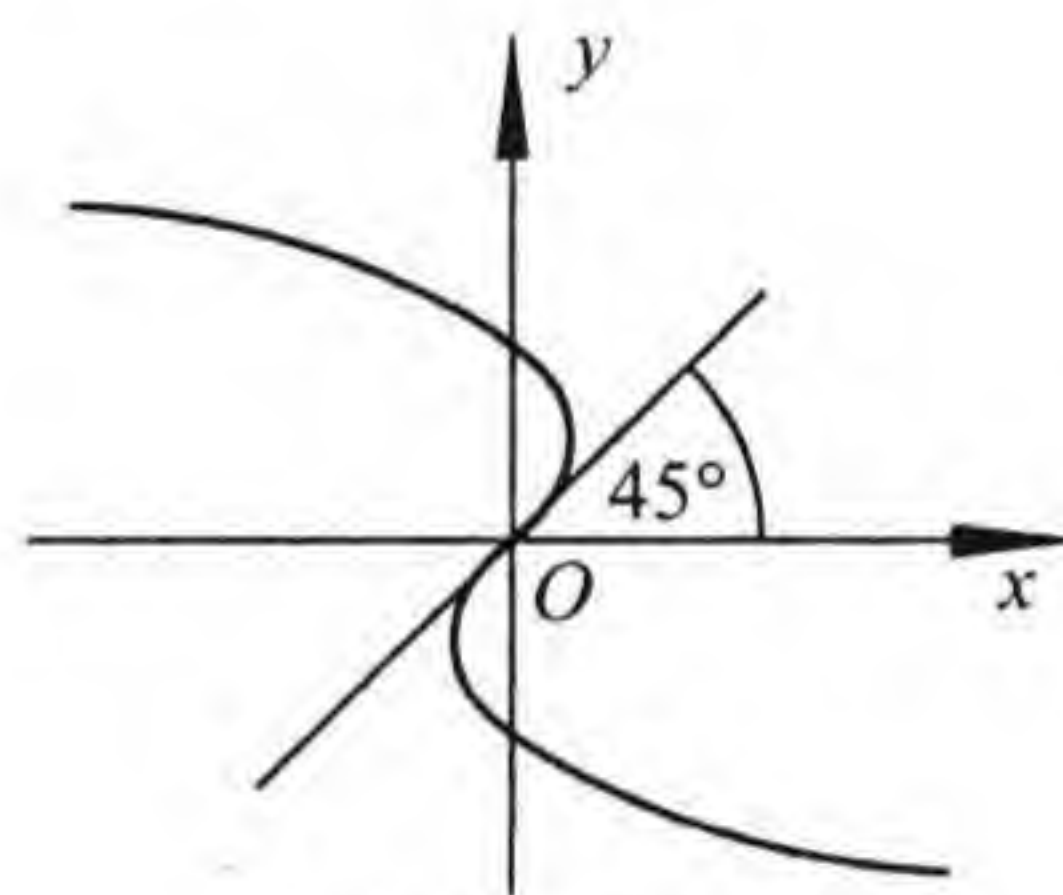


图 1.199

**【368】** 作函数  $y=y(x)$  的图像, 设:

(1)  $x=y-y^3$ ; (2)  $x=\frac{1-y}{1+y^2}$ ; (3)  $x=y-\ln y$ ; (4)  $x^2=\sin y$ .

**解** (1) 如图 1.199 所示. (2) 如图 1.200 所示. (3) 如图 1.201 所示. (4) 如图 1.202 所示.

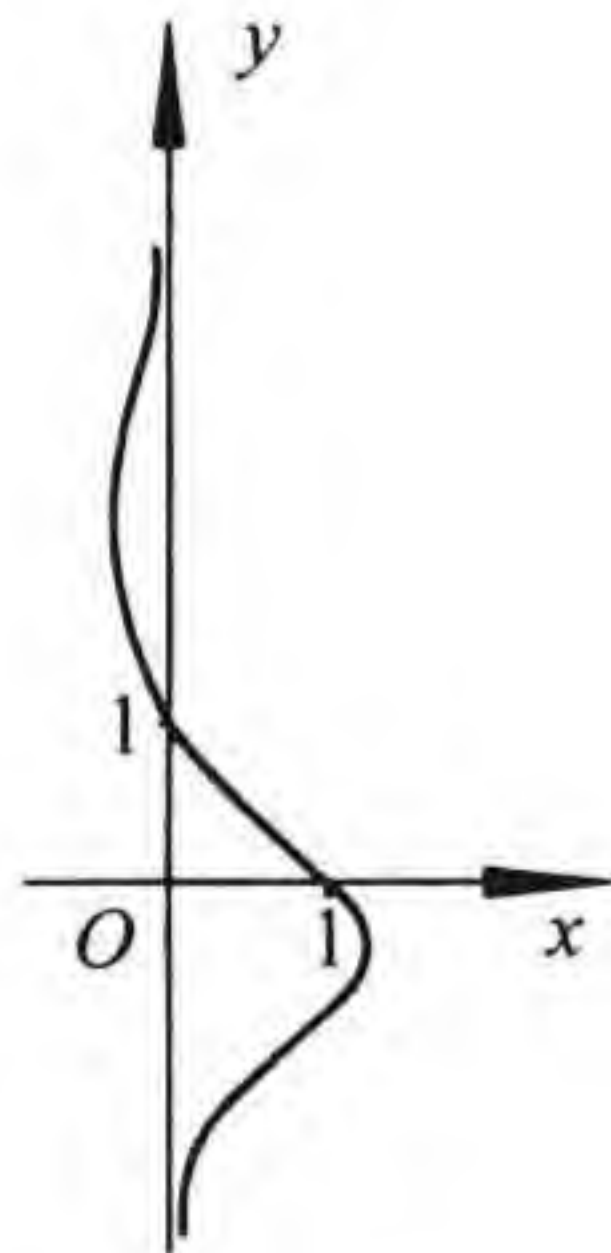


图 1.200

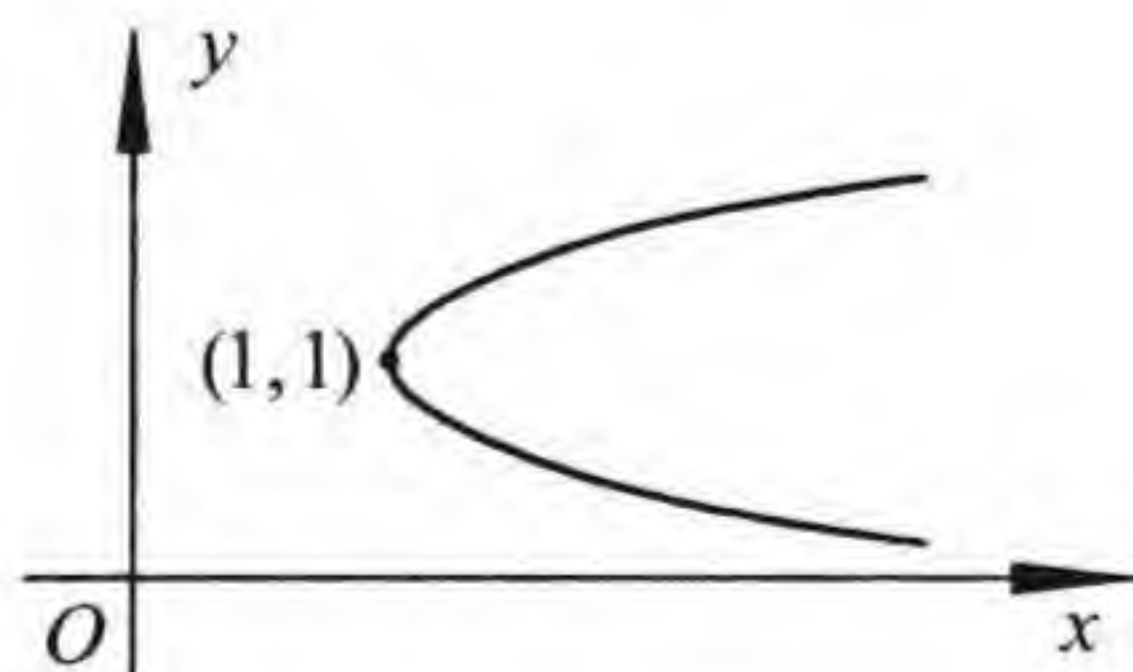


图 1.201

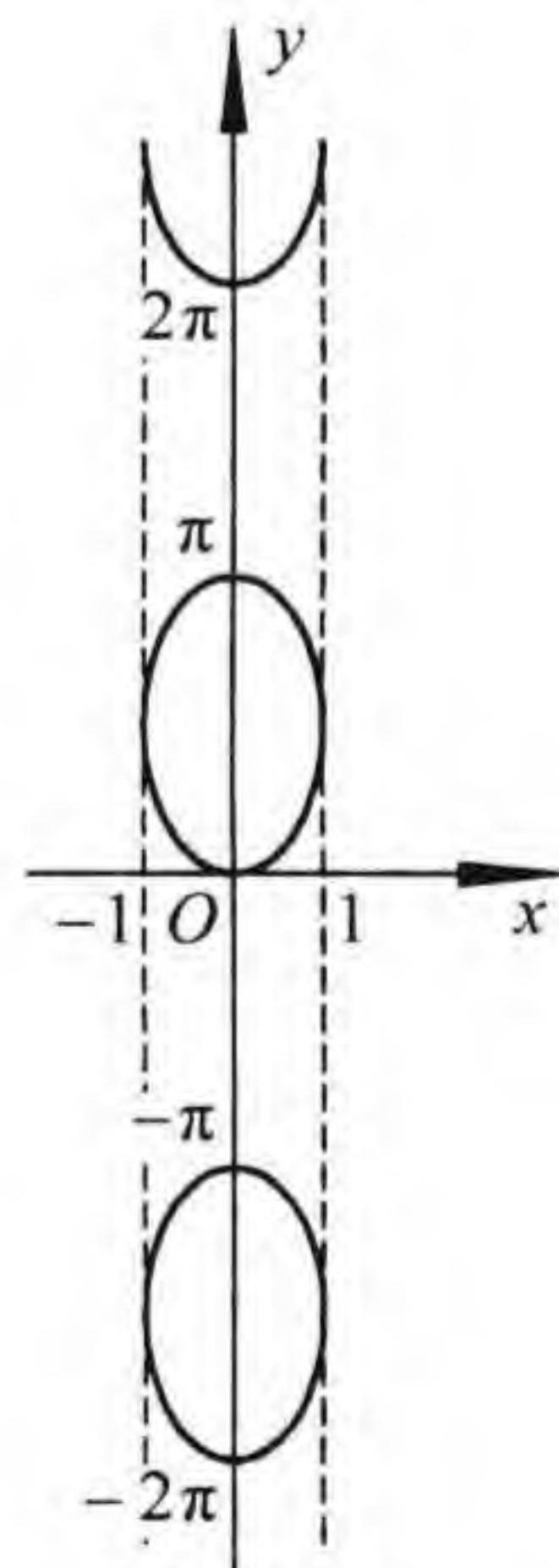


图 1.202



【369】 作出下列用参数形式表示的函数的图像, 设:

- (1)  $x=1-t, y=1-t^2$ ; (2)  $x=t+\frac{1}{t}, y=t+\frac{1}{t^2}$ ;  
 (3)  $x=10\cos t, y=\sin t$  (椭圆); (4)  $x=\operatorname{cht}, y=\operatorname{sht}$  (双曲线);  
 (5)  $x=5\cos^2 t, y=3\sin^2 t$ ;  
 (6)  $x=2(t-\sin t), y=2(1-\cos t)$  (摆线);  
 (7)  $x=\sqrt[t+1]{t}, y=\sqrt[t+1]{t+1}$  ( $t>0$ ).

解 (1)  $y-1=-(x-1)^2$ . 如图 1.203 所示.

(2) 如图 1.204 所示.

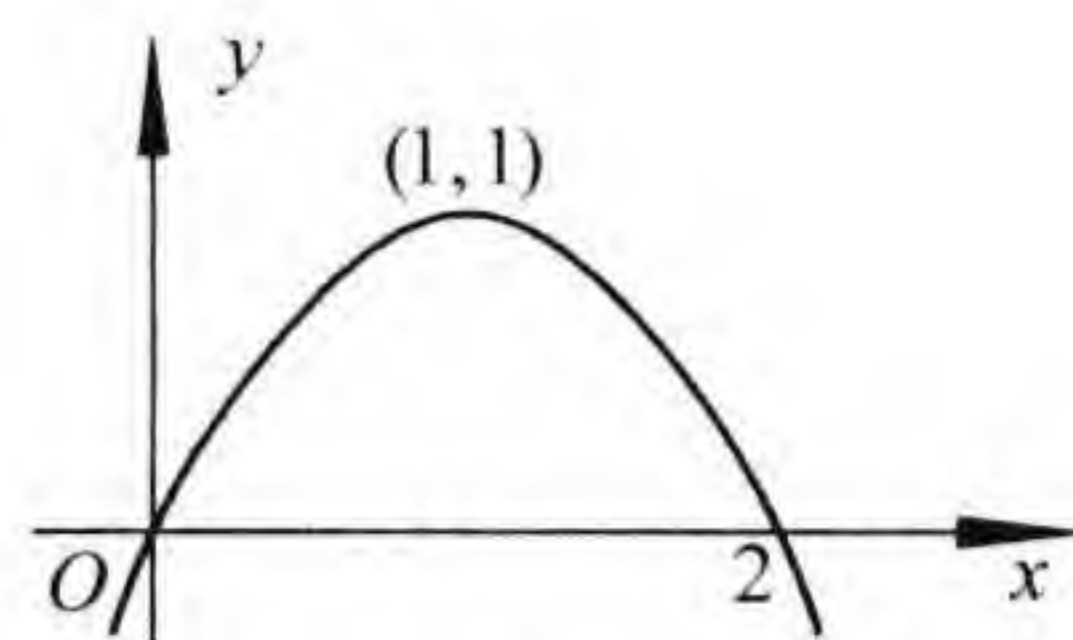


图 1.203

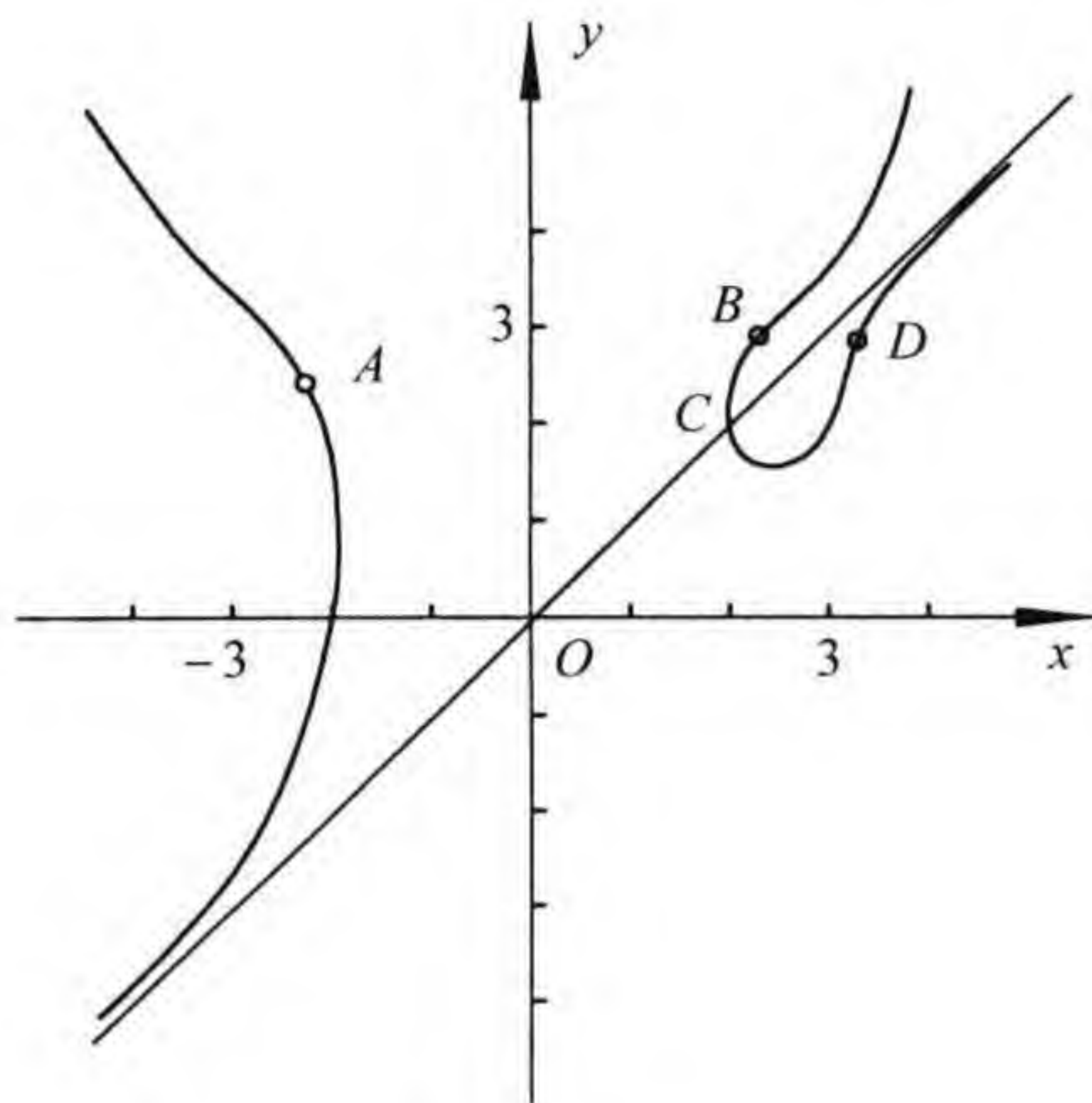


图 1.204

(3)  $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ . 如图 1.205 所示.

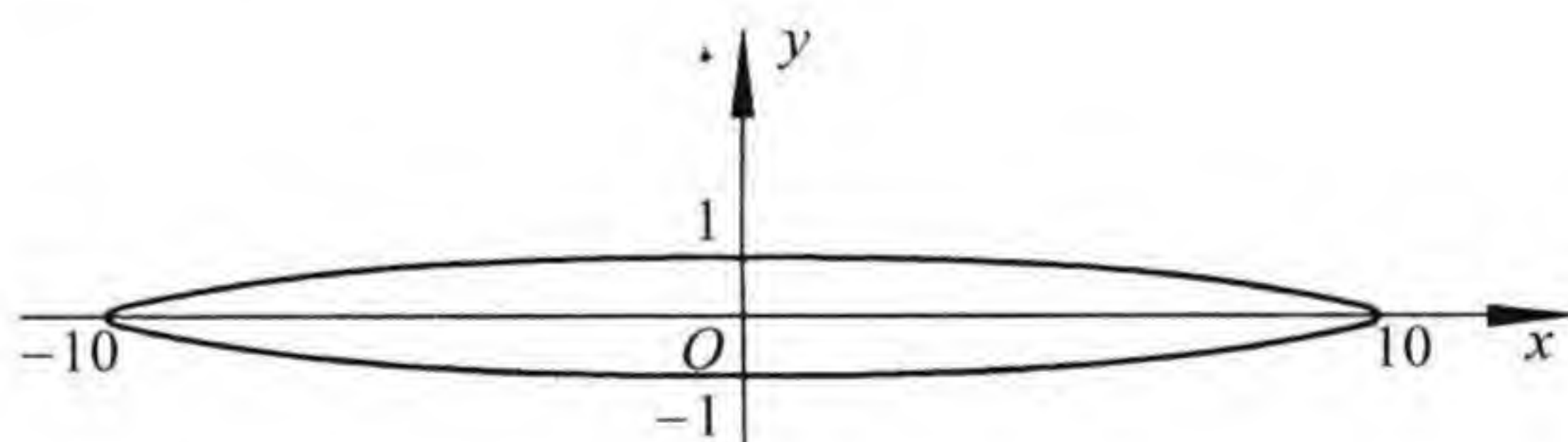


图 1.205

(4)  $x^2 - y^2 = 1$ . 如图 1.206 所示.

(5)  $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ , 且  $0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3$ . 如图 1.207 所示.

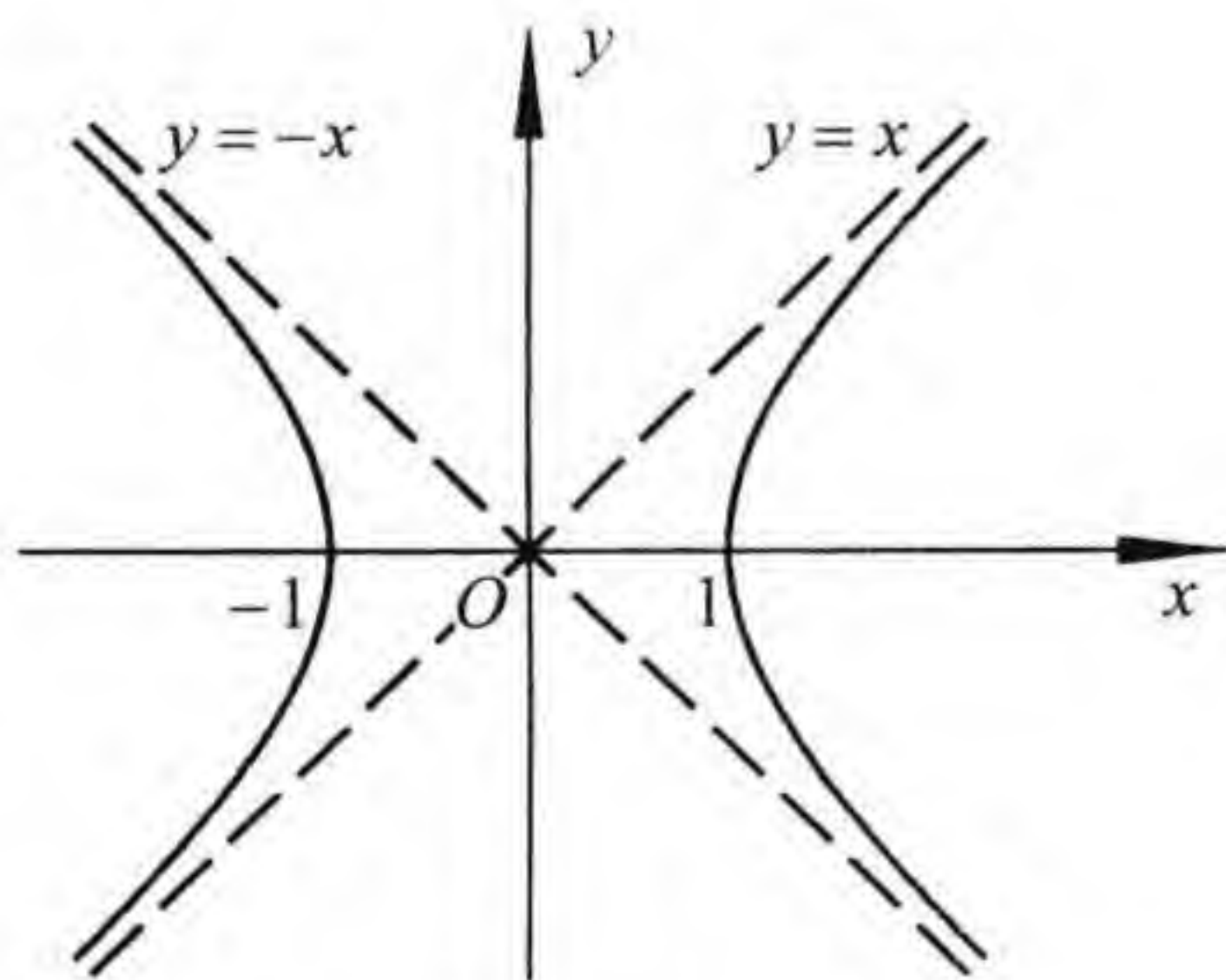


图 1.206

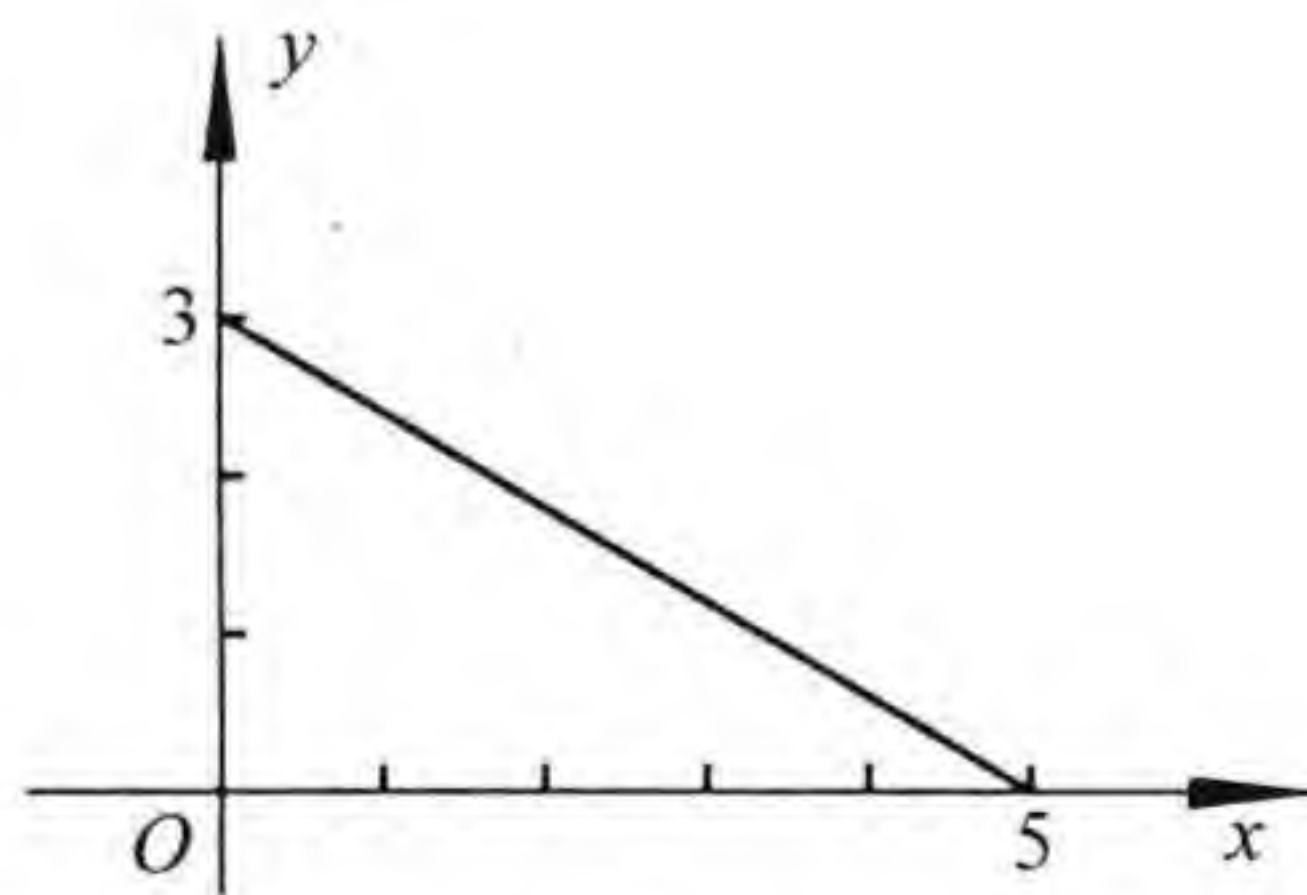


图 1.207

(6) 如图 1.208 所示.

(7) 如图 1.209 所示.



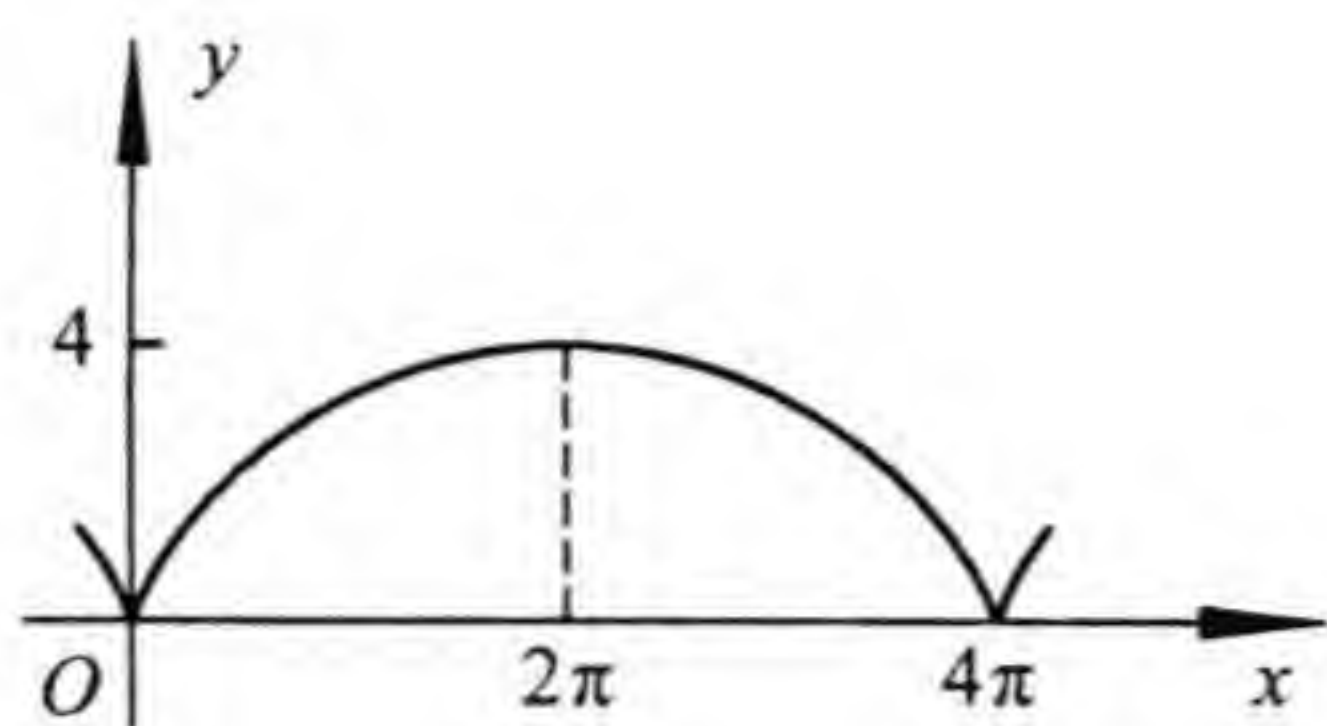


图 1.208

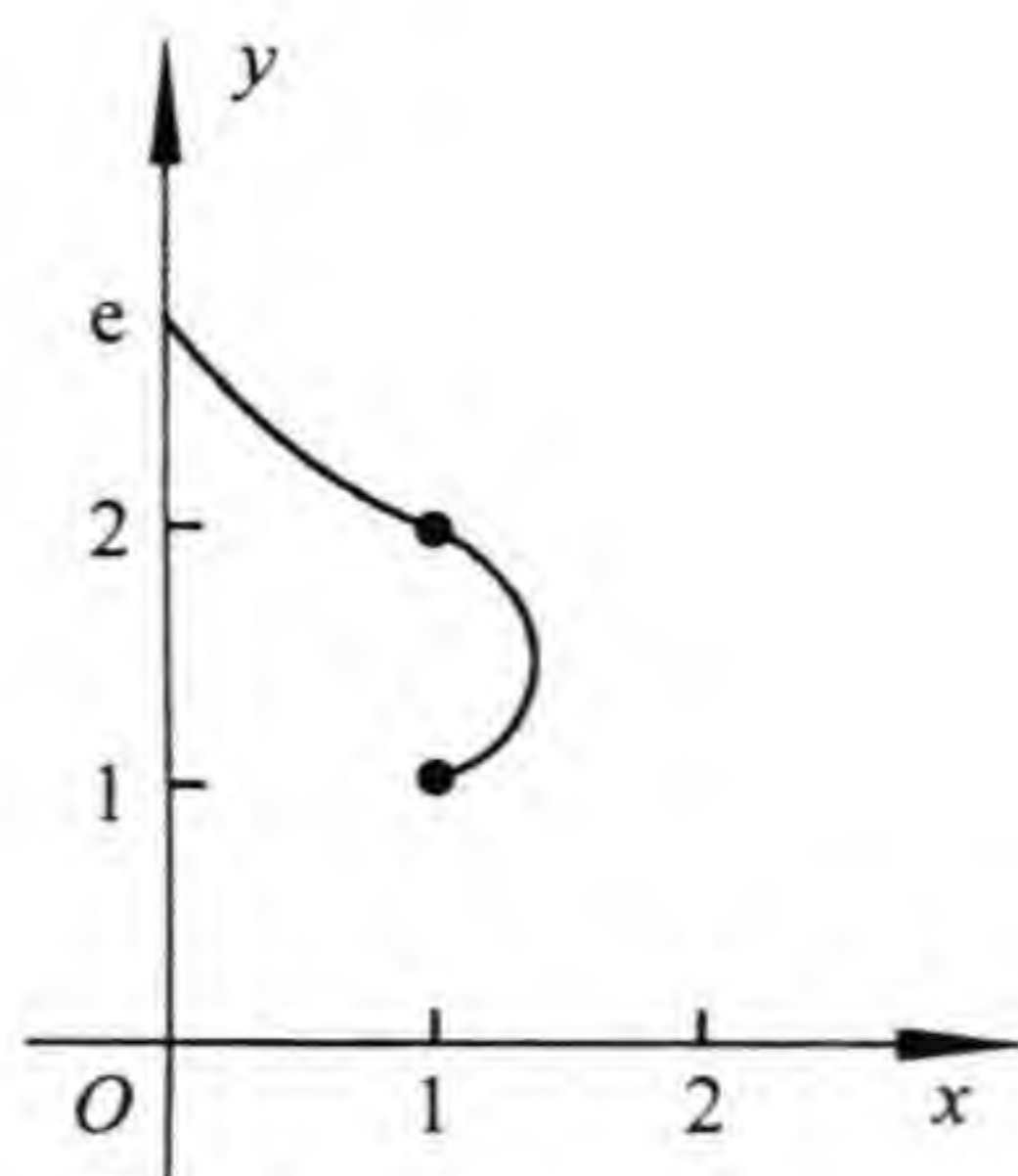


图 1.209

**【370】** 作下列隐函数的图像：

(1)  $x^2 - xy + y^2 = 1$  (椭圆)；

(2)  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$  (笛卡儿叶形线)；

(3)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  (抛物线)；

(4)  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$  (星形线)；

(5)  $\sin x = \sin y$ ；

(6)  $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$ ；

(7)  $x^y = y^x$  ( $x > 0, y > 0$ )；

(8)  $x - |x| = y - |y|$ 。

**解** (1) 将坐标轴按正向绕原点旋转  $45^\circ$ , 得新坐标系  $Ox'y'$ , 则由旋转公式得

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

代入原式得

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{3} = 1.$$

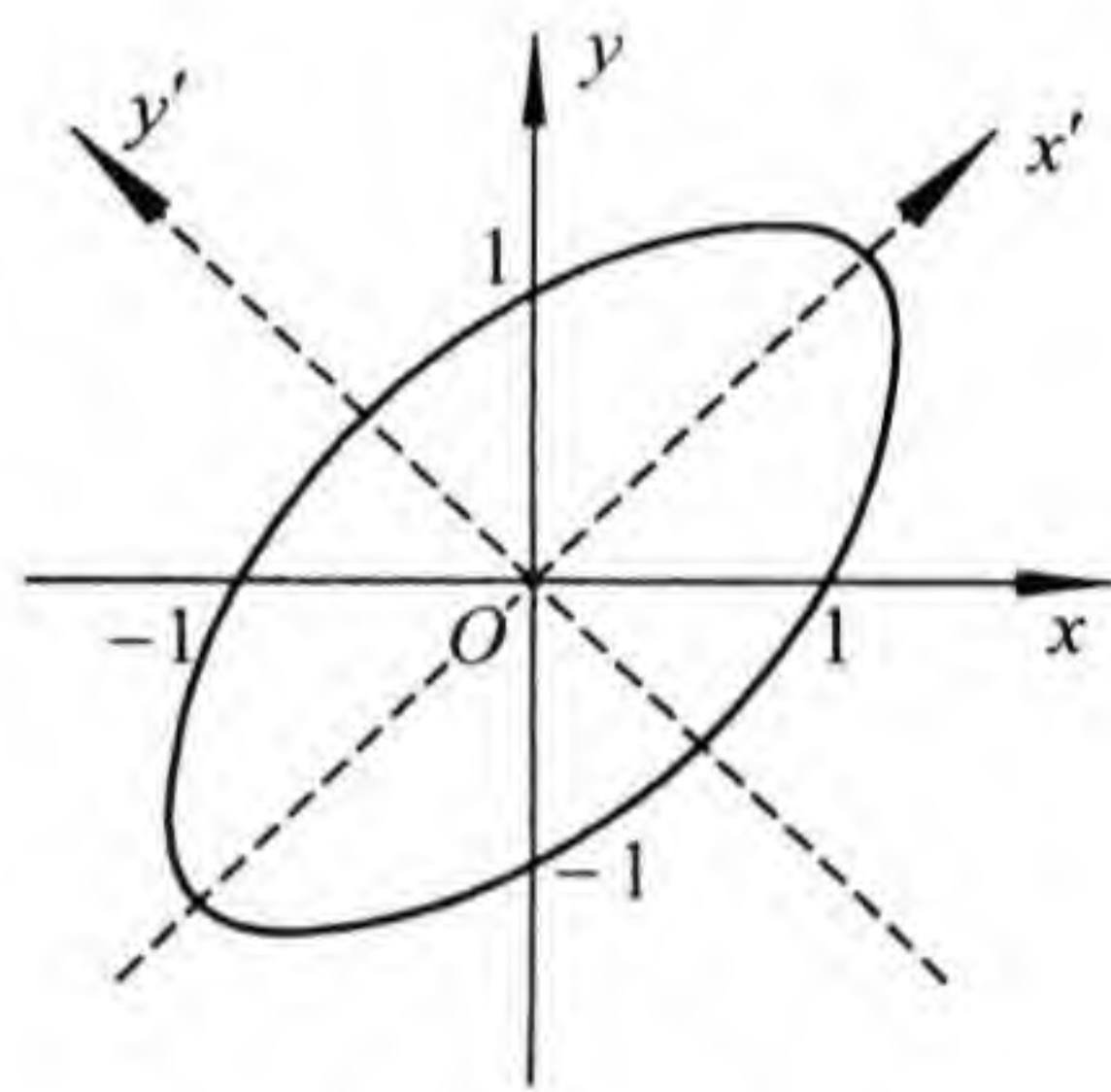


图 1.210

如图 1.210 所示.

(2) 渐近线为  $x + y + 1 = 0$ . 如图 1.211 所示.

(3) 如图 1.212 所示.

(4) 如图 1.213 所示.

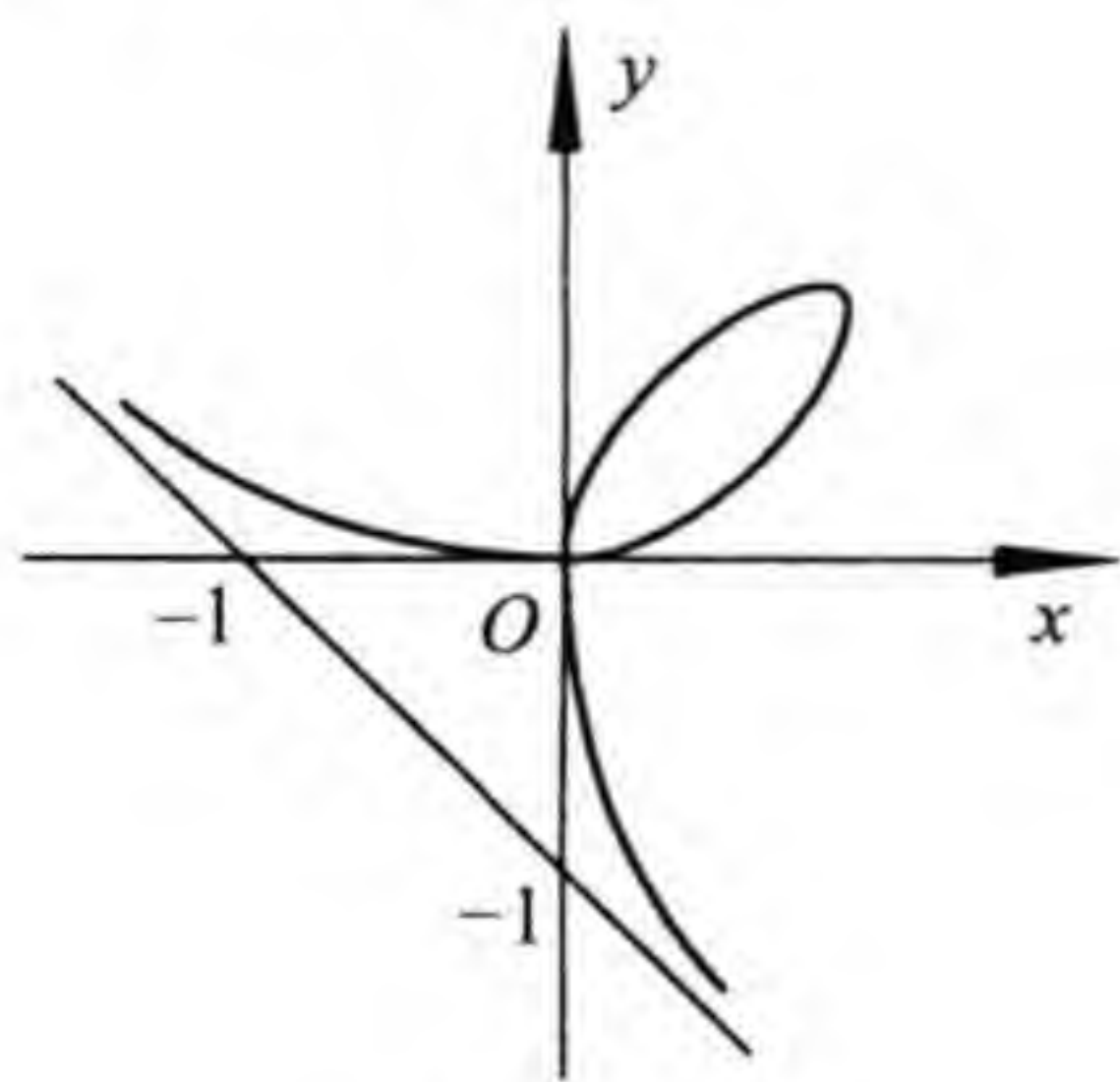


图 1.211

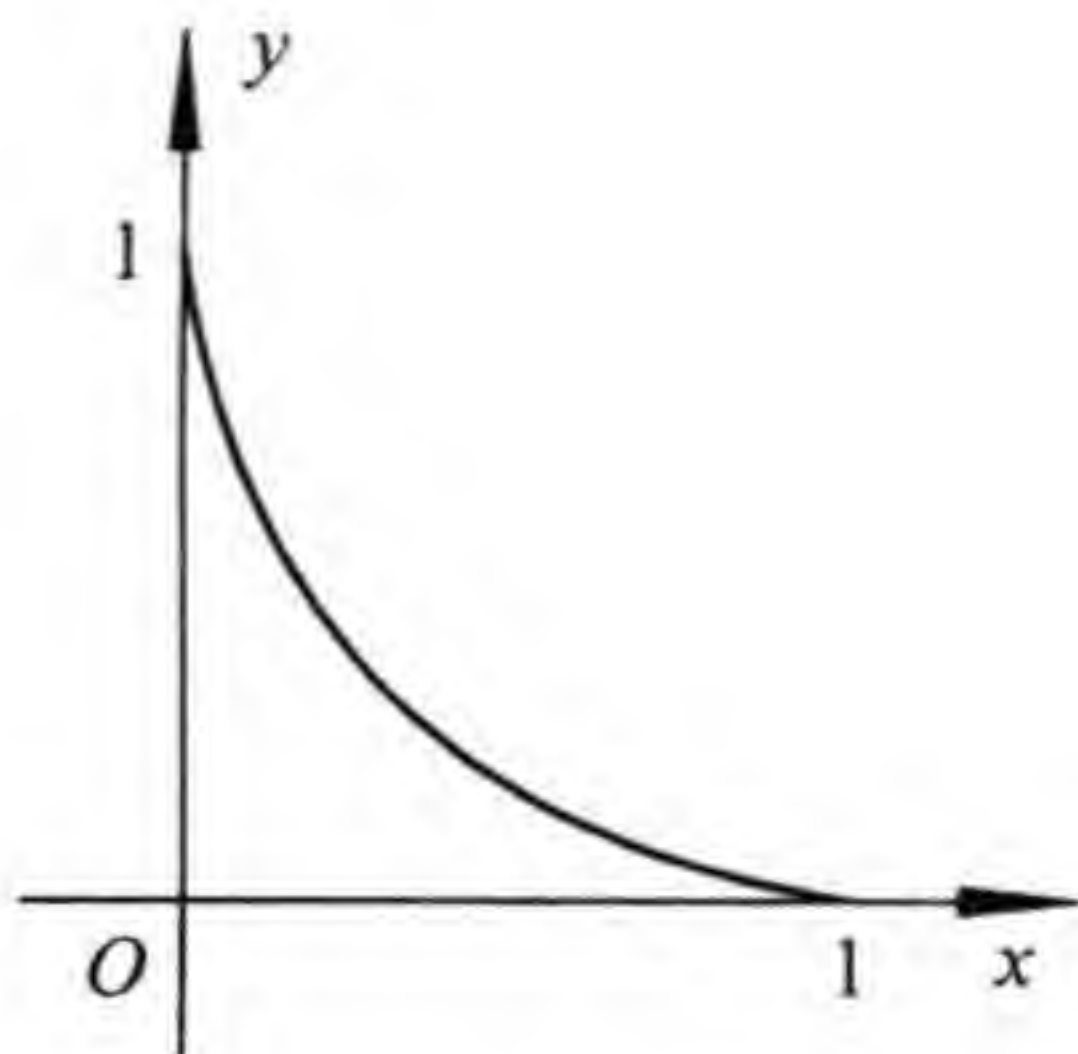


图 1.212

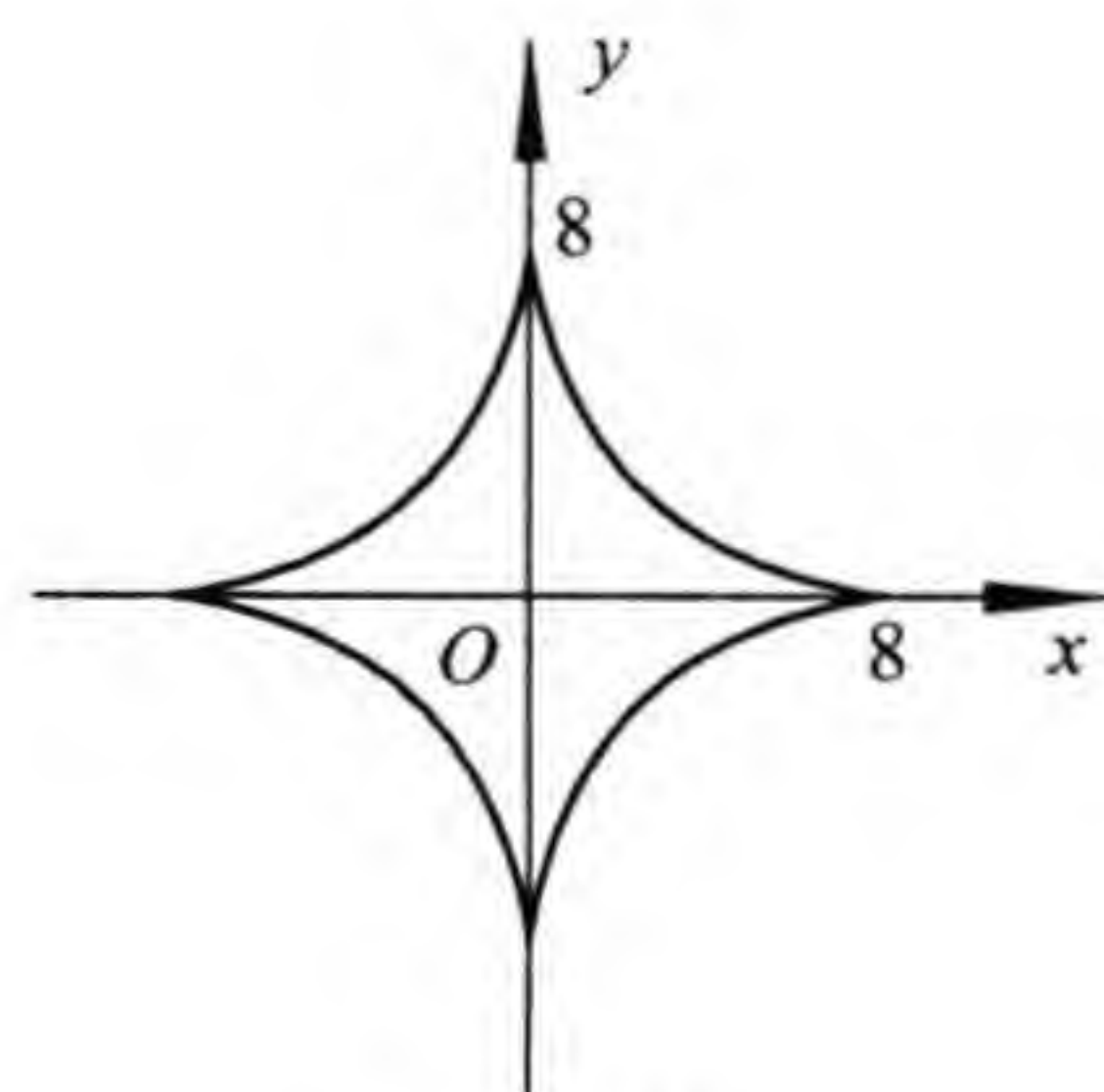


图 1.213

(5)  $y = x + 2k\pi$  或  $y = (2k+1)\pi - x$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). 如图 1.214 所示.

(6)  $y = x^2 + 2k$  或  $y = 2k - x^2$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). 如图 1.215 所示.

(7) 如图 1.216 所示. 参看 1544 题的作图法.

(8) 如图 1.217 所示. 图像包括第一象限阴影部分 (连同边界):  $x \geq 0, y \geq 0$  以及第三象限的黑粗线部分:  $y = x, x < 0, y < 0$ .



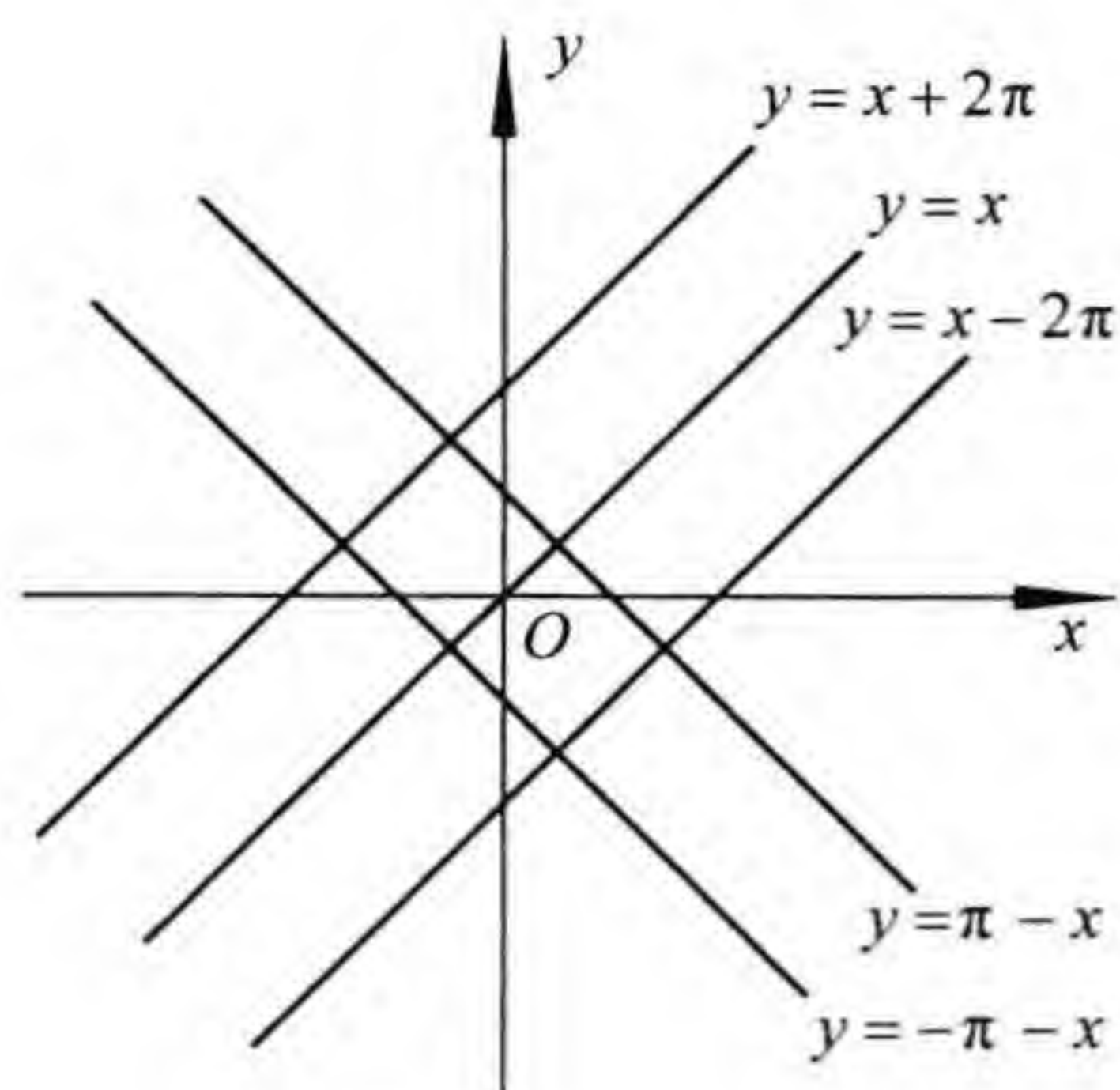


图 1.214

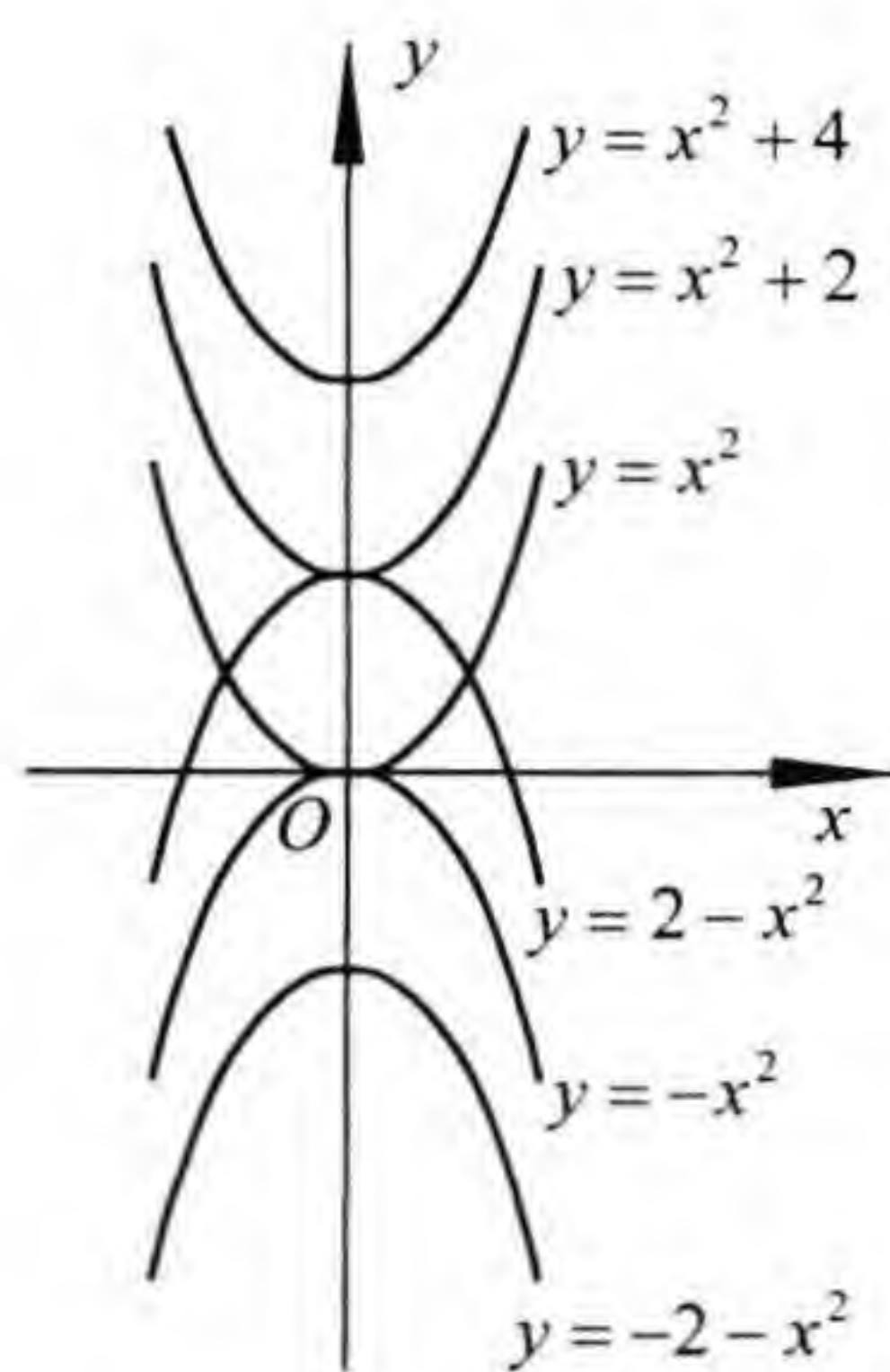


图 1.215

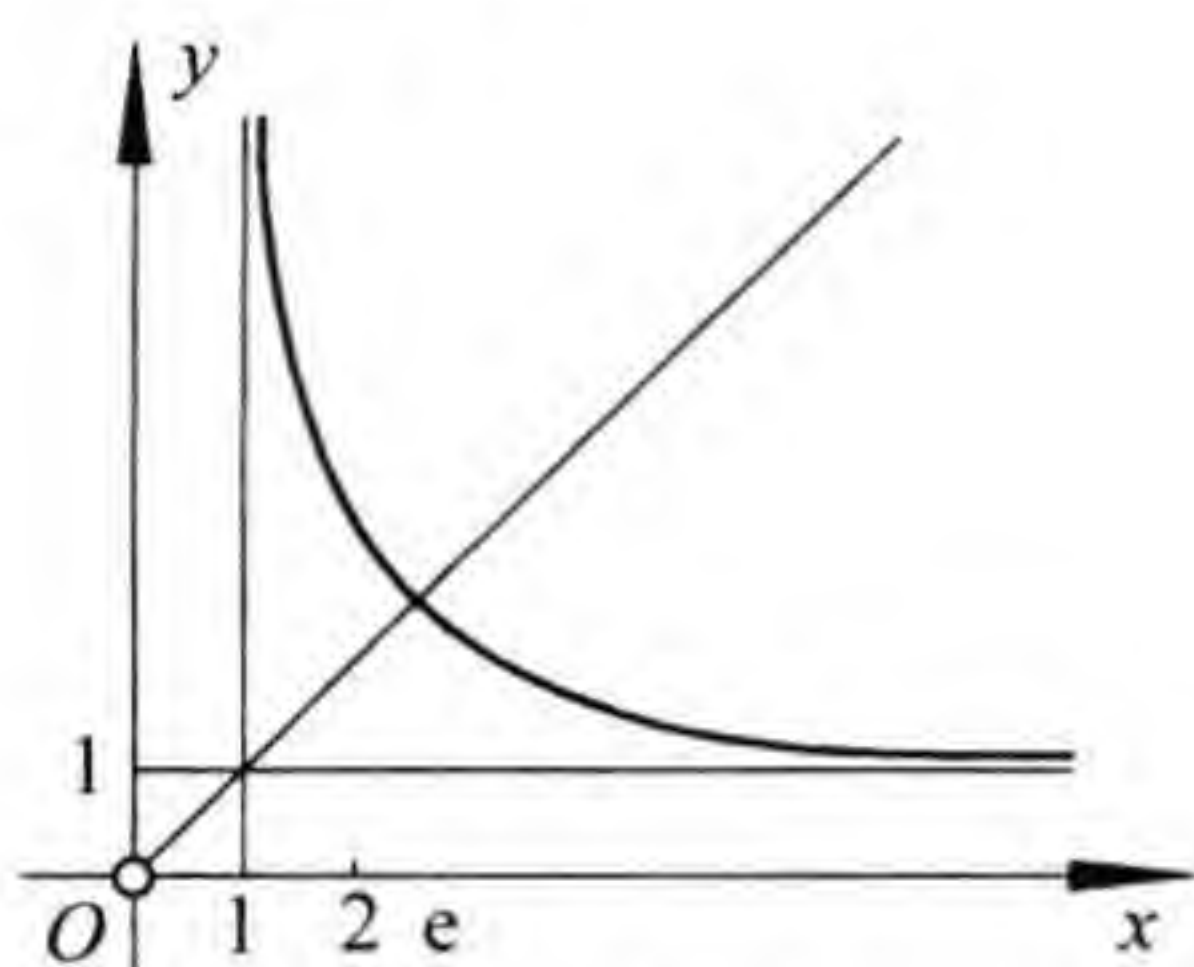


图 1.216

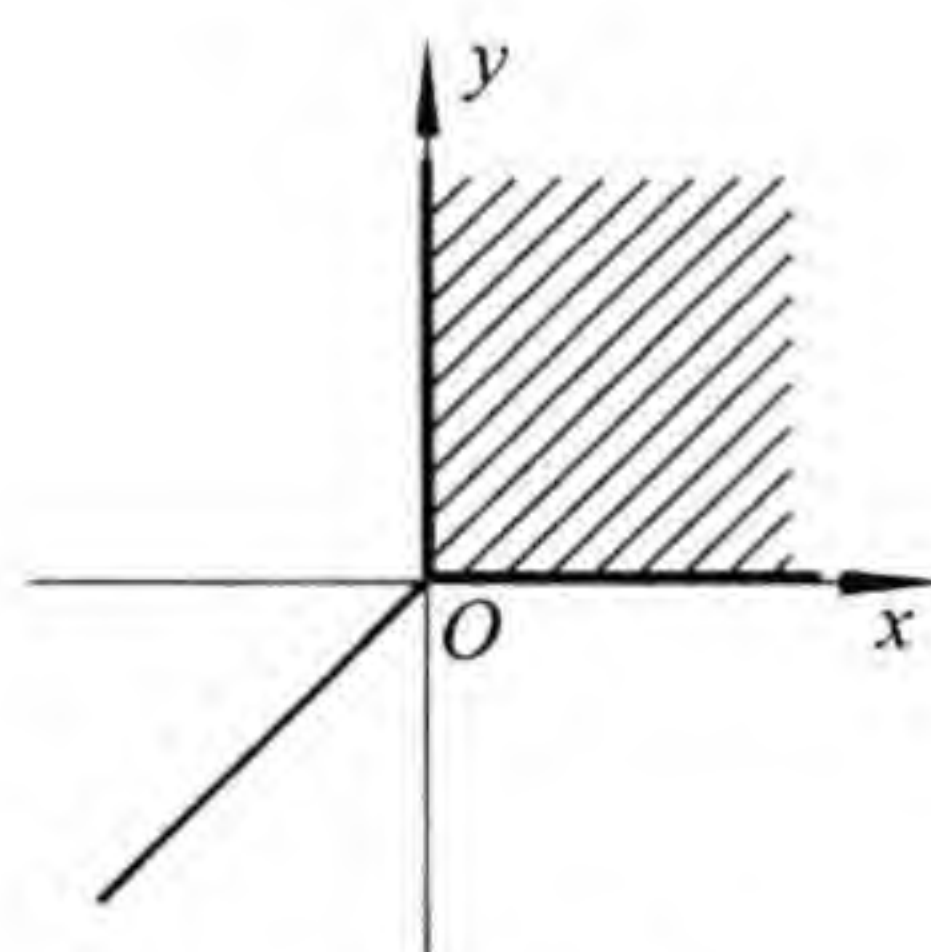


图 1.217

【371】 在极坐标系 $(r, \varphi)$ 中作出下列函数 $r=r(\varphi)$ 的图像:

- (1)  $r=\varphi$  (阿基米得螺线); (2)  $r=\frac{\pi}{\varphi}$  (双曲螺线);  
 (3)  $r=\frac{\varphi}{\varphi+1}$  ( $0 \leq \varphi < +\infty$ ); (4)  $r=2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$  (对数螺线);  
 (5)  $r=2(1+\cos\varphi)$  (心脏线); (6)  $r=10\sin 3\varphi$  (三瓣玫瑰线);  
 (7)  $r^2=36\cos 2\varphi$  (伯努利双纽线); (8)  $\varphi=\frac{r}{r-1}$  ( $r>1$ );  
 (9)  $\varphi=2\pi\sin r$ .

解 (1) 如图 1.218 所示.  $M_1M_2=M_2M_3=\dots=2\pi$ .

(2) 如图 1.219 所示.

(3) 如图 1.220 所示.

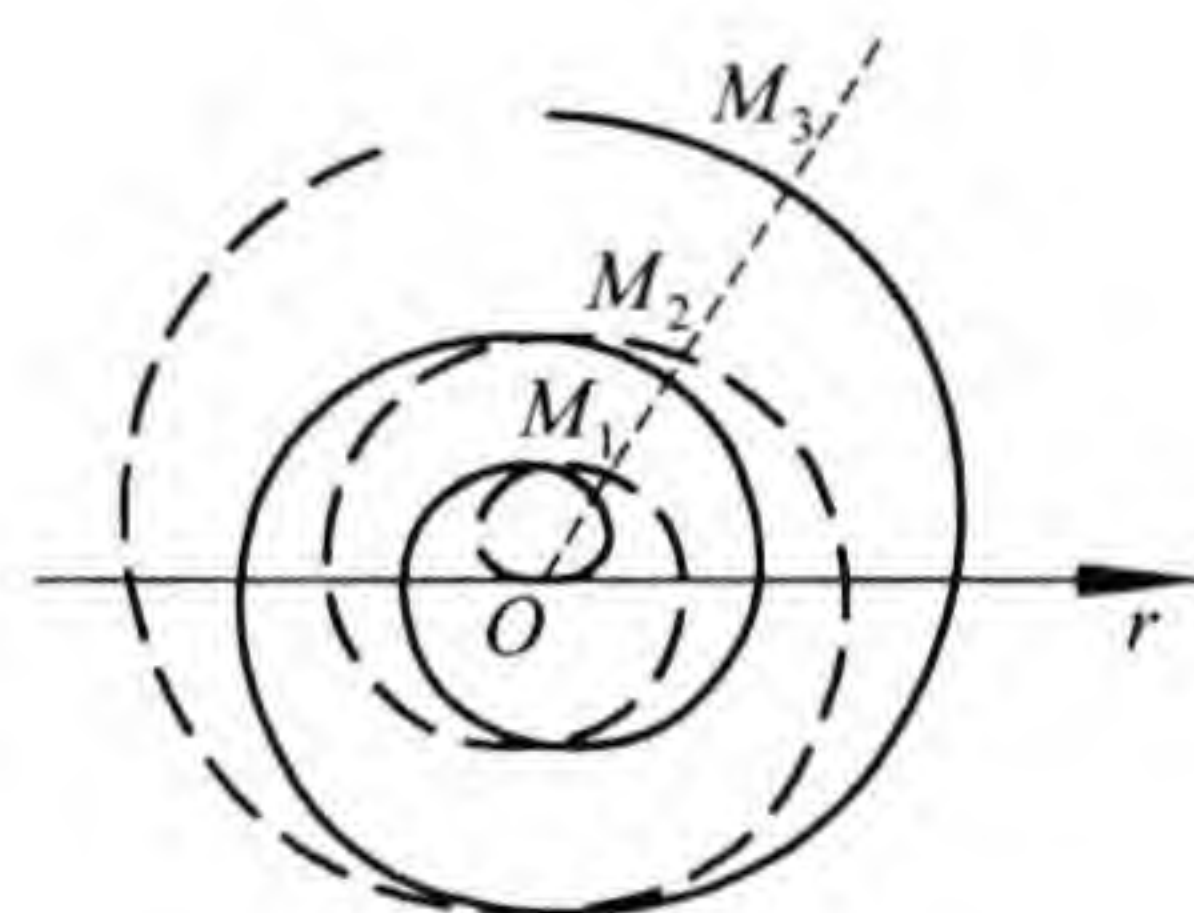


图 1.218

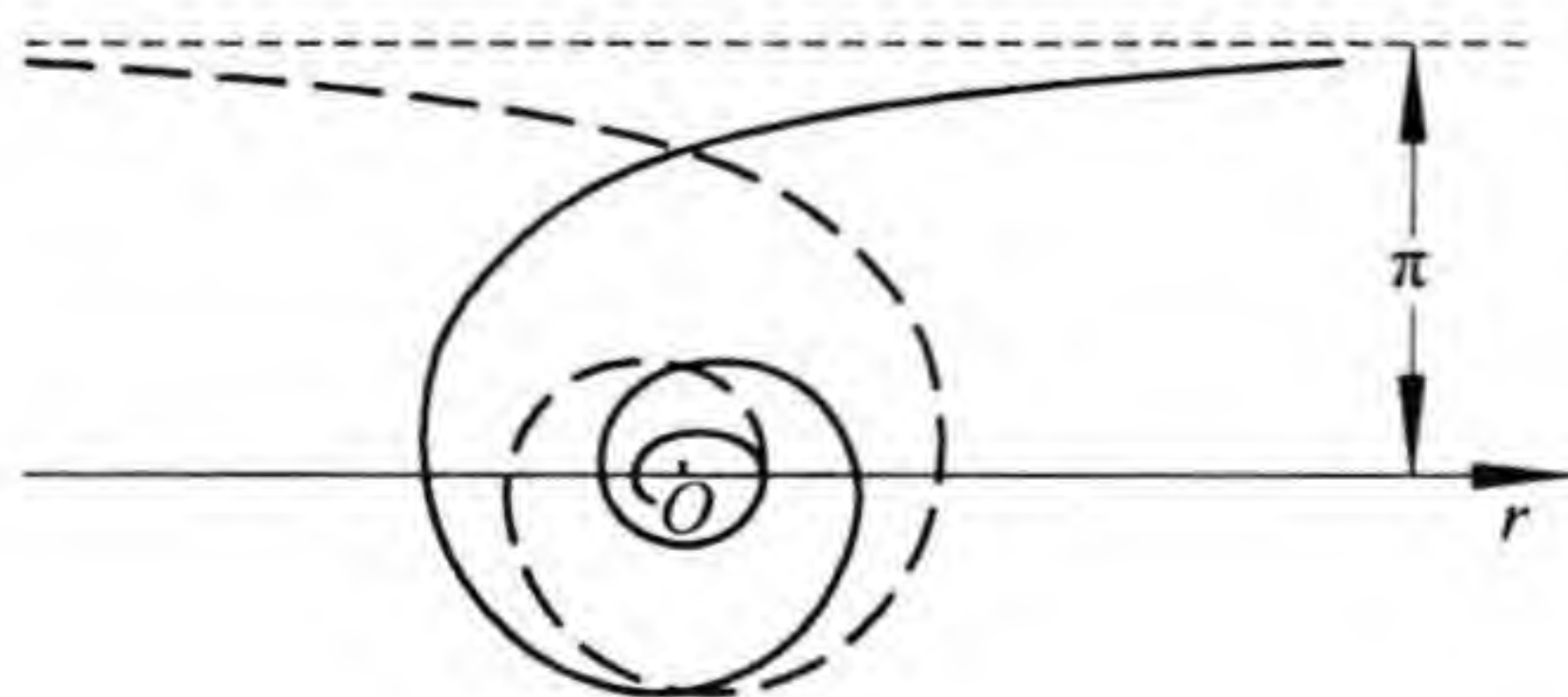


图 1.219

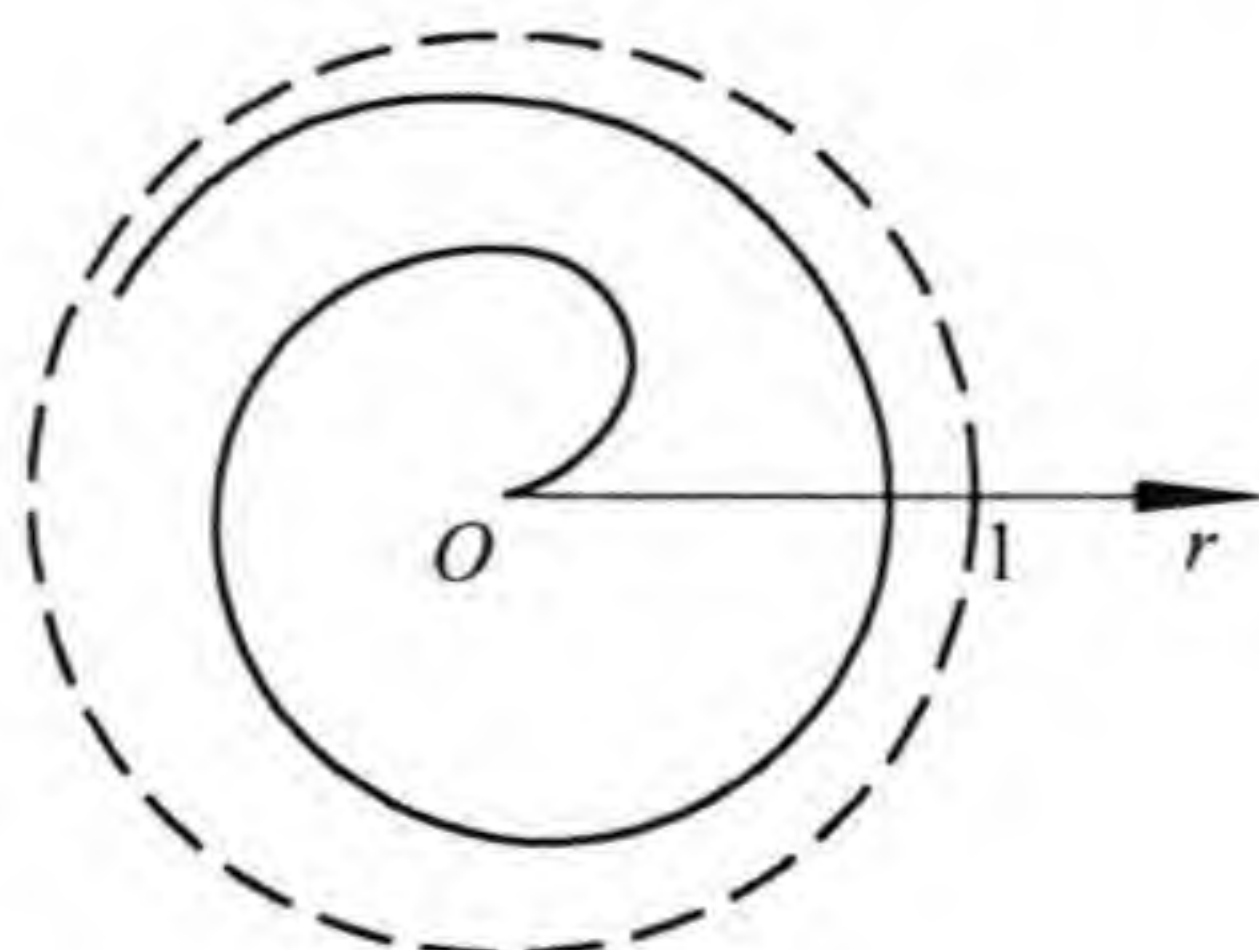


图 1.220

(4) 如图 1.221 所示.

(5) 如图 1.222 所示.



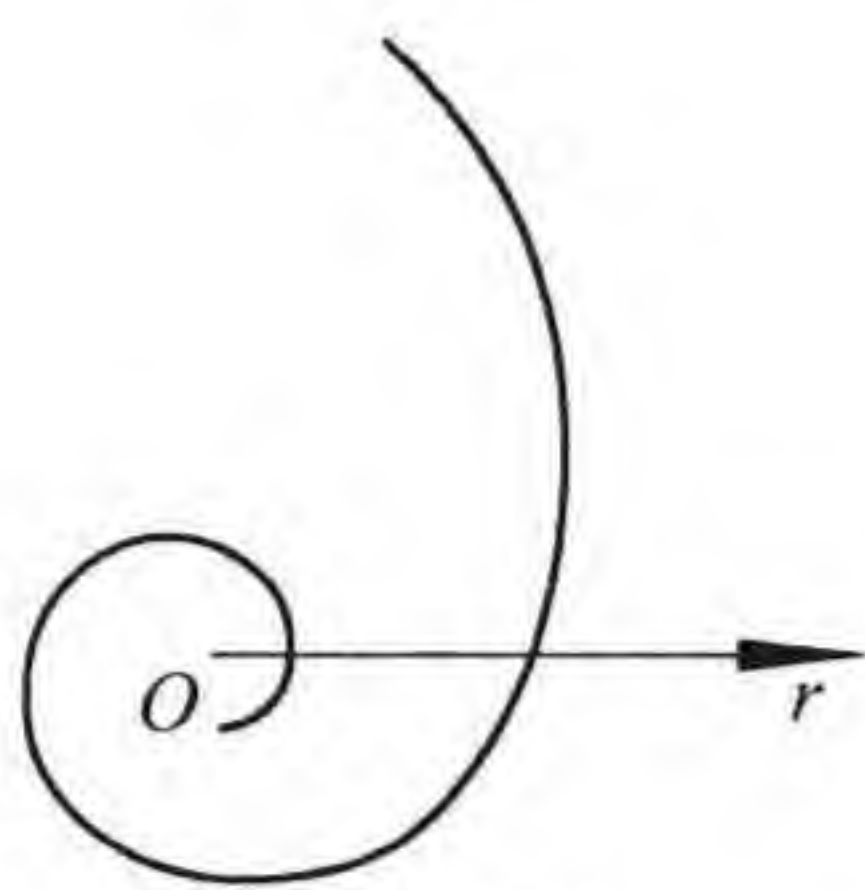


图 1.221

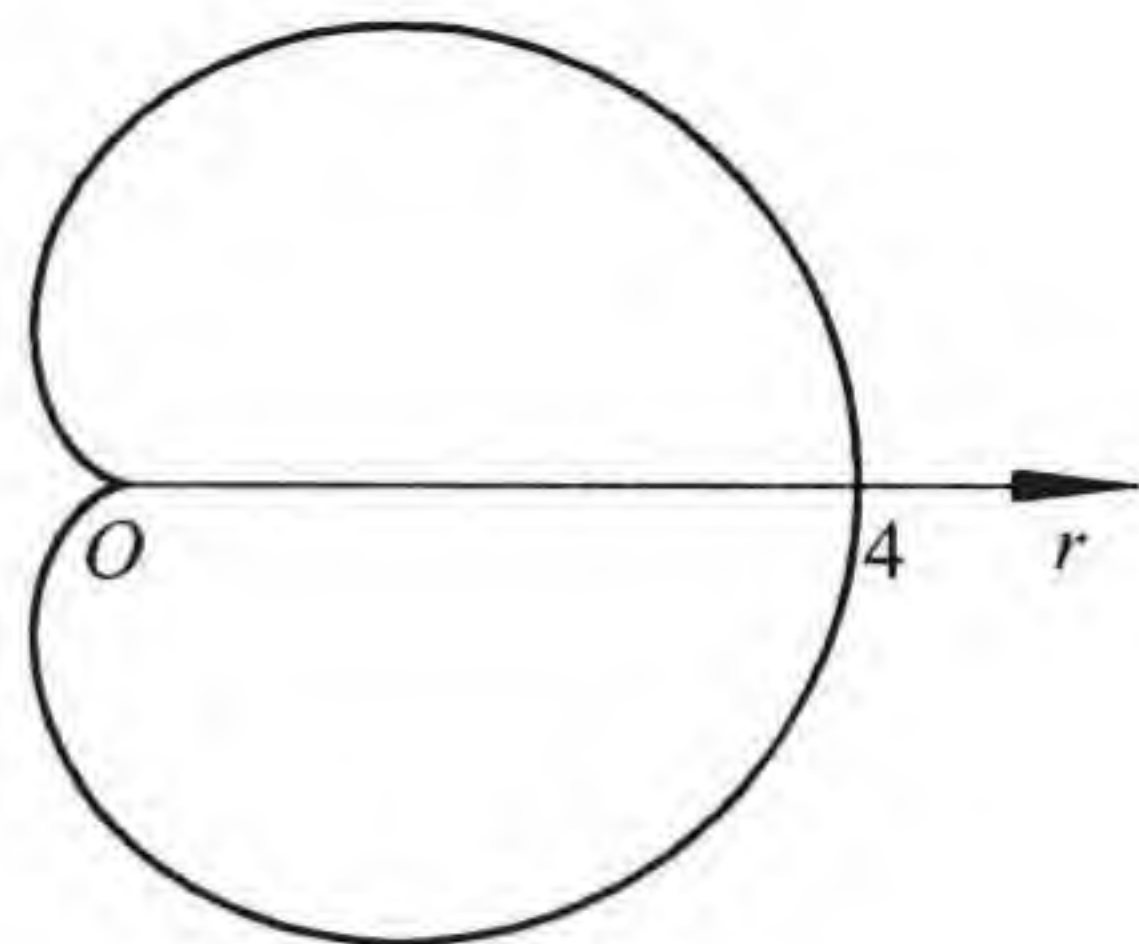


图 1.222

(6) 如图 1.223 所示.

(7) 如图 1.224 所示.

(8) 如图 1.225 所示.

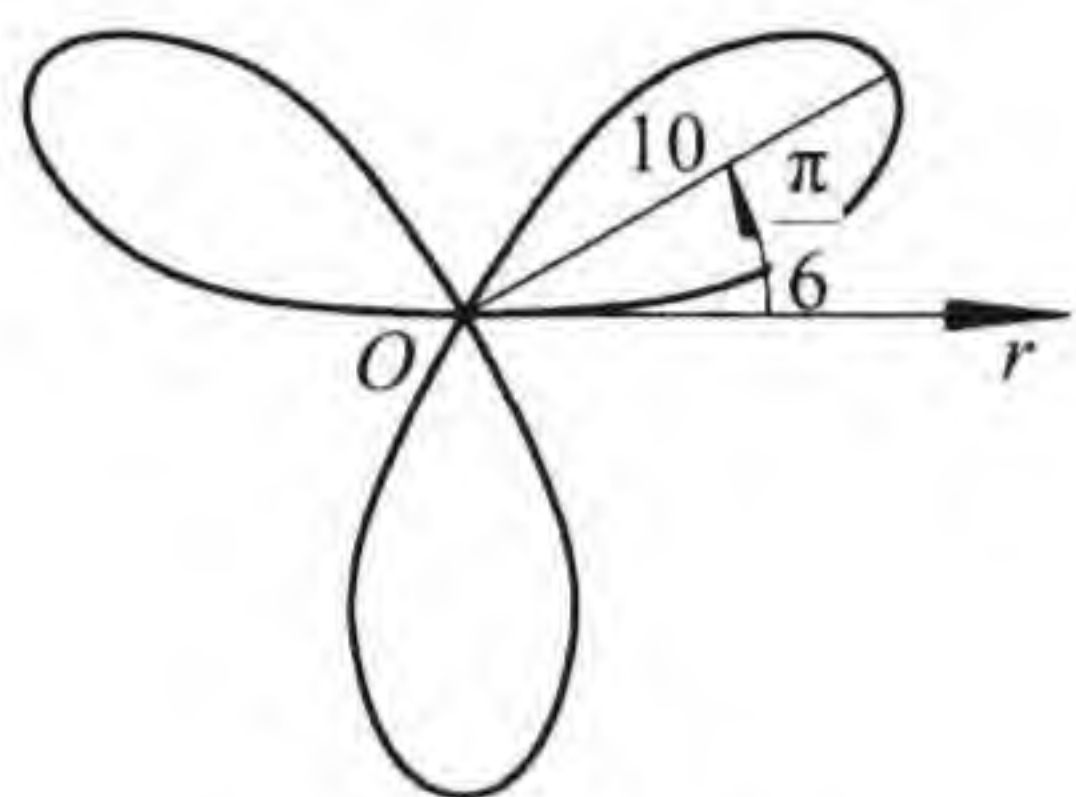


图 1.223

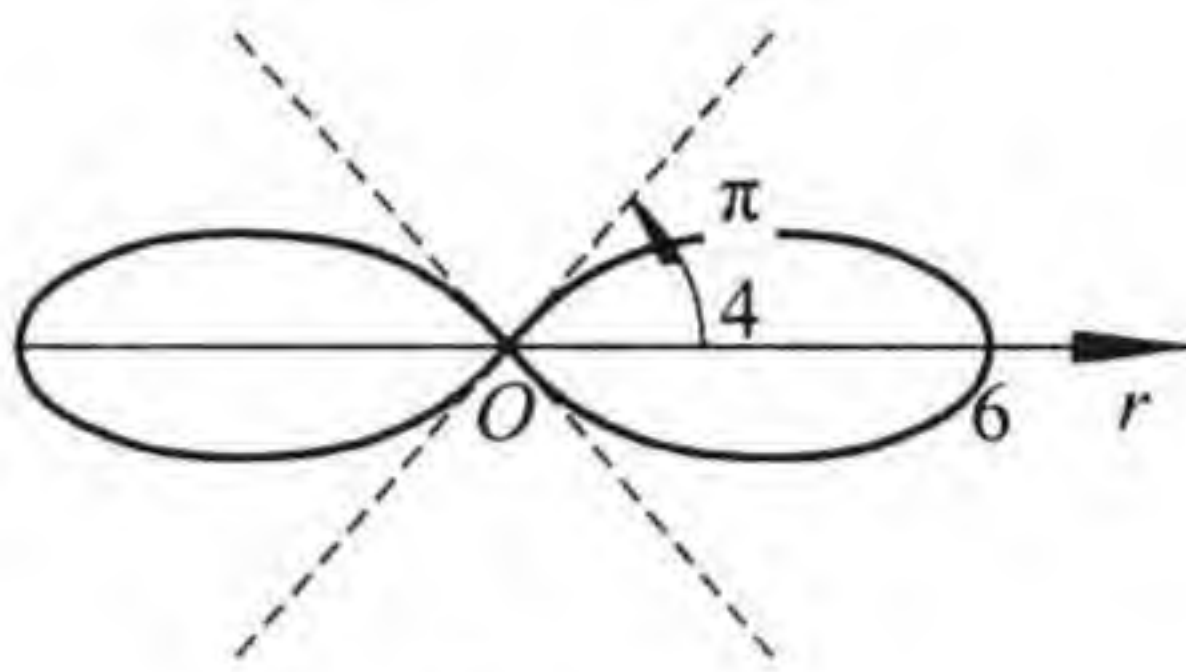


图 1.224

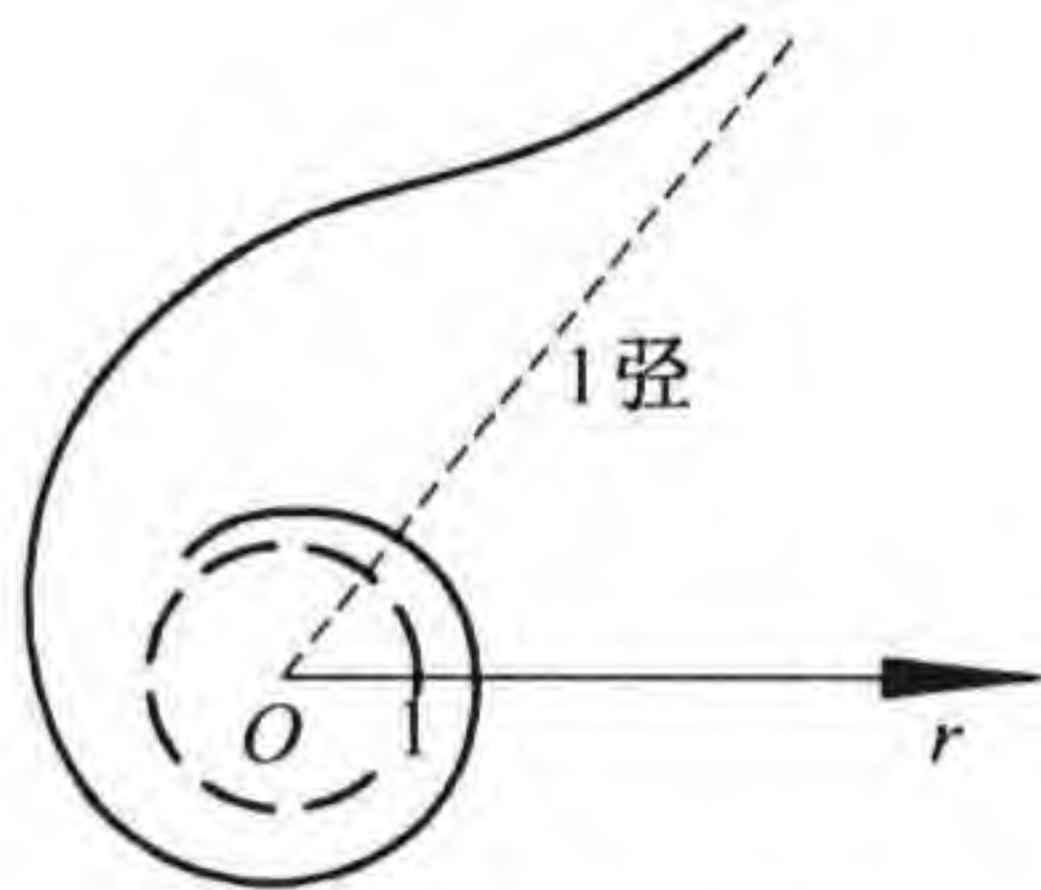


图 1.225

(9) 如图 1.226 所示.

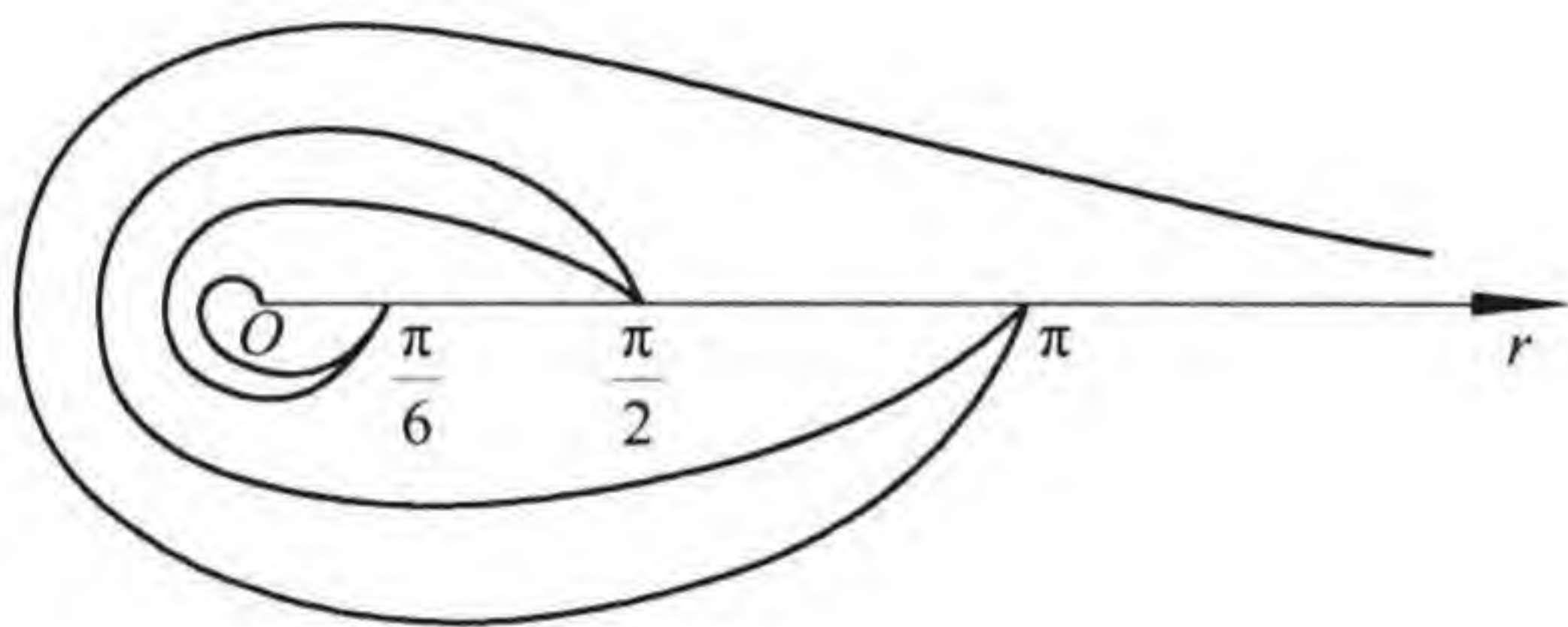


图 1.226

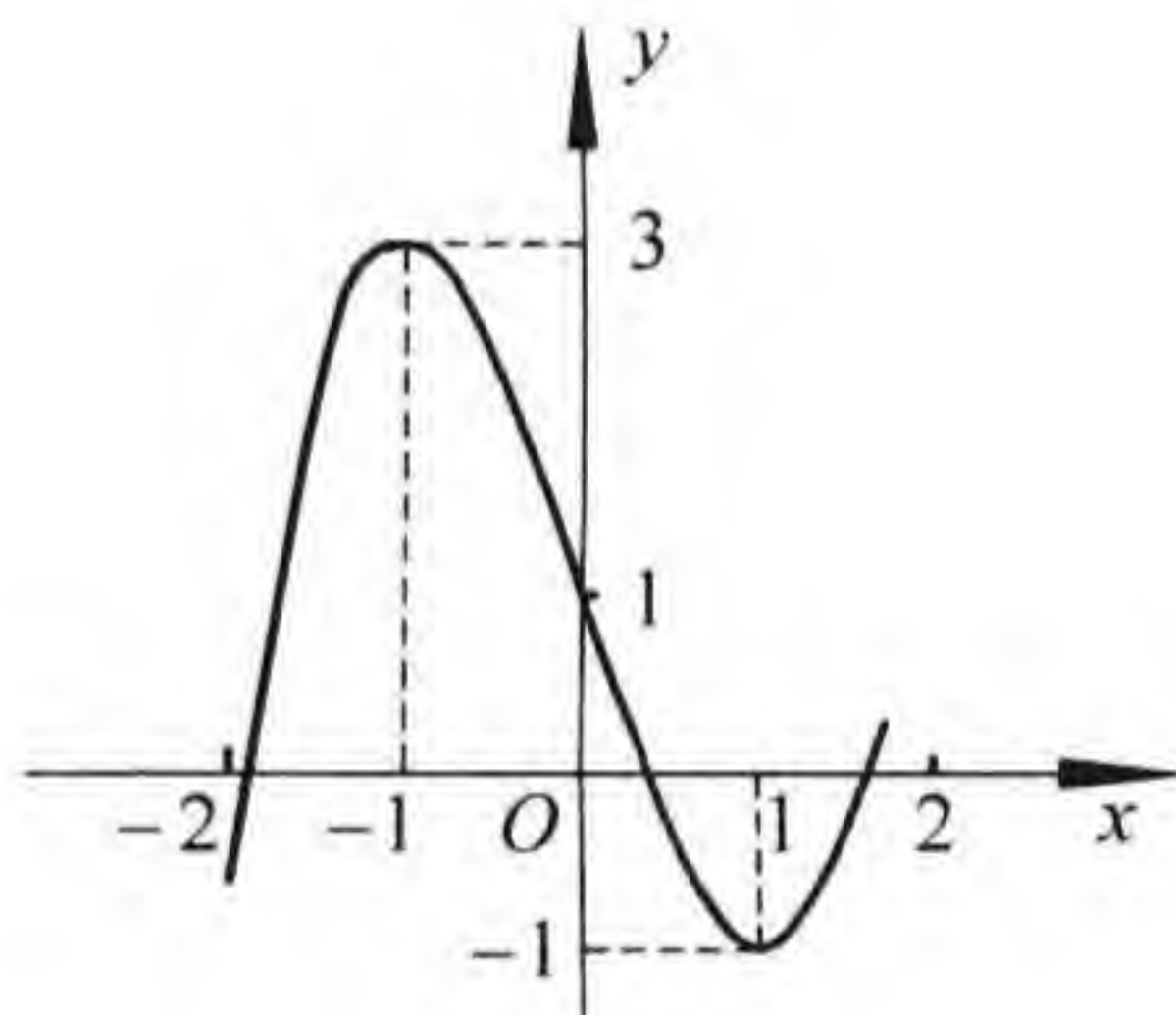


图 1.227

**【372】** 利用函数  $y = x^3 - 3x + 1$  的图像近似地求解方程  $x^3 - 3x + 1 = 0$ .

解 如图 1.227 所示. 因

$$y|_{x=0} = 1 > 0, \quad y|_{x=0.4} = -0.136,$$

所以, 在 0 与 0.4 之间有一实根, 约为 0.35.

同法可求得其他二根为 1.53 及 -1.88.

用图解法解下列方程:

**【373】**  $x^3 - 4x - 1 = 0$ .

**解题思路** 作函数  $y = x^3$  及  $y = 4x + 1$  的图像, 它们的交点的横坐标  $x_0$  即所求之根. 必须注意在  $x_0$  的邻近研究函数  $f(x) = x^3 - 4x - 1$  的符号, 若  $f(x_0 - \delta)f(x_0 + \delta) < 0$ , 则根  $x_0$  介于  $x_0 - \delta$  及  $x_0 + \delta$  之间, 其中  $\delta$  为一很小的某个正数.

下列各题的思路相同.

**解** 作函数  $y = x^3$  及  $y = 4x + 1$  的图像, 它们的交点的横坐标即所求之根 (图 1.128).

在图示的根  $x_0$  邻近研究函数  $f(x) = x^3 - 4x - 1$ , 若  $f(x_0 - \delta)f(x_0 + \delta) < 0$ , 则根  $x_0$  介于  $x_0 - \delta$  及  $x_0 + \delta$  之间, 其中  $\delta$  为很小的某个正数.

经判别, 根的近似解为 -1.86; -0.25; 2.11.

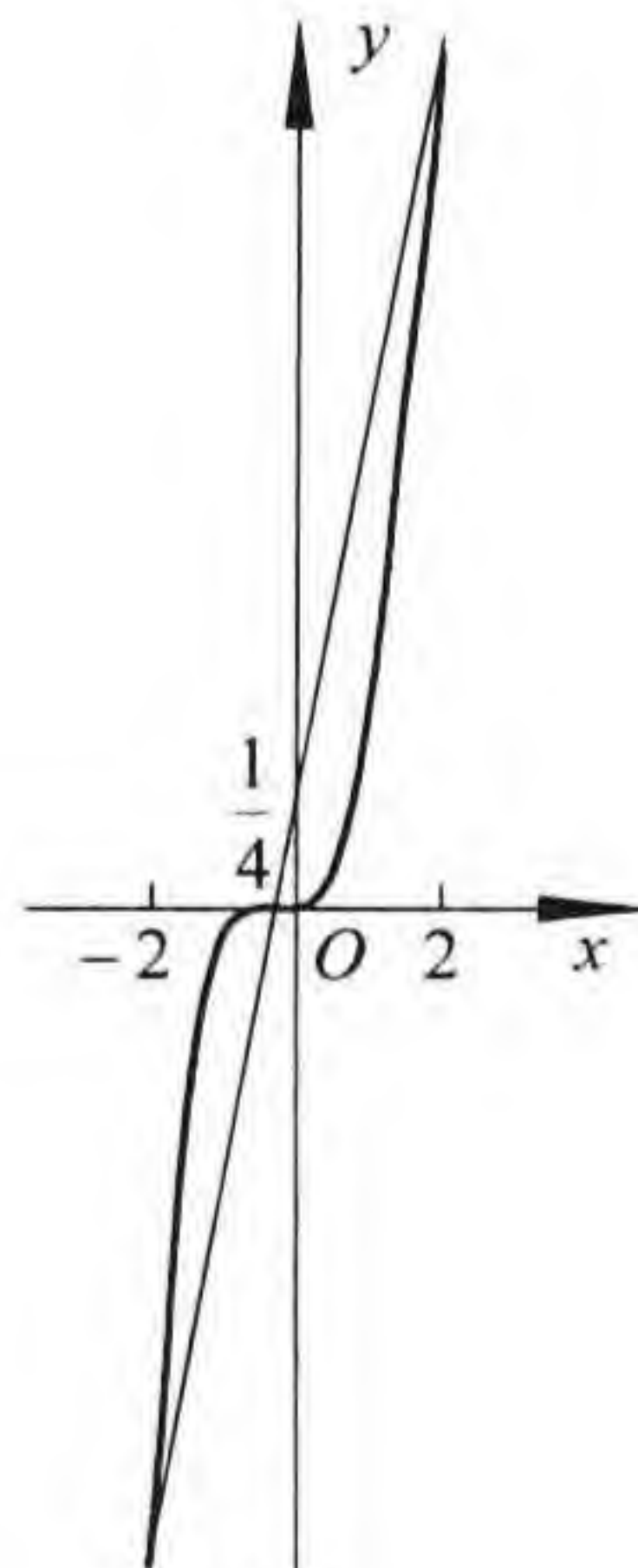


图 1.228



**【374】**  $x^4 - 4x + 1 = 0$ .

解 作函数  $y = x^4$  及  $y = 4x - 1$  的图像. 如图 1.229 所示. 交点的横坐标即所求之根, 其近似值为 0.25; 1.49.

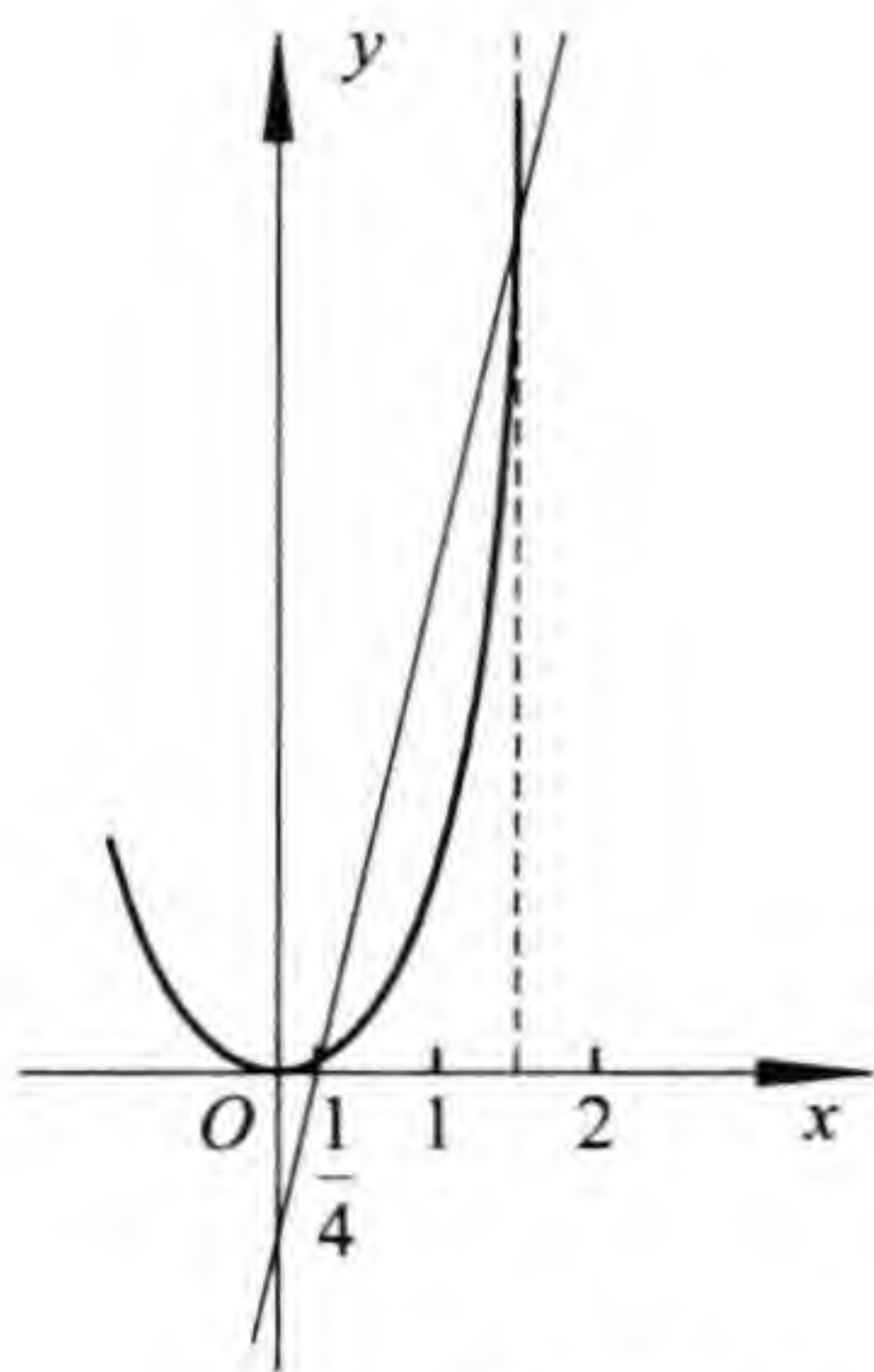


图 1.229

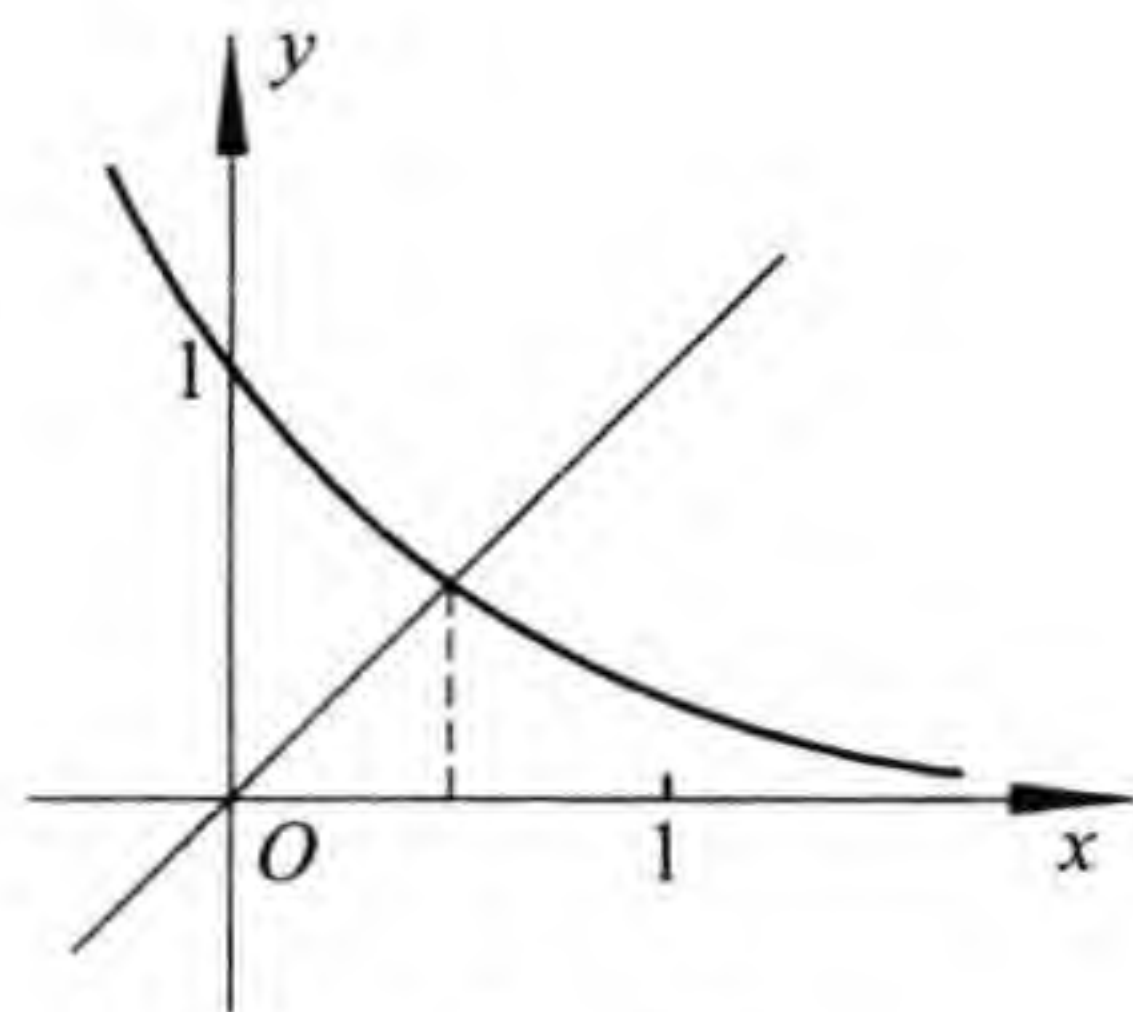


图 1.230

**【375】**  $x = 2^{-x}$ .

解 作函数  $y = 2^{-x}$  及  $y = x$  的图像, 如图 1.230 所示. 交点的横坐标为 0.64, 此即所求之根的近似值.

**【376】**  $\lg x = 0.1x$ .

解 作函数  $y = \lg x$  及  $y = 0.1x$  的图像, 如图 1.231 所示.

交点的横坐标为 1.37 及 10, 此即所求之根, 前者为近似值, 后者为精确值.

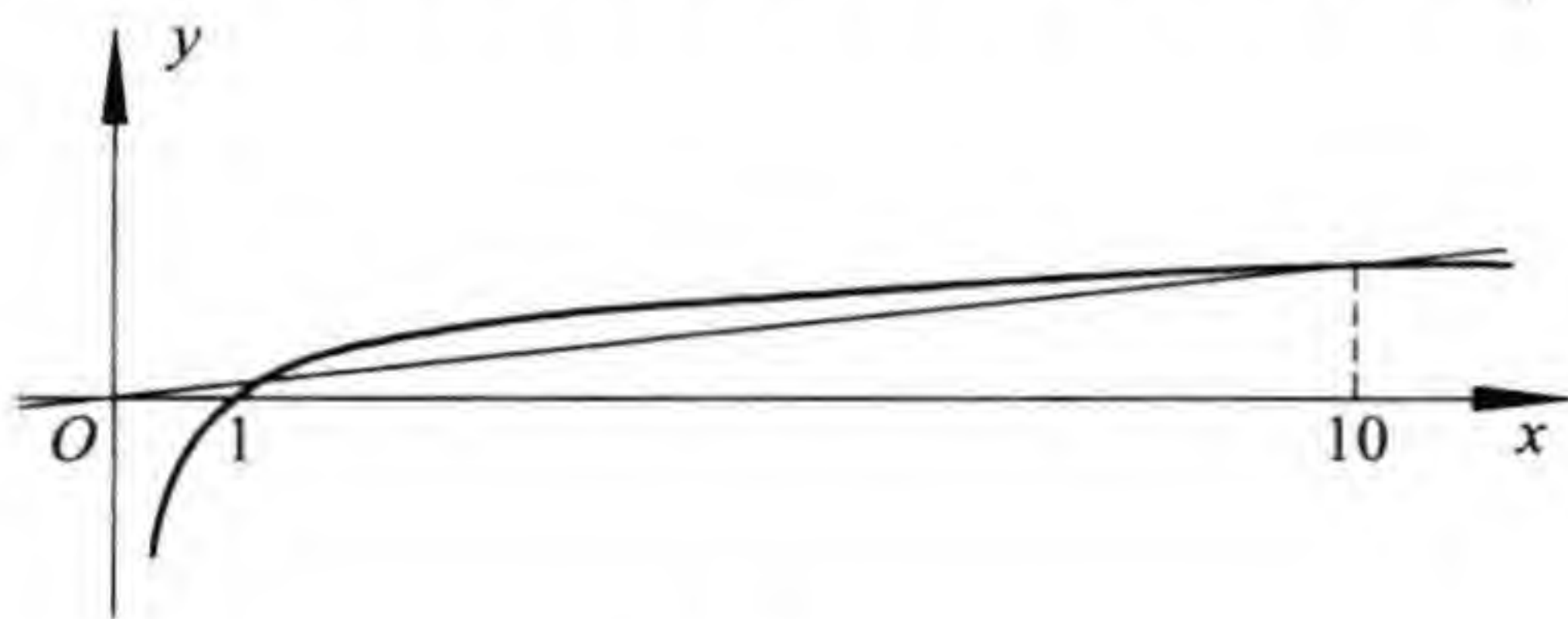


图 1.231

**【377】**  $10^x = x^2$ .

解 作函数  $y = 10^x$  及  $y = x^2$  的图像, 如图 1.232 所示. 交点的横坐标为 -0.54, 此即所求之根的近似值.

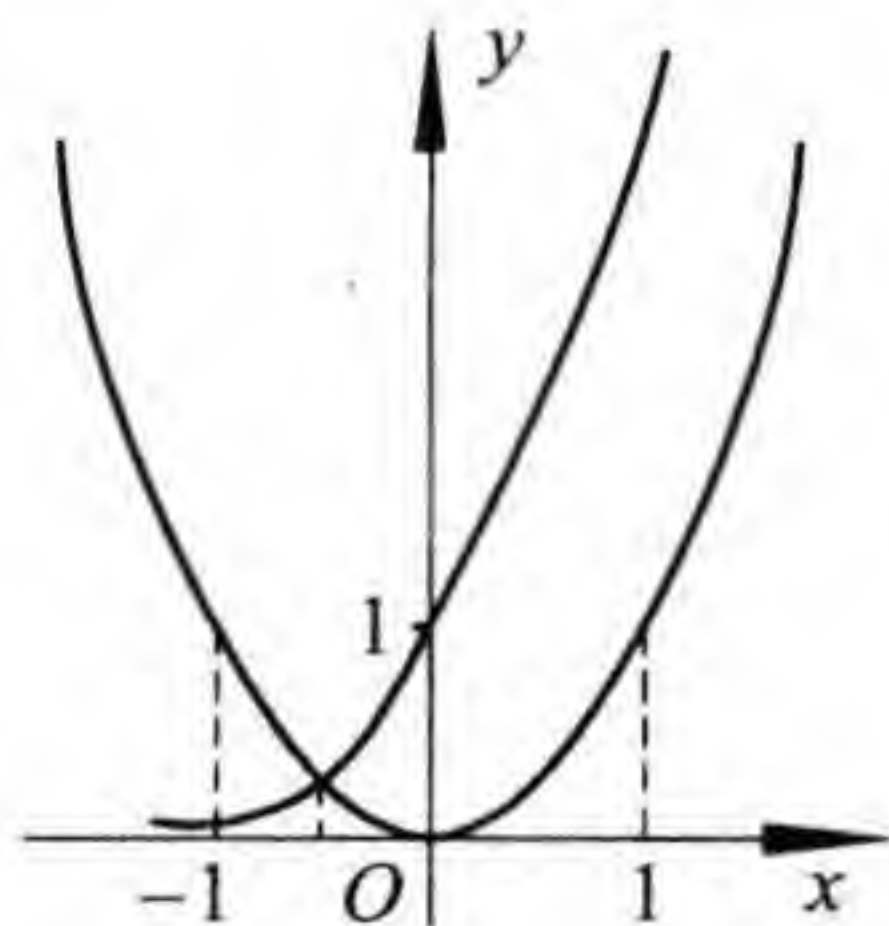


图 1.232

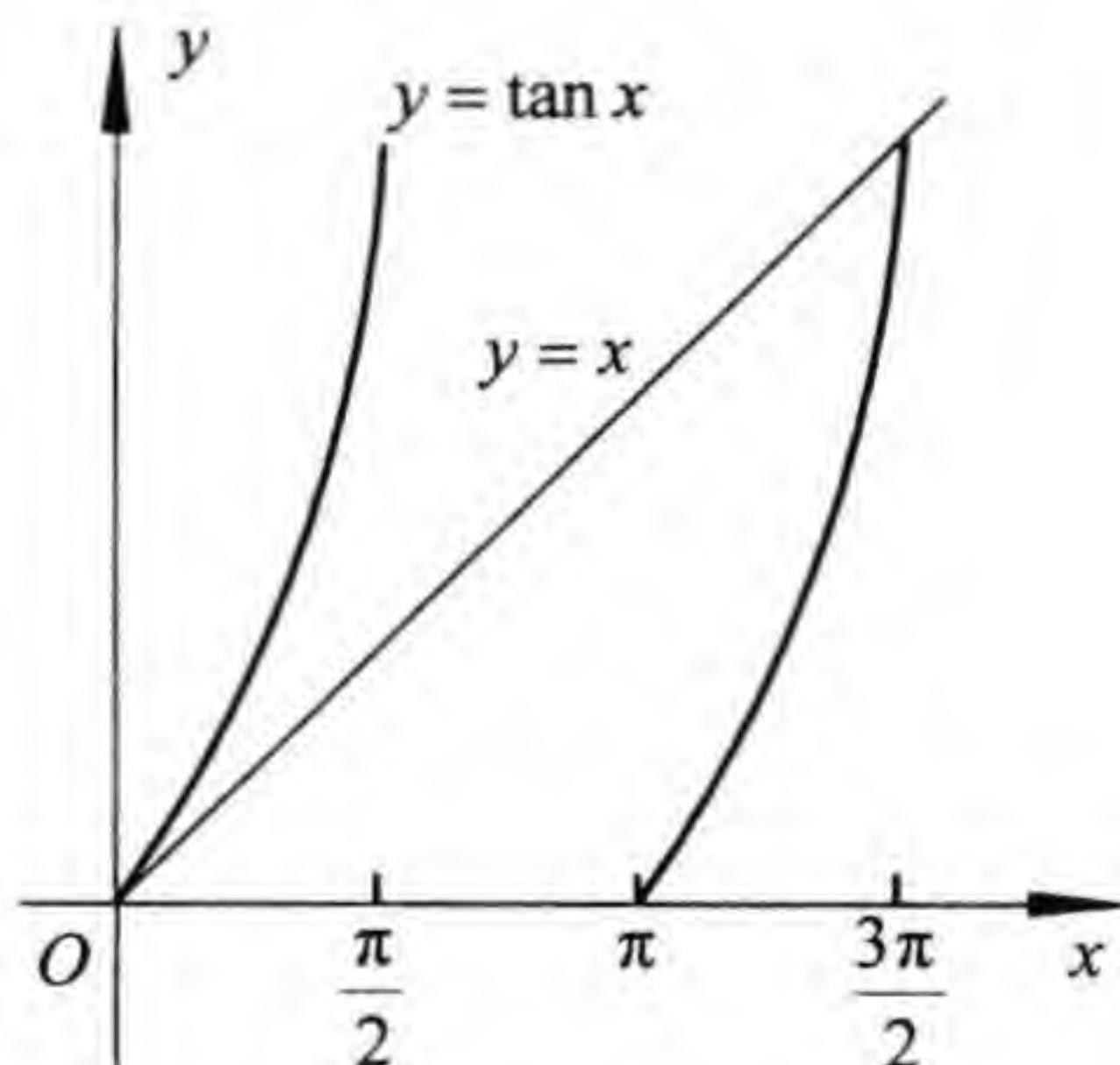


图 1.233

**【378】**  $\tan x = x$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ).

解 作函数  $y = \tan x$  及  $y = x$  的图像, 如图 1.233 所示.

交点的横坐标为 0 及 4.49, 此即所求之根, 前者为精确值, 后者为近似值.



用图解法解下列方程组:

【379】 
$$\begin{cases} x+y^2=1, \\ 16x^2+y=4. \end{cases}$$

解 作函数  $y^2=1-x$  及  $-y+4=16x^2$  的图像,如图 1.234 所示.

交点为点 A, B, C 及 D, 它们的一对坐标即所求之解(近似值):

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.42, & y_1 &= 1.19 (A \text{ 点}); \\ x_2 &= 0.45, & y_2 &= 0.74 (B \text{ 点}); \\ x_3 &= 0.54, & y_3 &= -0.68 (C \text{ 点}); \\ x_4 &= -0.57, & y_4 &= -1.26 (D \text{ 点}). \end{aligned}$$

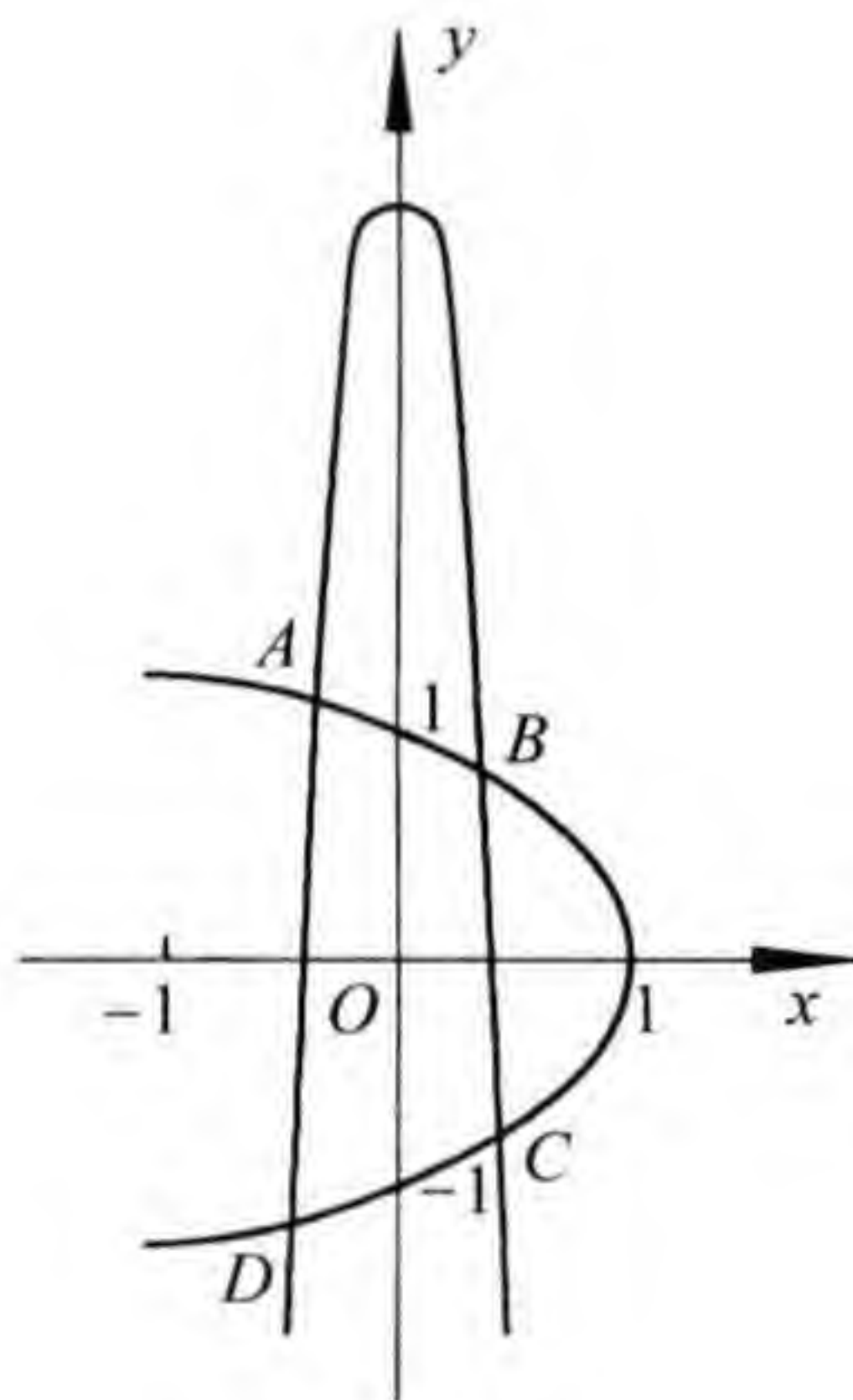


图 1.234

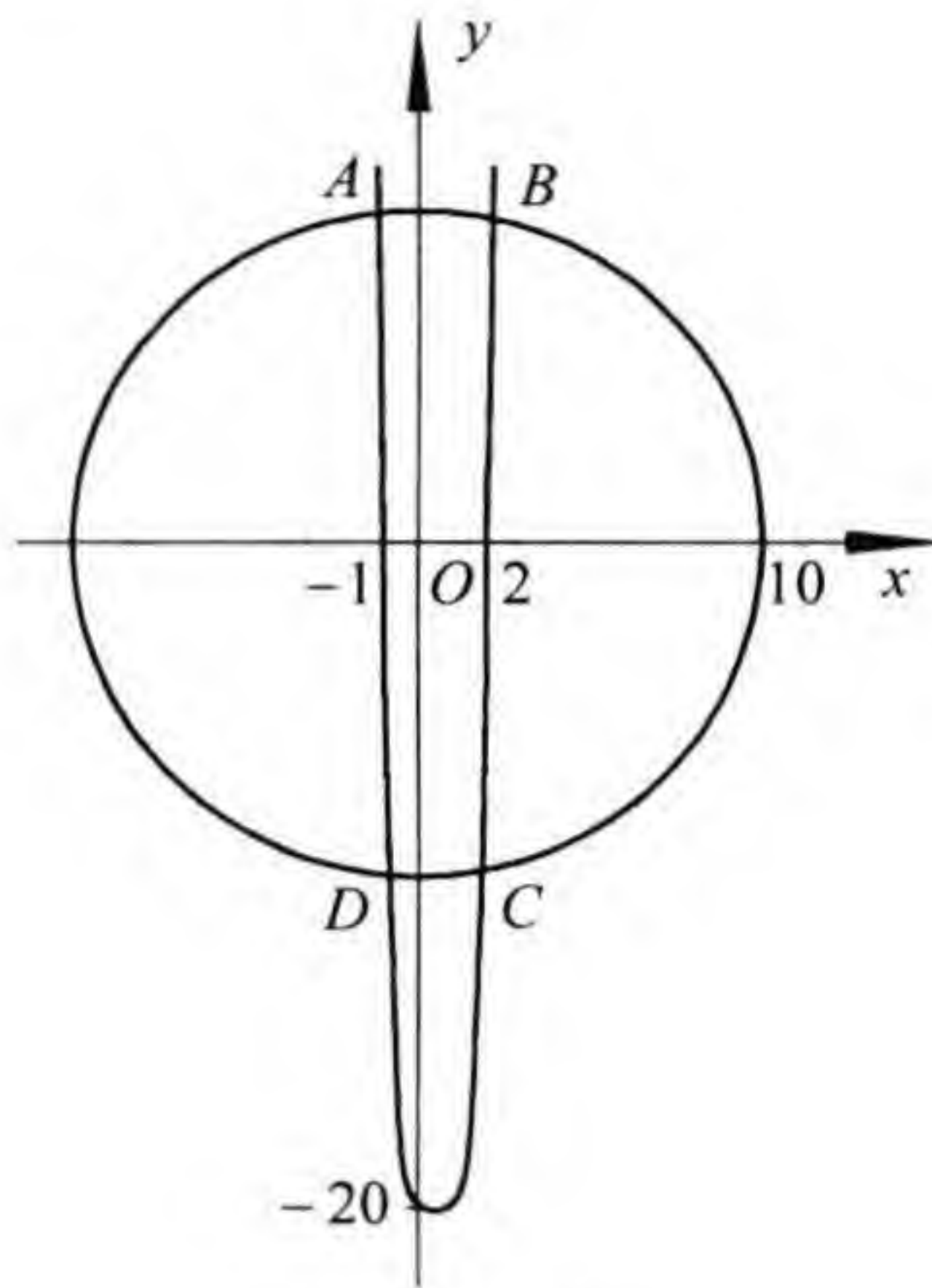


图 1.235

【380】 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ y = 10(x^2 - x - 2). \end{cases}$$

解 作函数

$$x^2 + y^2 = 100 \quad \text{及} \quad y = 10(x^2 - x - 2)$$

的图像,如图 1.235 所示.

交点为点 A, B, C 及 D, 它们的一对坐标即所求之解(近似值):

$$\begin{aligned} x_1 &= -1.30, & y_1 &= 9.92 (A \text{ 点}); \\ x_2 &= 2.30, & y_2 &= 9.73 (B \text{ 点}); \\ x_3 &= 1.62, & y_3 &= -9.87 (C \text{ 点}); \\ x_4 &= -0.62, & y_4 &= -9.98 (D \text{ 点}). \end{aligned}$$

## § 5. 函数的极限

1° 函数的有界性 设存在某两数  $m$  和  $M$ , 使得当  $x \in (a, b)$  时,

$$m < f(x) < M,$$

则称函数  $f(x)$  在这区间  $(a, b)$  上为有界的.

数  $m_0 = \inf_{x \in (a, b)} \{f(x)\}$  称为函数  $f(x)$  在这区间  $(a, b)$  上的下确界, 而数  $M_0 = \sup_{x \in (a, b)} \{f(x)\}$  称为函数  $f(x)$  在这区间  $(a, b)$  上的上确界.

差  $M_0 - m_0$  称为函数在区间  $(a, b)$  上的振幅.

2° 函数在某一点的极限 设函数  $f(x)$  定义在集合  $X = \{x\}$  上, 且该集合以  $a$  为聚点. 记号



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (1)$$

表示,对于任一个数  $\epsilon > 0$ ,都存在数  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ,使得对于满足条件  $0 < |x - a| < \delta$ ,并使  $f(x)$  有意义的一切  $x$ ,下列不等式成立:

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

函数的极限(1)存在的充分必要条件是:对于每一个数列  $x_n \rightarrow a$  ( $n=1, 2, \dots$ ),下面的等式都成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

有两个著名的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

柯西准则. 函数  $f(x)$  在  $a$  点的极限存在的充分必要条件是:对于每一个  $\epsilon > 0$ ,都存在  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ,使得只要

$$0 < |x' - a| < \delta \quad \text{和} \quad 0 < |x'' - a| < \delta,$$

就有

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

式中  $x'$  和  $x''$  属于函数  $f(x)$  的定义域.

3° 单侧极限 若对于任何  $\epsilon > 0$ ,都存在  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ,使得

当  $0 < a - x < \delta(\epsilon)$  时,有  $|A' - f(x)| < \epsilon$ ,则称数  $A'$  为函数  $f(x)$  在  $a$  点的左极限:

$$A' = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0).$$

类似地,若当  $0 < x - a < \delta(\epsilon)$  时,有  $|A'' - f(x)| < \epsilon$ ,则称数  $A''$  为函数  $f(x)$  在  $a$  点的右极限:

$$A'' = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0).$$

函数  $f(x)$  在  $a$  点的极限存在的充分必要条件为:

$$f(a-0) = f(a+0).$$

4° 无穷极限 约定记号

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

表示,对于任何的  $E > 0$ ,只要  $0 < |x - a| < \delta(E)$ ,则有

$$|f(x)| > E.$$

5° 子列极限 若对于某数列  $x_n \rightarrow a$  有等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B,$$

则称数(或符号  $\infty$ )  $B$  为函数  $f(x)$  在  $a$  点的子列极限(有限的或无穷的).

这些子列极限中最小的和最大的用

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{和} \quad \limsup_{x \rightarrow a} f(x)$$

来表示,分别称为函数  $f(x)$  在  $a$  点的下极限和上极限.

等式

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \limsup_{x \rightarrow a} f(x)$$

为函数  $f(x)$  在  $a$  点有极限(有限的或无穷的)的充分必要条件.

【381】 证明:函数

$$f(x) = \begin{cases} n, & x = \frac{m}{n} \text{ (} m \text{ 和 } n \text{ 为互素的整数,且 } n > 0 \text{)}, \\ 0 & x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

在每一点  $x$  为有限的,但并非有界的(即在这点的任何邻域中是无界的).

提示 任给  $x_0 > 0$ ,注意在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内总有无多个有理数.只要证明对任给的  $\delta > 0$ ,  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内无界.用反证法.

证 任给  $x_0 > 0$ ,当  $x_0$  固定时,  $f(x_0)$  值确定.由于有理数在数轴上处处稠密,故在  $x_0$  的任何邻域



$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内总有无限多个有理数. 下面证明对于任给的  $\delta > 0$ , 函数  $f(x)$  在区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内是无界的. 若不然, 存在  $M > 0$ , 使当  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  时,

$$|f(x)| \leq M.$$

于是, 在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  中的有理数只能表示成  $\frac{k}{1}, \frac{k}{2}, \dots, \frac{k}{[M]}$ , 其中  $k$  是与分母互素的整数,  $[M]$  为  $M$  的整数部分. 由于这些有理数都在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  中, 故有

$$(x_0 - \delta)[M] < k < (x_0 + \delta)[M],$$

上式表明在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  中的有理数仅为有限个, 这与有理数在数轴上的处处稠密性相矛盾.

于是, 本题所定义的函数  $f(x)$  在每一点  $x$  (有限) 的任何邻域中是无界的.

**【382】** 若函数  $f(x)$  在: (1) 开区间, (2) 闭区间内的每一点有定义且局部有界, 则此函数在该开区间内或闭区间内是否为有界的? 举出适当的例子.

**解** (1) 一般地说, 不一定. 例如, 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  内每一点有定义且有界, 但它在  $(0, 1)$  内无界.

(2) 是有界的. 事实上, 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  无界, 则存在  $x_n \in [a, b]$  使  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ . 取子列  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$ . 显然,  $f(x)$  在  $x_0$  无界 (即在  $x_0$  的任何邻域中无界), 矛盾.

**【383】** 证明: 函数  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$  在区间  $-\infty < x < +\infty$  中是有界的.

**证** 当  $|x| \leq 1$  时,  $|f(x)| < \frac{1+1}{1} = 2$ . 当  $|x| > 1$  时,  $|f(x)| < \frac{1+x^4}{1+x^4} = 1$ .

因而, 当  $-\infty < x < +\infty$  时,  $|f(x)| < 2$ . 即函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是有界的.

**【384】** 证明: 函数  $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  在点  $x=0$  的任何邻域内是无界的, 但当  $x \rightarrow 0$  时不成为无穷大.

**证** 当  $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$  时,  $f(x) = 0$ ; 而当  $x = \frac{1}{k\pi}$  时,  $f(x) = (-1)^k k\pi$ . 于是, 当  $k \rightarrow \infty$  时, 点  $\frac{2}{(2k+1)\pi}$  及  $\frac{1}{k\pi}$  均在点  $x=0$  的任何邻域内. 由于  $|(-1)^k k\pi| \rightarrow +\infty$  ( $k \rightarrow +\infty$ ), 故函数  $f(x)$  在点  $x=0$  的任何邻域内是无界的. 然而当  $k \rightarrow \infty$  时,  $f(x)$  不断地与  $Ox$  轴相交, 即  $f(x) = 0$  (这样的数  $x$  的集合是无限的). 因而, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  又不成为无穷大.

**【385】** 研究函数  $f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}$  在区间  $0 < x < \epsilon$  内的有界性.

**解** 上方有界, 它小于  $|\ln \epsilon|$ . 下方无界.

**【386】** 证明: 函数  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  在域  $0 \leq x < +\infty$  内有下确界  $m_0 = 0$  和上确界  $M_0 = 1$ .

**证明思路** 注意, 当  $0 \leq x < +\infty$  时,  $0 \leq f(x) < 1$ , 且  $f(x)$  单调上升趋近于 1, 命题即获证.

**证**  $0 \leq f(x) < 1$ , 且  $f(x)$  单调上升趋近于 1, 所以,  $m_0 = 0$ ,  $M_0 = 1$ .

**【387】** 函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上有定义且单调上升, 则在此闭区间内函数的下确界和上确界等于什么?

**解**  $m_0 = f(a)$ ,  $M_0 = f(b)$ , 其中  $m_0$  及  $M_0$  代表下确界及上确界, 以下各题均采用此符号.

**求函数的下确界和上确界:**

**【388】**  $f(x) = x^2$  在  $(-2, 5)$  内.

**解**  $m_0 = 0$ ,  $M_0 = 25$ .

**【389】**  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内.

**解**  $m_0 = 0$ ,  $M_0 = 1$ .

**【390】**  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$  在  $(0, +\infty)$  内.

**解** 由于  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内为增函数, 而在  $(1, +\infty)$  内为减函数, 且  $f(1)$  存在, 所以,



$$m_0 = 0, \quad M_0 = f(1) = 1.$$

**【391】**  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  内.

提示 注意, 当  $0 < x < +\infty$  时,  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  及  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , 即获解.

解 由  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  知  $m_0 = f(1) = 2$ , 又  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , 故知  $M_0 = +\infty$ .

**【392】**  $f(x) = \sin x$  在  $(0, +\infty)$  内.

解  $m_0 = -1, M_0 = 1$ .

**【393】**  $f(x) = \sin x + \cos x$  在  $[0, 2\pi]$  内.

解 由  $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  知  $m_0 = -\sqrt{2}, M_0 = \sqrt{2}$ .

**【394】**  $f(x) = 2^x$  在  $(-1, 2)$  内.

解  $m_0 = f(-1) = \frac{1}{2}, M_0 = f(2) = 4$ .

**【395】**  $f(x) = [x]$ : (1) 在  $(0, 2)$  内; (2) 在  $[0, 2]$  内.

解 (1)  $m_0 = 0, M_0 = 1$ ;

(2)  $m_0 = 0, M_0 = 2$ .

**【396】**  $f(x) = x - [x]$  在  $[0, 1]$  内.

解  $m_0 = 0, M_0 = 1$ .

**【397】** 求函数  $f(x) = x^2$  在下列区间内的振幅:

(1)  $(1, 3)$ ; (2)  $(1.9, 2.1)$ ; (3)  $(1.99, 2.01)$ ; (4)  $(1.999, 2.001)$ .

解 (1) 振幅以  $\omega$  表示之.  $\omega = M_0 - m_0$ . 因为  $m_0 = 1, M_0 = 9$ , 所以,  $\omega = 8$ .

(2)  $m_0 = (1.9)^2, M_0 = (2.1)^2, \omega = (2.1)^2 - (1.9)^2 = 0.8$ ,

(3)  $\omega = (2.01)^2 - (1.99)^2 = 0.08$ ,

(4)  $\omega = (2.001)^2 - (1.999)^2 = 0.008$ .

**【398】** 求函数  $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$  在下列区间内的振幅:

(1)  $(-1, 1)$ ; (2)  $(-0.1, 0.1)$ ; (3)  $(-0.01, 0.01)$ ; (4)  $(-0.001, 0.001)$ .

解 (1)  $\omega = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ ; (2)  $\omega = \pi$ ;

(3)  $\omega = \pi$ ; (4)  $\omega = \pi$ .

**【399】** 设  $m[f]$  和  $M[f]$  分别为函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内的下确界和上确界.

证明: 若  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  为定义于  $(a, b)$  内的函数, 则

$$m[f_1 + f_2] \geq m[f_1] + m[f_2] \quad \text{及} \quad M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2].$$

举出函数  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  的例子, 使上述两个关系式为: (1) 等式; (2) 不等式.

提示 利用上、下确界定义且注意  $m[f] \leq f \leq M[f]$ , 命题易获证.

证 因为

$$m[f_1] \leq f_1 \leq M[f_1] \quad \text{及} \quad m[f_2] \leq f_2 \leq M[f_2],$$

所以,

$$m[f_1] + m[f_2] \leq f_1 + f_2,$$

从而有

$$m[f_1] + m[f_2] \leq m[f_1 + f_2].$$

又因

$$f_1 + f_2 \leq M[f_1] + M[f_2],$$

所以,



$$M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2].$$

(1) 当  $f_1(x)$  及  $f_2(x)$  在  $(a, b)$  内具有相同的单调性, 且  $m$  及  $M$  均为有限时, 取等式.

(2)  $f_1(x) = x^2, f_2(x) = -x^2$  在区间  $(-1, 1)$  内

$$m[f_1] = 0, \quad M[f_1] = 1;$$

$$m[f_2] = -1, \quad M[f_2] = 0.$$

又因为  $f_1 + f_2 = 0$ , 所以,

$$m[f_1 + f_2] = M[f_1 + f_2] = 0.$$

此时

$$m[f_1 + f_2] > m[f_1] + m[f_2], \quad M[f_1 + f_2] < M[f_1] + M[f_2].$$

取不等式.

**【400】** 设函数  $f(x)$  定义于域  $[a, +\infty)$  内, 并且在每一个闭区间  $[a, b]$  上是有界的. 令

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} f(\xi), \quad M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} f(\xi).$$

作函数  $y = m(x)$  和  $y = M(x)$  的图像, 设:

(1)  $f(x) = \sin x$ ; (2)  $f(x) = \cos x$ .

解 (1) 如图 1.236 所示. (2) 如图 1.236 所示.

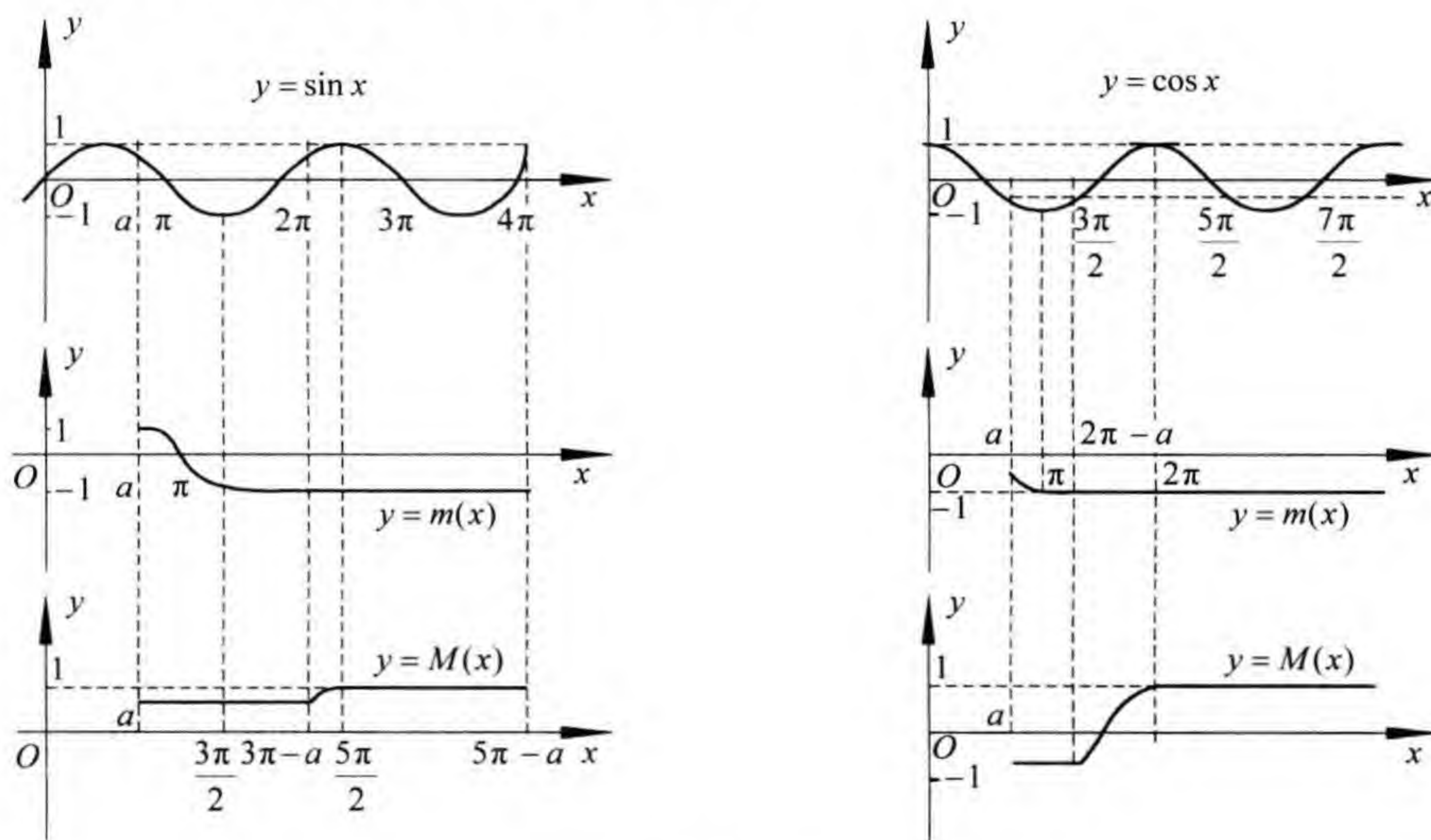


图 1.236

**【401】** 利用《 $\epsilon-\delta$ 》语言, 证明:  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ .

填下表:

$\epsilon$	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$\delta$					

证  $|x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2|$ .

先限制  $|x - 2| < 1$ , 即  $1 < x < 3$ , 则

$$|x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2| < 5 |x - 2|,$$

取  $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{5} \right\}$ . 于是, 当  $0 < |x - 2| < \delta$  时,  $|x^2 - 4| < \epsilon$ , 即  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ .

$\epsilon$	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$\delta$	0.02	0.002	0.0002	0.00002	...



【402】 利用《E-δ》语言,证明: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$ .

填下表:

E	10	100	1000	10000	...
δ					

证 任给  $E > 0$ , 要使  $\frac{1}{|1-x|^2} > E$ , 只要  $0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{E}}$ , 又只要  $0 < |x-1| < \frac{1}{E}$  ( $E > 1$ ), 取  $\delta = \min\left\{1, \frac{1}{E}\right\}$ , 则当  $0 < |x-1| < \delta$  时,  $\left|\frac{1}{(1-x)^2}\right| > E$ , 所以,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$ .

E	10	100	1000	10000	...
δ	0.1	0.01	0.001	0.0001	...

【403】 利用不等式表示下列各式:

(1)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ .

举出适当的例子.

解 (1) 对于任给的  $\epsilon > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < |x-a| < \delta$  时  $|f(x)-b| < \epsilon$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

例如,  $f(x) = x+1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ .

(2) 对于任给的  $\epsilon > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < a-x < \delta$  时,  $|f(x)-b| < \epsilon$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$ .

例如, 若  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1, \\ 2, & x > 1, \end{cases}$  则  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2$ .

(3) 对于任给的  $\epsilon > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < x-a < \delta$  时,  $|f(x)-b| < \epsilon$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ .

例如本题(2)之例, 即有  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2$ .

利用不等式表示下列结论, 并举出适当的例子:

【404】 (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ .

解 (1) 任给  $\epsilon > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $|x| > N$  时,  $|f(x)-b| < \epsilon$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ .

(2) 任给  $\epsilon > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $x < -N$  时,  $|f(x)-b| < \epsilon$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ .

(3) 任给  $\epsilon > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $x > N$  时,  $|f(x)-b| < \epsilon$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ .

例如, 对于函数  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

【405】 (1)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ;  
(4)  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ ; (5)  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$ ; (6)  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$ ;  
(7)  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ ; (8)  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$ ; (9)  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$ .

解 (1) 任给  $E > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < |x-a| < \delta$  时,  $|f(x)| > E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ .

例如,  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ .

(2) 任给  $E > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < |x-a| < \delta$  时,  $f(x) < -E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

例如,  $f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ .

(3) 任给  $E > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < |x-a| < \delta$  时,  $f(x) > E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .

例如,  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ .



(4) 任给  $E > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < a - x < \delta$  时,  $|f(x)| > E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ .

例如,  $f(x) = \frac{(-1)^{\lceil \frac{1}{1-x} \rceil}}{1-x}$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \infty$ .

(5) 任给  $E > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < a - x < \delta$  时,  $f(x) < -E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$ .

例如,  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty$ .

(6) 任给  $E > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < a - x < \delta$  时,  $f(x) > E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$ .

例如,  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty$ .

(7) 任给  $E > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < x - a < \delta$  时,  $|f(x)| > E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ .

例如,  $f(x) = \frac{(-1)^{\lceil \frac{1}{x-1} \rceil}}{x-1}$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty$ .

(8) 任给  $E > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < x - a < \delta$  时,  $f(x) < -E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$ .

例如,  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -\infty$ .

(9) 任给  $E > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < x - a < \delta$  时,  $f(x) > E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$ .

例如,  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = +\infty$ .

**【406】** (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ ;  
(4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ; (5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ; (6)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ;  
(7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ ; (8)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ; (9)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

解 (1) 任给  $E > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $|x| > N$  时,  $|f(x)| > E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .  
例如,  $f(x) = x^3$ , 则有  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

(2) 任给  $E > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $|x| > N$  时,  $f(x) < -E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ .  
例如,  $f(x) = -x^2$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ .

(3) 任给  $E > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $|x| > N$  时,  $f(x) > E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ .  
例如,  $f(x) = x^2$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ .

(4) 任给  $E > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $x < -N$  时,  $|f(x)| > E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ .  
例如,  $f(x) = (-1)^{\lceil x^2 \rceil} x$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ .

(5) 任给  $E > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $x < -N$  时,  $f(x) < -E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .  
例如,  $f(x) = x$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

(6) 任给  $E > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $x < -N$  时,  $f(x) > E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .  
例如,  $f(x) = -x$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

(7) 任给  $E > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $x > N$  时,  $|f(x)| > E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ .  
例如,  $f(x) = (-1)^{\lceil x \rceil} x^2$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ .

(8) 任给  $E > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $x > N$  时,  $f(x) < -E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .  
例如,  $f(x) = -x$ , 即有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

(9) 任给  $E > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $x > N$  时,  $f(x) > E$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .  
例如,  $f(x) = x$  即有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**【407】** 命  $y = f(x)$ . 利用不等式表示下列结论:

(1) 当  $x \rightarrow a$  时,  $y \rightarrow b-0$ ;

(2) 当  $x \rightarrow a-0$  时,  $y \rightarrow b-0$ ;



(3) 当  $x \rightarrow a+0$  时,  $y \rightarrow b-0$ ;

(5) 当  $x \rightarrow a-0$  时,  $y \rightarrow b+0$ ;

(7) 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $y \rightarrow b-0$ ;

(9) 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow b-0$ ;

(11) 当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $y \rightarrow b+0$ ;

(4) 当  $x \rightarrow a$  时,  $y \rightarrow b+0$ ;

(6) 当  $x \rightarrow a+0$  时,  $y \rightarrow b+0$ ;

(8) 当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $y \rightarrow b-0$ ;

(10) 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $y \rightarrow b+0$ ;

(12) 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow b+0$ ;

举出适当的例子.

**解** (1) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < |x-a| < \delta$  时,  $0 < b-y < \varepsilon$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b-0$ , 或当  $x \rightarrow a$  时,  $y \rightarrow b-0$ .

例如,  $y = -|x|$ , 即有当  $x \rightarrow 0$  时,  $y \rightarrow 0-0$ .

(2) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < a-x < \delta$  时,  $0 < b-y < \varepsilon$ , 此即  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b-0$ .

例如,  $y = x$ , 即有当  $x \rightarrow 0-0$  时,  $y \rightarrow 0-0$ .

(3) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < x-a < \delta$  时,  $0 < b-y < \varepsilon$ , 此即, 当  $x \rightarrow a+0$  时,  $y \rightarrow b-0$ .

例如,  $y = -x$ , 即有当  $x \rightarrow 0+0$  时,  $y \rightarrow 0-0$ .

(4) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < |a-x| < \delta$  时,  $0 < y-b < \varepsilon$ , 此即, 当  $x \rightarrow a$  时,  $y \rightarrow b+0$ .

例如,  $y = |x|$ , 即有当  $x \rightarrow 0$  时,  $y \rightarrow 0+0$ .

(5) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < a-x < \delta$  时,  $0 < y-b < \varepsilon$ , 此即, 当  $x \rightarrow a-0$  时,  $y \rightarrow b+0$ .

例如,  $y = -x$ , 即有当  $x \rightarrow 0-0$  时,  $y \rightarrow 0+0$ .

(6) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在数  $\delta > 0$ , 使当  $0 < x-a < \delta$  时,  $0 < y-b < \varepsilon$ , 此即, 当  $x \rightarrow a+0$  时,  $y \rightarrow b+0$ .

例如,  $y = x$ , 即有当  $x \rightarrow 0+0$  时,  $y \rightarrow 0+0$ .

(7) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $|x| > N$  时,  $0 < b-y < \varepsilon$ , 此即, 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $y \rightarrow b-0$ .

例如,  $y = -\frac{1}{|x|}$ , 即有当  $x \rightarrow \infty$  时,  $y \rightarrow 0-0$ .

(8) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $x < -N$  时,  $0 < b-y < \varepsilon$ , 此即, 当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $y \rightarrow b-0$ .

例如,  $y = \frac{1}{x}$ , 即有当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $y \rightarrow 0-0$ .

(9) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $x > N$  时,  $0 < b-y < \varepsilon$ , 此即, 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow b-0$ .

例如,  $y = -\frac{1}{x}$ , 即有当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow 0-0$ .

(10) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $|x| > N$  时,  $0 < y-b < \varepsilon$ , 此即, 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $y \rightarrow b+0$ .

例如,  $y = \frac{1}{|x|}$ , 即有当  $x \rightarrow \infty$  时,  $y \rightarrow 0+0$ .

(11) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $x < -N$  时,  $0 < y-b < \varepsilon$ , 此即, 当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $y \rightarrow b+0$ .

例如,  $y = -\frac{1}{x}$ , 即有当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $y \rightarrow 0+0$ .

(12) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在数  $N > 0$ , 使当  $x > N$  时,  $0 < y-b < \varepsilon$ , 此即, 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow b+0$ .

例如,  $y = \frac{1}{x}$ , 即有当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow 0+0$ .

**【408】** 设  $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ , 式中  $a_i (i=0, 1, \cdots, n)$  为实数.

证明:  $\lim_{x \rightarrow \infty} |p(x)| = +\infty$ .

**证** 不妨设  $a_0 \neq 0$ , 则

$$|p(x)| \geq |a_0| \cdot |x^n| \cdot \left| 1 - \left( \frac{|a_1|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|} + \frac{|a_2|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^2} + \cdots + \frac{|a_n|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^n} \right) \right|,$$

由于  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^i} = 0 (i=0, 1, 2, \cdots, n)$ , 故存在  $E_1 > 0$ , 使当  $|x| > E_1$  时, 恒有

$$\left| 1 - \left( \frac{|a_1|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|} + \frac{|a_2|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^2} + \cdots + \frac{|a_n|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^n} \right) \right| > \frac{1}{2},$$



从而有  $|p(x)| > \frac{1}{2} |a_0| \cdot |x|^n$ .

任给  $M > 0$ , 设  $E_2 = \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}$ . 取  $E = \max(E_1, E_2)$ , 则当  $|x| > E$  时, 恒有  $|p(x)| > M$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |p(x)| = +\infty.$$

**【409】** 设  $R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m}$ , 式中  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ .

证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & n > m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

提示 分子及分母同除以  $x^m$ , 命题即可获证.

证 分子分母同除以  $x^m$ , 得  $R(x) = \frac{a_0 x^{n-m} + a_1 x^{n-m-1} + \cdots + a_n x^{-m}}{b_0 + b_1 x^{-1} + \cdots + b_m x^{-m}}$ .

当  $n > m$  时, 分子趋于无穷, 分母趋于  $b_0$ , 所以,  $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \infty$ .

当  $n = m$  时, 分子趋于  $a_0$ , 分母趋于  $b_0$ , 所以,  $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \frac{a_0}{b_0}$ .

当  $n < m$  时, 分子趋于 0, 分母趋于  $b_0$ , 所以,  $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0$ .

**【410】** 设  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , 式中  $P(x)$  和  $Q(x)$  为  $x$  的多项式, 且  $P(a) = Q(a) = 0$ .

表达式  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$  可能取何值?

解 若  $a$  仅为  $P(x) = 0$  及  $Q(x) = 0$  的一重根, 则极限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$  为一确定值 (不等于零).

若  $a$  为  $P(x) = 0$  的  $n$  重根, 而为  $Q(x) = 0$  的  $m$  重根, 则当  $n > m$  ( $n, m$  均大于 1) 时, 此极限为 0; 当  $n < m$  时, 此极限为  $\infty$ ; 当  $n = m$  时, 此极限为一不等于零的值.

总之, 极限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$  为 0, 或为  $\infty$ , 或为不等于零的值.

求下列各式之值:

**【411】** (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ .

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$ .

**【412】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$ .

解  $(1+x)(1+2x)(1+3x) = 1 + 6x + 11x^2 + 6x^3$ , 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (6 + 11x + 6x^2) = 6.$$

**【413】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2}{x^2 + x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 5x^2 + 10x + 10}{x^3 + 1} = 10$ .



**【414】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$  ( $m$  与  $n$  为正整数).

提示 将  $(1+mx)^n$  及  $(1+nx)^m$  展开即易获解.

解 
$$\begin{aligned} & \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \\ &= \frac{[1+nm x + \frac{1}{2!}n(n-1)m^2 x^2 + \cdots + m^n x^n] - [1+mnx + \frac{1}{2!}m(m-1)n^2 x^2 + \cdots + n^m x^m]}{x^2} \\ &= \frac{\frac{n}{2}(n-1)m^2 - \frac{m}{2}(m-1)n^2 + o(x)^{*})}{x^2} = \frac{1}{2}mn(n-m) + o(x), \end{aligned}$$

于是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = \frac{1}{2}mn(n-m).$

\* )  $o(x)$  表示当  $x \rightarrow 0$  时的无穷小量.

**【415】**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}.$

提示 利用 409 题的结果.

解 分子的最高次方为 5 次, 分母的最高次方也为 5 次, 因而当  $x \rightarrow \infty$  时, 此分式的极限为分子与分母的最高次方系数之比, 于是,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5} = \frac{1}{5^5}.$$

**【416】**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}.$

提示 利用 409 题的结果.

解 分子与分母的最高次方相同, 故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

**【417】**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}.$

提示 分子与分母的最高次方均为  $\frac{n(n+1)}{2}$ , 并利用 409 题的结果.

解 分子的最高次方为  $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ , 它与分母的最高次方相同, 所以,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

**【418】**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x-5} = -\frac{1}{2}.$

**【419】**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}.$

提示 注意分子及分母分解因式后, 有

$$x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2), \quad x^4-4x+3 = (x-1)^2(x^2+2x+3).$$

解  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}.$

**【420】**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-x^3-x+1}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-x^3-x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} = 1.$



\* ) 原书 419 题与 420 题相同.

**【421】**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)^2(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$

**【422】**  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}.$

解  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 1)}{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{1}{3}.$

**【423】**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}.$

提示 仿 419 题的解法, 将分子及分母分解因式, 且注意  $x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2(x+4)$ .

解  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{(x-2)^{20}(x+4)^{10}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} = \frac{3^{20}}{6^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}.$

**【424】**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}.$

提示  $x + x^2 + \cdots + x^n - n = (x-1)[n + (n-1)x + (n-2)x^2 + \cdots + x^{n-1}].$

解  $x + x^2 + \cdots + x^n - n = (x-1) + (x^2-1) + \cdots + (x^n-1)$   
 $= (x-1)[1 + (x+1) + \cdots + (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)]$   
 $= (x-1)[n + (n-1)x + (n-2)x^2 + \cdots + x^{n-1}].$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} [n + (n-1)x + (n-2)x^2 + \cdots + x^{n-1}]$$

$$= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**【425】**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} (m \text{ 和 } n \text{ 为正整数}).$

解  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1} = \frac{m}{n}.$

**【426】**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} (n \text{ 为正整数}).$

提示 令  $x = a + y$ , 则当  $x \rightarrow a$  时,  $y \rightarrow 0$ . 将  $(a+y)^n$  展开.

解 设  $x = a + y$ , 则当  $x \rightarrow a$  时,  $y \rightarrow 0$ . 代入, 得

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(a+y)^n - a^n - na^{n-1}y}{y^2}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{n}{2!} (n-1)a^{n-2} + \frac{1}{3!} n(n-1)(n-2)a^{n-3}y + \cdots + y^{n-2} \right] = \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}.$$

**【427】**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} (n \text{ 为正整数}).$

提示 仿 426 题的解法, 令  $x = 1 + y$ .

解 设  $x = 1 + y$ , 则当  $x \rightarrow 1$  时,  $y \rightarrow 0$ . 代入, 得

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^{n+1} - (n+1)(1+y) + n}{y^2}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{n(n+1)}{2!} + \frac{1}{3!} (n+1)n(n-1)y + \cdots + y^{n-1} \right] = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**【428】**  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) (m \text{ 和 } n \text{ 为正整数}).$

**解题思路** 当  $m \neq n$  时, 不失一般性, 设  $m < n$ , 且令  $m + l = n$  ( $l \in \mathbb{N}$ ). 通分后求极限, 所得结果对于  $m = n$  的情况仍适用.



解 当  $m=n$  时, 此极限显然为零.

当  $m \neq n$  时, 不失一般性, 假设  $m < n$ , 且  $m+l=n$ . 此时

$$\begin{aligned} \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} &= \frac{m(1+x+\cdots+x^{n-1}) - n(1+x+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})} \\ &= \frac{-l-lx-\cdots-lx^{m-1}+mx^m+mx^{m+1}+\cdots+mx^{m+l-1}}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})} \\ &= -\frac{mx^{m+l-2}+2mx^{m+l-3}+\cdots+mlx^{m-1}}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})} - \frac{+l(m-1)x^{m-2}+l(m-2)x^{m-3}+\cdots+l}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) &= -\frac{m[1+2+\cdots+(l-1)] + l[m+(m-1)+\cdots+1]}{mn} \\ &= -\frac{\frac{ml(l-1)}{2} + \frac{ml(m+1)}{2}}{mn} = -\frac{ml(m+l)}{2mn} = \frac{m-n}{2}. \end{aligned}$$

当  $m=n$  时, 上述结果就等于零. 即上述结果对  $m=n$  的情况仍然适用.

总之, 不论  $m$  及  $n$  为任何的正整数, 均有  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = \frac{m-n}{2}$ .

**【429】**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \left( x + \frac{a}{n} \right) + \left( x + \frac{2a}{n} \right) + \cdots + \left( x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right]$

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \left( x + \frac{a}{n} \right) + \left( x + \frac{2a}{n} \right) + \cdots + \left( x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right]$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ (n-1)x + \frac{a}{n} [1+2+\cdots+(n-1)] \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \left( x + \frac{a}{2} \right) = x + \frac{a}{2}.$

**【430】**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \left( x + \frac{a}{n} \right)^2 + \left( x + \frac{2a}{n} \right)^2 + \cdots + \left( x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^2 \right].$

提示 利用 2 题的结果.

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \left( x + \frac{a}{n} \right)^2 + \left( x + \frac{2a}{n} \right)^2 + \cdots + \left( x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^2 \right]$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ (n-1)x^2 + \frac{2ax}{n} [1+2+\cdots+(n-1)] + \frac{a^2}{n^2} [1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2] \right\}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ (n-1)x^2 + \frac{n-1}{1} ax + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n} a^2 \right\} = x^2 + ax + \frac{a^2}{3}.$

**【431】**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}.$

提示  $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2-1).$

解  $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2-1), \quad 2^2+4^2+\cdots+(2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$

于是,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2(n+1)} = 1.$

**【432】**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3} - \frac{n}{4} \right).$

提示  $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3} - \frac{n}{4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n^2(n+1)^2}{4n^3} - \frac{n}{4} \right]^{*)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n} = \frac{1}{2}.$

\* ) 利用 3 题及 1 题的结果.

**【433】**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}.$



**解题思路** 令  $1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3 = x_n$  及  $[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2 = y_n$ , 则  $y_{n+1} > y_n$ , 且  $y_n \rightarrow +\infty$ .

利用 143 题的结果.

**解** 令  $1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3 = x_n$ ,  $[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2 = y_n$ , 则  $y_{n+1} > y_n$ , 且  $y_n \rightarrow +\infty$ , 由于

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \frac{(3n+1)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n+1)]^2 - [1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2} \\ &= \frac{(3n+1)^3}{\left[\frac{(1+n)(3n+2)}{2} + \frac{n(3n-1)}{2}\right](3n+1)} \rightarrow 3 \quad (n \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

利用 143 题的结果, 即得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2} = 3$ .

**【434】** 把由抛物线  $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$ ,  $Ox$  轴及直线  $x = a$  所围成的曲边三角形  $OAM$  (图 1.237) 的面积, 当作以  $\frac{a}{n}$  为底的各内接矩形面积之和当  $n \rightarrow \infty$  的极限值, 求此面积.

**提示** 先求各内接矩形的面积和.

**解** 底的  $n$  个分点为  $0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}a$ ;

它们所对应的高为

$$0, b\left(\frac{1}{n}\right)^2, b\left(\frac{2}{n}\right)^2, \cdots, b\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

于是, 得内接的  $n$  个矩形面积之和为

$$ab \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{ab(n-1)(2n-1)}{6n^2},$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 它趋向于  $\frac{ab}{3}$ , 即面积  $OAM = \frac{ab}{3}$ .

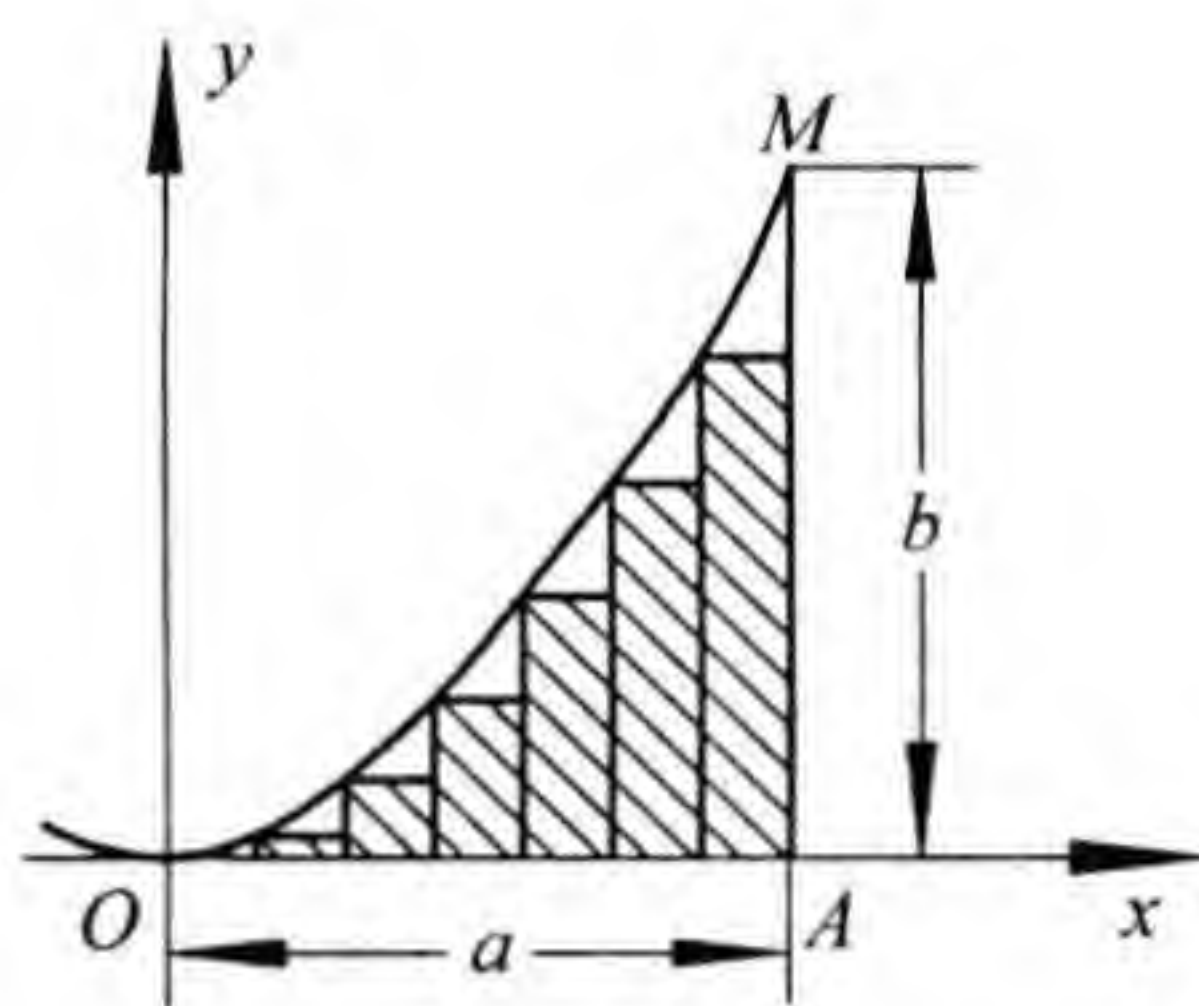


图 1.237

**求极限:**

**【435】**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$

**解** 分子分母同除以  $\sqrt{x}$ , 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = 1.$$

**【436】**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}.$

**提示** 分子分母同除以  $\sqrt{x}$ .

**解** 分子分母同除以  $\sqrt{x}$ , 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**【437】**  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.$

**提示** 分子分母同乘以它们的共轭因式.

**解** 分子分母同乘以它们的共轭因式, 得



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

**【438】**  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}.$

提示 分子及分母同乘以式  $(\sqrt{1-x}+3)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{(2+\sqrt[3]{x})(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{-(8+x)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)} = -\lim_{x \rightarrow -8} \frac{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x}+3} = -2.\end{aligned}$$

**【439】**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}.$

提示 分子及分母同乘以式  $(\sqrt{x}+\sqrt{a})$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a}(\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \quad (a>0).\end{aligned}$$

**【440】**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}.$

$$\begin{aligned}\text{解 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = -\frac{1}{16}.\end{aligned}$$

**【441】**  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}.$

$$\begin{aligned}\text{解 } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt[3]{x-6}+2)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}{(x^3+8)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)} = \frac{1}{144}.\end{aligned}$$

**【442】**  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}.$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}+2} = \frac{1}{4}.$$

**【443】**  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}.$

$$\begin{aligned}\text{解 } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt{9+2x}+5)} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{9+2x}+5} = \frac{12}{5}.\end{aligned}$$

**【444】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \quad (n \text{ 为整数}).$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[n]{1+x}-1)(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)}{x(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + \sqrt[n]{1+x} + 1} = \frac{1}{n}.$$

**【445】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-2x-x^2} - 1 - x)(\sqrt{1-2x-x^2} + 1 + x)}{x(\sqrt{1-2x-x^2} + 1 + x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(2+x)}{\sqrt{1-2x-x^2} + 1 + x} = -2.$$

**【446】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{x+x^2}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{x+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2)}{(x+x^2)} \cdot \frac{(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2} + 2 \sqrt[3]{8+3x-x^2} + 4)}{(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2} + 2 \sqrt[3]{8+3x-x^2} + 4)} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-x}{(1+x)(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2} + 2 \sqrt[3]{8+3x-x^2} + 4)} = \frac{1}{4}.$$

**【447】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x+2 \sqrt[3]{x^4}}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x+2 \sqrt[3]{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x})}{(x+2 \sqrt[3]{x^4})} \cdot \frac{(\sqrt[3]{(27+x)^2} + \sqrt[3]{27^2-x^2} + \sqrt[3]{(27-x)^2})}{(\sqrt[3]{(27+x)^2} + \sqrt[3]{27^2-x^2} + \sqrt[3]{(27-x)^2})} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(1+2 \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(27+x)^2} + \sqrt[3]{27^2-x^2} + \sqrt[3]{(27-x)^2})} = \frac{2}{27}.$$

**【448】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \cdot \frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2})}{(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2})} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{3}{2}.$$

**【449】**  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \left[ \frac{(\sqrt[6]{(x+2)^3} - \sqrt[6]{(x+20)^2})(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(\sqrt[4]{x+9} - 2)(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)} \cdot \frac{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{[(x+2)^3 - (x+20)^2](\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x^2 + 12x + 56)(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x^2 + 12x + 56)(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}}}$$

$$= \frac{189 \cdot 4 \cdot 8}{3^5 + 3^4 \cdot 3 + 3^3 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 3^5} = \frac{6048}{1458} = 4 \frac{4}{27}.$$



$$\text{【450】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1-\frac{x}{2}}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1-\frac{x}{2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\left( \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^4} - \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^3} \right) \left( 1 + \sqrt{1-\frac{x}{2}} \right)}{\left( 1 - \sqrt{1-\frac{x}{2}} \right) \left( 1 + \sqrt{1-\frac{x}{2}} \right)} \cdot \frac{\left( \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}} + \cdots + \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}} \right)}{\left( \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}} + \cdots + \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}} \right)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left( \frac{7}{12} + \frac{23x}{48} + \frac{229x^2}{1728} + \frac{x^3}{81} \right) \left( 1 + \sqrt{1-\frac{x}{2}} \right)}{\frac{x}{2} \left( \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}} + \cdots + \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}} \right)} = \frac{7}{36}.$$

$$\text{【451】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\sqrt[5]{(1+5x)^4} + \sqrt[5]{(1+5x)^3} (1+x) + \cdots + (1+x)^4)}{(1+5x) - (1+x)^5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+5x)^4} + \sqrt[5]{(1+5x)^3} (1+x) + \cdots + (1+x)^4}{-10 - 10x - 5x^2 - x^3} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{【452】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数}).$$

**解题思路** 分三种情况:(1) $m$ 及 $n$ 均为正整数;(2) $m$ 及 $n$ 均为负整数,可令 $m=-m'$ , $n=-n'$ ,其中 $m'$ 及 $n'$ 为正整数;(3) $m$ 及 $n$ 中有一个为正整数,另一个为负整数.

**解** 如果 $m$ 及 $n$ 为正整数,则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\alpha x)^n - (1+\beta x)^m}{x (\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}} + \cdots + \sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(n\alpha - m\beta) + (C_n^2 \alpha^2 x + \cdots + \alpha^n x^{n-1} - C_m^2 \beta^2 x - \cdots - \beta^m x^{m-1})}{\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}} + \cdots + \sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}}} \\ &= \frac{n\alpha - m\beta}{mn} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}. \end{aligned}$$

如果 $m$ 及 $n$ 为负整数.设 $m=-m'$ , $n=-n'$ ,其中 $m'$ 及 $n'$ 为正整数,则

$$\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x} = \frac{\sqrt[n']{1+\beta x} - \sqrt[m']{1+\alpha x}}{\sqrt[m']{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x}}.$$

上式的分母趋于1,于是利用本题前半段的结果,得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n']{1+\beta x} - \sqrt[m']{1+\alpha x}}{x} = \frac{\beta}{n'} - \frac{\alpha}{m'} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}.$$

如果 $m$ 及 $n$ 中有一个为负整数,另一个为正整数,则同法可证上述结论仍然成立.因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n} \quad (mn \neq 0).$$

$$\text{【453】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数}).$$

**提示** 仿452题的解法.

**解** 与452题相同,先设 $m$ 及 $n$ 为正整数.



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\alpha x)^n (1+\beta x)^m - 1}{x(\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)} \cdot (1+\beta x)^{m(mn-1)} + \dots + 1})} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n\alpha + m\beta + o(x)}{\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)} (1+\beta x)^{m(mn-1)} + \dots + 1}} \\&= \frac{n\alpha + m\beta}{mn} = \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}.\end{aligned}$$

若  $m$  及  $n$  为负整数, 则此结果仍然成立. 事实上, 只需设  $m = -m', n = -n'$ , 其中  $m'$  及  $n'$  为正整数. 于是,

$$\sqrt[m]{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1 = \frac{1 - \sqrt[m']{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x}}{\sqrt[m']{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x}}.$$

再利用前半段的结果, 即得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[m']{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x}}{x(\sqrt[m']{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x})} = -\frac{\alpha}{m'} - \frac{\beta}{n'} = \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}.$$

若  $m$  及  $n$  中有一个为负整数, 则同法可证上述结论仍然成立. 因而, 当  $m$  及  $n$  为整数时, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} = \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} \quad (mn \neq 0).$$

**【454】** 设  $P(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ , 又  $m$  为整数, 求证:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}.$$

证 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x(\sqrt[m]{(1+P(x))^{m-1}} + \dots + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}}{(1+P(x))^{\frac{m-1}{m}} + \dots + 1} = \frac{a_1}{m}.$$

求下列极限:

**【455】**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$  ( $m$  及  $n$  为整数).

提示 仿 452 题的解法.

解 当  $m$  及  $n$  为正整数, 我们有

$$\frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}} + \dots + 1}{x^{\frac{m-1}{m}} + x^{\frac{m-2}{m}} + \dots + 1} \rightarrow \frac{n}{m} \quad (x \rightarrow 1).$$

若  $m$  及  $n$  为负整数时, 设  $m = -m', n = -n'$ , 其中  $m'$  及  $n'$  为正整数, 于是

$$\frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{1 - \sqrt[m']{x}}{1 - \sqrt[n']{x}} \cdot \frac{\sqrt[n']{x}}{\sqrt[m']{x}} \rightarrow \frac{n'}{m'} = \frac{n}{m} \quad (x \rightarrow 1).$$

当  $m$  及  $n$  中只有一个为负整数, 上述结论仍然成立. 因此, 当  $m$  及  $n$  为整数时, 有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{n}{m} \quad (m \neq 0).$$

**【456】**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}.$

提示 令  $x = t^n$ .

解 设  $x = t^n$ , 则

$$\begin{aligned}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} &= \frac{(1-t^{3 \cdot 4 \cdots n})(1-t^{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n}) \cdots (1-t^{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)})}{(1-t^n)^{n-1}} \\&= \frac{(1+t+t^2+\dots+t^{\frac{n!}{2}-1})(1+t+\dots+t^{\frac{n!}{3}-1}) \cdots (1+t+\dots+t^{\frac{n!}{n}-1})}{(1+t+\dots+t^{n!-1})^{n-1}}\end{aligned}$$

当  $x \rightarrow 1$  时,  $t \rightarrow 1$ . 于是, 上式趋向于

$$\frac{\frac{n!}{2} \cdot \frac{n!}{3} \cdots \frac{n!}{n}}{(n!)^{n-1}} = \frac{1}{n!},$$



即  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} = \frac{1}{n!}.$

【457】  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)} - x].$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a)(x+b) - x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a+b+\frac{ab}{x}}{1+\sqrt{(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})}} = \frac{a+b}{2}.$

【458】  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}).$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}) - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} = \frac{1}{2}.$

【459】  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x).$

提示 令  $x = \frac{1}{t}.$

解 设  $x = \frac{1}{t}$ , 则

$$\begin{aligned} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x) &= \frac{\sqrt{1+2t} - 2\sqrt{1+t} + 1}{t^2} = \frac{(\sqrt{1+2t} + 1)^2 - 4(1+t)}{t^2(\sqrt{1+2t} + 1 + 2\sqrt{1+t})} \\ &= \frac{2(\sqrt{1+2t} - 1 - t)}{t^2(\sqrt{1+2t} + 1 + 2\sqrt{1+t})} = \frac{2(\sqrt{1+2t} - 1 - t)(1 + \sqrt{1+2t})^2}{t^2(\sqrt{1+2t} + 1 + 2\sqrt{1+t})(1 + \sqrt{1+2t})^2} \\ &= \frac{-4}{(\sqrt{1+2t} + 1 + 2\sqrt{1+t})(1 + \sqrt{1+2t})^2}. \end{aligned}$$

当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $t \rightarrow 0$ . 于是, 上式趋向于  $-\frac{1}{4}$ , 即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x) = -\frac{1}{4}.$$

【460】  $\lim_{x \rightarrow +0} \left( \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right).$

解  $\lim_{x \rightarrow +0} \left( \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\left( \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \right) - \left( \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \right)}{\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{1 + \sqrt{x + x\sqrt{x}}} + \sqrt{1 - \sqrt{x + x\sqrt{x}}}} = 1.$$

【461】  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}).$

解  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1})$



$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2} + \sqrt[3]{(x^3+x^2+1)(x^3-x^2+1)} + \sqrt[3]{(x^3-x^2+1)^2}} = \frac{2}{3}.$$

**【462】**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x}).$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x})$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3+3x^2)^2 - (x^2-2x)^3}{\sqrt[6]{(x^3+3x^2)^{10}} + \sqrt[6]{(x^3+3x^2)^8(x^2-2x)^3} + \cdots + \sqrt[6]{(x^2-2x)^{15}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 \left(12 - \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2}\right)}{\sqrt[6]{(x^3+3x^2)^{10}} + \cdots + \sqrt[6]{(x^2-2x)^{15}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 - \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2}}{\sqrt[6]{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{10}} + \cdots + \sqrt[6]{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{15}}} = 2. \end{aligned}$$

**【463】**  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}].$

解  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}]$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}] \cdot [(x+1)^{\frac{4}{3}} + (x^2-1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}]}{(x+1)^{\frac{4}{3}} + (x^2-1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

**【464】**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}).$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x^2+2x} - x - 1)(\sqrt{x^2+2x} + x + 1)}{(\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x^2+2x} + x + 1)} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 2\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right) \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 + \frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**【465】**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+\alpha_1) \cdots (x+\alpha_n)} - x].$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+\alpha_1) \cdots (x+\alpha_n)} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+\alpha_1) \cdots (x+\alpha_n) - x^n}{\sum_{j=1}^n \left[ \prod_{i=1}^n (x+\alpha_i)^{\frac{n-j}{n}} \right] x^{j-1}}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) x^{n-1} + \cdots + \prod_{i=1}^n \alpha_i}{\sum_{j=1}^n \left[ \prod_{i=1}^n (x+\alpha_i)^{\frac{n-j}{n}} \right] x^{j-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i + o\left(\frac{1}{x}\right)}{\sum_{j=1}^n \left[ \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_i}{x}\right)^{\frac{n-j}{n}} \right]} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{n}.$$

**【466】**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2-1})^n + (x + \sqrt{x^2-1})^n}{x^n} \quad (n \text{ 为正整数}).$

提示 分子及分母同除以式  $x^n$ .

解  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2-1})^n + (x + \sqrt{x^2-1})^n}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n + \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n \right] = 2^n.$



**【467】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n - (\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$  ( $n$  为正整数).

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n - (\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} [(x + \sqrt{1+x^2})^{n-1} + (x + \sqrt{1+x^2})^{n-2}(\sqrt{1+x^2}-x) + \cdots + (\sqrt{1+x^2}-x)^{n-1}] = 2n.$

**【468】** 设二次方程式  $ax^2+bx+c=0$  的系数  $a$  趋于零, 系数  $b$  与  $c$  为常数, 且  $b \neq 0$ , 试研究此二次方程式之二根  $x_1$  及  $x_2$  的性质.

解  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

不失一般性, 假设  $b > 0$ , 于是, 有

$$\lim_{a \rightarrow 0} x_2 = \infty$$

及

$$\lim_{a \rightarrow 0} x_1 = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = -2c \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} = -\frac{c}{b}.$$

**【469】** 从条件

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0$$

求常数  $a$  和  $b$ .

解  $\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b = \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x + (1-b)}{x+1}.$

按假设, 上式的极限为零的必要条件是

$$1-a=0 \quad \text{及} \quad a+b=0,$$

解之, 得  $a=1, b=-1$ .

**【470】<sup>+</sup>** 从条件

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x+1} - a_1x - b_1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-x+1} - a_2x - b_2) = 0$$

求常数  $a_i$  和  $b_i$  ( $i=1, 2$ ).

**解题思路** 将式子  $\sqrt{x^2-x+1} - a_1x - b_1$  化为  $\frac{(1-a_1^2)x^2 - (1+2a_1b_1)x + (1-b_1^2)}{\sqrt{x^2-x+1} + a_1x + b_1}$ , 求得其极限为零的

必要条件是  $a_1 = \pm 1, b_1 = \mp \frac{1}{2}$ . 分别就  $a_1 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}$  及  $a_1 = -1, b_1 = \frac{1}{2}$  检验  $\sqrt{x^2-x+1} + a_1x + b_1$  的极限 (当  $x \rightarrow -\infty$  时), 并与条件比较, 决定取舍, 最后得  $a_1 = -1, b_1 = \frac{1}{2}$ . 同理可得  $a_2 = 1, b_2 = -\frac{1}{2}$ .

解  $\sqrt{x^2-x+1} - a_1x - b_1 = \frac{(1-a_1^2)x^2 - (1+2a_1b_1)x + (1-b_1^2)}{\sqrt{x^2-x+1} + a_1x + b_1}, \quad (1)$

上式极限为零的必要条件是

$$1-a_1^2=0 \quad \text{及} \quad 1+2a_1b_1=0,$$

解之, 得  $a_1 = \pm 1, b_1 = \mp \frac{1}{2}$ .

当  $a_1 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}$  时, 有

$$\sqrt{x^2-x+1} + a_1x + b_1 = \sqrt{x^2-x+1} + x - \frac{1}{2} = \frac{x^2-x+1 - (x-\frac{1}{2})^2}{\sqrt{x^2-x+1} - (x-\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2-x+1} - x + \frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

(当  $x \rightarrow -\infty$  时),



从而,由(1)式知

$$\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1 \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时}),$$

此与假定不符合,故舍弃  $a_1=1, b_1=-\frac{1}{2}$ .

当  $a_1=-1, b_1=\frac{1}{2}$  时,显然有

$$\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1 = \sqrt{x^2-x+1}-x+\frac{1}{2} \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时}),$$

从而,由(1)式知

$$\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1 \rightarrow 0 \quad (\text{当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时}),$$

此与假定符合,故得  $a_1=-1, b_1=\frac{1}{2}$ .

同理可得  $a_2=1, b_2=-\frac{1}{2}$ .

求下列极限:

【471】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5$ .

【472】  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ .

提示 利用“有界函数与无穷小之积仍为无穷小”这一结果.

解 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{x}$  为无穷小量,而  $|\sin x| \leq 1$ ,故  $\frac{\sin x}{x}$  当  $x \rightarrow \infty$  时为无穷小量,即  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ .

【473】  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$  ( $m$  及  $n$  为整数).

提示 令  $x = \pi + y$ .

解 设  $x = \pi + y$ ,则当  $x \rightarrow \pi$  时,  $y \rightarrow 0$ . 于是,

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(-1)^m \sin my}{(-1)^n \sin ny} = (-1)^{m-n} \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\sin my}{my} \cdot \frac{ny}{\sin ny} \cdot \frac{m}{n} \right) = (-1)^{m-n} \frac{m}{n}.$$

【474】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

提示 注意  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$ .

【475】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$ .

提示 利用三角变换将原式变形,再求极限.

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2} \cos x} = \frac{1}{2}$ .

【476】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ .

提示 利用和差化积将原式变形,再求极限.

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 4x \sin x}{\sin x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 4x = 2$ .



【477】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \cos x = 4.$

【478】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x}{2 \sin^2 \frac{px}{2} + \sin px} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{px}{2} \left( \sin \frac{px}{2} + \cos \frac{px}{2} \right)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{px}{2}}{\sin \frac{px}{2}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{px}{2} + \cos \frac{px}{2}} \right) = \frac{1}{p} \quad (p \neq 0).$

【479】  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right).$

解  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right)}{\cos 2x \cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos 2y \sin y}{\sin 2y \cos y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos 2y}{2 \cos^2 y} = \frac{1}{2},$

其中  $x = \frac{\pi}{4} + y.$

【480】  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}.$

提示 令  $x = 1 - y.$

解 设  $x = 1 - y,$  则

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} = \lim_{y \rightarrow 0} y \cot \frac{\pi y}{2} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin \frac{\pi y}{2}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \cos \frac{\pi y}{2} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

【481】 证明等式:

(1)  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a;$  (2)  $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a;$  (3)  $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a \quad (a \neq \frac{2n-1}{2}\pi; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

证 (1)  $|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq |x-a|.$

任给  $\epsilon > 0,$  要使  $|\sin x - \sin a| < \epsilon,$  只要  $|x-a| < \epsilon,$  取  $\delta = \epsilon,$  则当  $0 < |x-a| < \delta$  时,  $|\sin x - \sin a| < \epsilon.$   
 此即  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a.$

(2)  $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \lim_{x \rightarrow a} \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - a \right) = \cos a.$

(3)  $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \sin x}{\lim_{x \rightarrow a} \cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a.$

其中  $a \neq \frac{2n-1}{2}\pi; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots.$

求下列极限:

【482】  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$

提示 仿 476 题的解法, 并利用结果  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

解  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a.$



**【483】**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}.$

解  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{-\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \sin \frac{x+a}{2} \right) = -\sin a.$

**【484】**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}.$

解  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{(x-a)\cos x \cos a} = \frac{1}{\cos^2 a} \quad (a \neq \frac{2k+1}{2}\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

**【485】**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cot x - \cot a}{x - a}.$

解  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cot x - \cot a}{x - a} = -\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} \cdot \frac{1}{\sin x \sin a} = -\frac{1}{\sin^2 a} \quad (a \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

**【486】**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a}.$

解  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos a - \cos x}{(x-a)\cos x \cos a} = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\sin \frac{x+a}{2}}{\cos x \cos a} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \right)$   
 $= \frac{\sin a}{\cos^2 a} \quad (a \neq \frac{2k+1}{2}\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

**【487】**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\csc x - \csc a}{x - a}.$

解  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\csc x - \csc a}{x - a} = -\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \cdot \frac{1}{\sin x \sin a} \right) = -\frac{\cos a}{\sin^2 a} \quad (a \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

\* ) 利用 482 题的结果.

**【488】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}.$

提示 注意

$$\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a = [\sin(a+2x) - \sin(a+x)] - [\sin(a+x) - \sin a],$$

并仿 476 题的解法.

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin(a+2x) - \sin(a+x)] - [\sin(a+x) - \sin a]}{x^2}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(a+\frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{2} - 2\cos\left(a+\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin\frac{x}{2}\left[\cos\left(a+\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(a+\frac{x}{2}\right)\right]}{x^2}$   
 $= -\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \sin(a+x) \right] = -\sin a.$

**【489】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}.$

提示 仿 488 题的解法.

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\cos(a+2x) - \cos(a+x)] - [\cos(a+x) - \cos a]}{x^2}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin\left(a+\frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{2} + 2\sin\left(a+\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin\frac{x}{2}\left[\sin\left(a+\frac{3x}{2}\right) - \sin\left(a+\frac{x}{2}\right)\right]}{x^2}$   
 $= -\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cos(a+x) \right] = -\cos a.$



**【490】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(a+2x) - 2\tan(a+x) + \tan a}{x^2}.$

提示 仿 488 题的解法.

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(a+2x) - 2\tan(a+x) + \tan a}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\tan(a+2x) - \tan(a+x)] - [\tan(a+x) - \tan a]}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\frac{\sin(a+2x)\cos(a+x) - \cos(a+2x)\sin(a+x)}{\cos(a+2x)\cos(a+x)} - \frac{-\cos a \sin(a+x) + \cos(a+x)\sin a}{\cos(a+x)\cos a}}{x^2} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x [\cos(a+x)\cos a - \cos(a+x)\cos(a+2x)]}{x^2 \cos a \cos(a+2x) \cos^2(a+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{2\sin(a+x)}{\cos a \cos(a+2x) \cos(a+x)} \right]$$

$$= \frac{2\sin a}{\cos^3 a} \quad (a \neq \frac{2k+1}{2}\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

**【491】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot(a+2x) - 2\cot(a+x) + \cot a}{x^2}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot(a+2x) - 2\cot(a+x) + \cot a}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x \sin(a+x) [\sin a - \sin(a+2x)]}{x^2 \sin a \sin^2(a+x) \sin(a+2x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{2\cos(a+x)}{\sin a \cdot \sin(a+x) \sin(a+2x)} \right] = \frac{2\cos a}{\sin^3 a} \quad (a \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

**【492】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x) - \sin^2 a}{x}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x) - \sin^2 a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}[\cos x - \cos(2a+3x)] - \sin^2 a}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(2a+3x) - (1 - \cos 2a)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ -\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x} + \frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \cdot \frac{3\sin(2a + \frac{3x}{2})}{2} \right] = \frac{3}{2} \sin 2a.$$

**【493】**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}.$

提示 注意分子及分母分解因式后,有

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = (2\sin x - 1)(\sin x + 1), \quad 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = (2\sin x - 1)(\sin x - 1).$$

解  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(2\sin x - 1)(\sin x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = -3.$

**【494】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}.$

解题思路 注意  $1 - \cos x \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x)$  及  $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ , 将原式变形

后利用重要极限.

解 因为

$$1 - \cos x \cos 2x \cos 3x = 1 - \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) \cos 2x = 1 - \frac{1}{2} \cos 4x \cos 2x - \frac{1}{2} \cos^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(\cos 6x + \cos 2x) - \frac{1}{4}(1 + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x),$$

所以,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x)}{2\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 + \left( \frac{\sin 2x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 + \left( \frac{\sin 3x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \right] = \frac{1}{4}(4 + 16 + 36) = 14.$$



**【495】**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x}.$

提示 令  $x = \frac{\pi}{3} + y$ .

解 设  $x = \frac{\pi}{3} + y$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{1 - \cos y + \sqrt{3} \sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin y}{y}}{\frac{\sin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \sin \frac{y}{2} + \sqrt{3} \frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**【496】**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x - 3\tan x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}.$

解  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x - 3\tan x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x \cdot \frac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x (\sin x + \sqrt{3} \cos x)}{-\frac{1}{2} \cos^2 x} = -24.$

**【497】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(a+x)\tan(a-x) - \tan^2 a}{x^2}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(a+x)\tan(a-x) - \tan^2 a}{x^2}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{\tan a + \tan x}{1 - \tan a \tan x})(\frac{\tan a - \tan x}{1 + \tan a \tan x}) - \tan^2 a}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x (\tan^4 a - 1)}{x^2 (1 - \tan^2 a \tan^2 x)} = \tan^4 a - 1$   
 $= \frac{-\cos 2a}{\cos^4 a} \quad (a \neq \frac{2k+1}{2}\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

**【498】**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cot^3 x}{2 - \cot x - \cot^3 x}.$

解  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cot^3 x}{2 - \cot x - \cot^3 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{2\sin^3 x - \sin^2 x \cos x - \cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x}{2\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x} = \frac{3}{4}.$

**【499】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$

提示 分子分母同乘以式  $\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3 (\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x (\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4(\frac{x}{2})^2} \cdot \frac{1}{\cos x (\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} \right] = \frac{1}{4}.$

**【500】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos x}}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\sqrt{1+x\sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\frac{\sin x}{x} + \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = \frac{4}{3}.$

**【501】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.$



$$\begin{aligned}
 \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sqrt[3]{\cos x}(1 - \sqrt[6]{\cos x})}{\sin^2 x} \\
 &= -\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1 + \sqrt[6]{\cos x} + \dots + \sqrt[6]{\cos^5 x}} \right] \\
 &= -\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1 + \sqrt[6]{\cos x} + \dots + \sqrt[6]{\cos^5 x}} \right] = -\frac{1}{12}.
 \end{aligned}$$

**【502】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}.$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x^2}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin \frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} \cdot \left( \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \right] = \sqrt{2}.$$

**【503】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})}.$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2\sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2}(1 + \sqrt{\cos x})} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sin \frac{\sqrt{x}}{2}} \right)^2 \cdot \frac{x}{1 + \sqrt{\cos x}} \right] = 0.$$

**【504】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}.$

解 不妨令  $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ , 则

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x(1 - \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \\
 &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos 2x}(1 - \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \\
 &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2(1 + \sqrt{\cos 2x})} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2(1 + \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x} + \sqrt[3]{\cos^2 3x})} = 3.
 \end{aligned}$$

**【505】**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}).$

提示 注意  $\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} = 2\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}$ , 及

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0,$$

并仿 472 题的解法.

$$\text{解 } \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} = 2\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}.$$

因为  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow +\infty$ ), 所以,  $\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow +\infty$ ).

又因  $\left| \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right| \leq 1$ , 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0$ .

**【506】** (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}};$  (2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}};$  (3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}.$

$$\text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \frac{1}{2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{2}{3}};$$



$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = 1^0 = 1.$$

$$\text{【507】} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2} = 0.$$

$$\text{【508】} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}.$$

提示 注意当  $x \rightarrow \infty$  时, 有

$$\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1} \rightarrow \frac{3}{2} \quad \text{及} \quad \frac{x^3}{1-x} = \frac{x^2}{\frac{1}{x}-1} \rightarrow -\infty.$$

解 因为当  $x \rightarrow \infty$  时

$$\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1} \rightarrow \frac{3}{2} \quad \text{及} \quad \frac{x^3}{1-x} = \frac{x^2}{\frac{1}{x}-1} \rightarrow -\infty,$$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}} = 0.$$

$$\text{【509】} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin^n \frac{2\pi n}{3n+1} \right).$$

$$\text{解} \quad \text{因为} \left| \sin \frac{2\pi n}{3n+1} \right| \leq 1, \text{ 所以, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{2\pi n}{3n+1} = 0.$$

$$\text{【510】} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+0} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\tan 2x}.$$

解 因为当  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}+0$  时,

$$1 < \tan \left( \frac{\pi}{8} + x \right) < +\infty \quad \text{及} \quad \tan 2x \rightarrow -\infty,$$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+0} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\tan 2x} = 0.$$

$$\text{【511】} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}} = 1.$$

$$\text{【512】}^+ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x^2-1}{2}} \right)^{\frac{x^2-1}{2} \cdot 2+1} = e^2.$$

$$\text{【513】} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2} \right)^{\frac{1}{x}} = \left( \frac{1}{2} \right)^0 = 1.$$

$$\text{【514】} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1-2x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} [1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}(-2)} = e^{-2}.$$

$$\text{【515】} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^x.$$



提示 注意

$$\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right)^{\frac{x-a}{2a} \cdot 2a+a},$$

并利用结果  $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$ .

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right)^{\frac{x-a}{2a} \cdot 2a+a} = e^{2a}.$$

**【516】**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}\right)^x \quad (a_1 > 0, a_2 > 0).$

提示 分别对  $a_1 = a_2$ ,  $a_1 < a_2$  及  $a_1 > a_2$  求极限.

$$\text{解 } \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}\right)^x = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x \cdot \left(\frac{x + \frac{b_1}{a_1}}{x + \frac{b_2}{a_2}}\right)^x = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{x + \frac{b_2}{a_2}}{\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}}}\right)^{\frac{x + \frac{b_2}{a_2}}{\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}} \left(\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}\right) - \frac{b_2}{a_2}}.$$

(1) 当  $a_1 = a_2 = a$  时,

$$\left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{\frac{x + \frac{b_2}{a}}{\frac{b_1}{a} - \frac{b_2}{a}}}\right)^{\frac{x + \frac{b_2}{a}}{\frac{b_1}{a} - \frac{b_2}{a}} \left(\frac{b_1}{a} - \frac{b_2}{a}\right) - \frac{b_2}{a}}.$$

$$\text{于是, } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}\right)^x = e^{\frac{b_1 - b_2}{a_1}}.$$

(2) 当  $a_1 < a_2$  时,  $0 < \frac{a_1}{a_2} < 1$ , 于是,  $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$ ,

而

$$\left(\frac{x + \frac{b_1}{a_1}}{x + \frac{b_2}{a_2}}\right)^x \rightarrow e^{\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}},$$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}\right)^x = 0.$$

(3) 当  $a_1 > a_2$  时,  $\frac{a_1}{a_2} > 1$ . 于是,  $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x \rightarrow +\infty$ , 所以,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}\right)^x = +\infty$ .

**【517】**  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\cot^2 x}.$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\cot^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \cos^2 x} = e.$$

**【518】**  $\lim_{x \rightarrow 1} (1+\sin \pi x)^{\cot \pi x}.$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 1} (1+\sin \pi x)^{\cot \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1} (1+\sin \pi x)^{\frac{1}{\sin \pi x} \cdot \cos \pi x} = e^{-1}.$$

**【519】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}.$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{1+\sin x}{\tan x - \sin x}}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x - \sin x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x (1+\sin x)}} = e^0 = 1.$$

**【520】**  $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}.$



提示 注意

$$\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a}}\right)^{\frac{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a} \cdot \frac{\sin x - \sin a}{x-a} \cdot \frac{1}{\sin a}},$$

仿 515 题, 并利用 482 题的结果 ( $a \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a}}\right)^{\frac{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a} \cdot \frac{\sin x - \sin a}{x-a} \cdot \frac{1}{\sin a}} \\ &= e^{\cot a *}) \quad (a \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

\* ) 利用 482 题的结果.

$$\text{【521】 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

提示 注意

$$\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos 2x}}\right)^{\frac{\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos 2x} \cdot \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 \cos 2x}},$$

及  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \frac{3}{2}$ , 并仿 515 题的解法.

$$\text{解 } \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos 2x}}\right)^{\frac{\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos 2x} \cdot \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 \cos 2x}}.$$

因为

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \frac{\cos x + 1 - 2\cos^2 x}{x^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2} (1 + 2\cos x) = \frac{1 + 2\cos x}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \rightarrow \frac{3}{2} \quad (x \rightarrow 0),$$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{【522】 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + \tan x - 1)^{\frac{1}{\tan x - 1} \cdot \frac{-2\tan x}{\tan x + 1}} = e^{-1}.$$

$$\text{【523】 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cot^2 x)^{-\frac{\tan x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cot^2 x)^{\frac{1}{\cot^2 x} \cdot \frac{-\cot x}{2}} = e^0 = 1.$$

$$\text{【524】 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]^{\cot x}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right)^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{1 + \tan x}{-2\tan x}}\right)^{-\frac{1 + \tan x}{2\tan x} \cdot \left(\frac{-2}{1 + \tan x}\right)} = e^{-2}.$$

$$\text{【525】 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x.$$

$$\text{解 } \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x = \left[1 + \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1} \cdot x(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1)}.$$

因为

$$x(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - \frac{2\sin \frac{1}{2x} \sin \frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x} \cdot 2} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty),$$



所以,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e$ .

【526】  $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$ .

解题思路 将式  $\sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$  化为  $e^{\frac{1}{x} \ln[\cos \sqrt{x}-1]+1]}$ . 并利用 474 题的结果及  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ .

解  $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x} \ln \cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(\cos \sqrt{x}-1)+1}{\cos \sqrt{x}-1} (\cos \sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{-\frac{1}{x} \cdot 2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$

\* ) 原题为  $x \rightarrow 0$ , 应改为  $x \rightarrow +0$ .

\* \* ) 利用结果  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} = \ln e = 1$ .

【527】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+x}{n-1} \right)^n$ .

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+x}{n-1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{n-1}{x+1}} \right)^{\frac{n-1}{x+1} \cdot (x+1)+1} = e^{x+1}.$

【528】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}$ .

提示  $\cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} = \left( 1 + \tan^2 \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{-\frac{n}{2}}.$

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \tan^2 \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{-\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \tan^2 \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{\frac{1}{\tan^2 \frac{x}{\sqrt{n}}} \cdot \left( \frac{\tan \frac{x}{\sqrt{n}}}{\frac{x}{\sqrt{n}}} \right)^2 \cdot \left( -\frac{x^2}{2} \right)} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$

【529】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$

【530】  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x].$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \ln e = 1.$

【531】  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad (a > 0).$

解  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{\frac{x}{a} - 1} = \lim_{x \rightarrow a} \ln \left( 1 + \frac{1}{\frac{x}{a} - 1} \right)^{\frac{x}{a} - 1} = \ln e^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}.$

【532】  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x].$

提示  $\sin \ln(x+1) - \sin \ln x = 2 \cos \frac{\ln(x+1) + \ln x}{2} \sin \frac{\ln(x+1) - \ln x}{2}$

及  $\ln(x+1) - \ln x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$

解  $\sin \ln(x+1) - \sin \ln x = 2 \cos \frac{\ln(x+1) + \ln x}{2} \sin \frac{\ln(x+1) - \ln x}{2}.$

因为

$$\ln(x+1) - \ln x = \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

所以,  $\sin \frac{\ln(x+1) - \ln x}{2} \rightarrow 0;$

又因  $\cos \frac{\ln(x+1) + \ln x}{2}$  为有界函数, 所以,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x] = 0.$



【533】  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x + \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{10\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}\right)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)}{10 + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}\right)} = \frac{1}{5}.$

【534】  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \lg \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2} \right).$

解  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \lg \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2} \right) = \lg \frac{1}{100} = -2.$

【535】  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}.$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln(2e^{-3x} + 1)}{2x + \ln(3e^{-2x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x} \ln(2e^{-3x} + 1)}{2 + \frac{1}{x} \ln(3e^{-2x} + 1)} = \frac{3}{2}.$

【536】  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}.$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln x + \ln(x^{-\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{6}})}{\frac{1}{3}\ln x + \ln(x^{-\frac{1}{3}} + 1 + x^{-\frac{1}{12}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln(x^{-\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{6}})}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln(x^{-\frac{1}{3}} + 1 + x^{-\frac{1}{12}})}$   
 $= \frac{3}{2}.$

【537】  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lg(x+h) + \lg(x-h) - 2\lg x}{h^2} \quad (x > 0).$

解  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lg(x+h) + \lg(x-h) - 2\lg x}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lg(x^2 - h^2) - \lg x^2}{h^2}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{x^2} \lg \left( 1 - \frac{h^2}{x^2} \right) \right] = -\frac{1}{x^2} \lg e.$

【538】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)}{\sin bx}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[ 1 + \left( \tan\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\sin bx}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[ 1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)} \right]^{\frac{1}{\sin bx}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[ 1 + \frac{\sqrt{2} \sin ax}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)} \right]^{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)}{\sqrt{2} \sin ax} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)} \cdot \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{bx}{\sin bx} \cdot \frac{a}{b}} = \ln e^{\frac{2a}{b}} = \frac{2a}{b}.$

【539】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln \cos ax}{\cos ax - 1} \cdot \frac{\cos bx - 1}{\ln \cos bx} \cdot \frac{\cos ax - 1}{\cos bx - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{2 \sin^2 \frac{bx}{2}} = \frac{a^2}{b^2}.$



【540】<sup>+</sup>  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \ln \frac{nx + \sqrt{1-n^2x^2}}{x + \sqrt{1-x^2}} \right).$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \ln \frac{nx + \sqrt{1-n^2x^2}}{x + \sqrt{1-x^2}} \right) = \ln 1 = 0.$

【541】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0).$

提示 令  $a^x - 1 = y.$

解 设  $a^x - 1 = y,$  则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

【542】  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0).$

提示  $\frac{a^x - x^a}{x - a} = a^a \cdot \frac{\left[ a^{x-a} - \left( \frac{x}{a} \right)^a \right]}{x - a} = a^a \cdot \frac{a^{x-a} - 1}{x - a} - a^a \cdot \frac{e^{a \ln \frac{x}{a}} - 1}{a \ln \frac{x}{a}} \cdot \frac{a \ln \left( 1 + \frac{x-a}{a} \right)}{x - a}.$  并利用 541 题

及 529 题的结果.

解  $\frac{a^x - x^a}{x - a} = \frac{a^a \left[ a^{x-a} - \left( \frac{x}{a} \right)^a \right]}{x - a} = a^a \cdot \frac{a^{x-a} - 1}{x - a} - a^a \cdot \frac{\left( \frac{x}{a} \right)^a - 1}{x - a}$   
 $= a^a \frac{a^{x-a} - 1}{x - a} - a^a \frac{e^{a \ln \frac{x}{a}} - 1}{a \ln \frac{x}{a}} \cdot \frac{a \ln \left( 1 + \frac{x-a}{a} \right)}{x - a},$

当  $x \rightarrow a$  时, 等式第一项趋向  $a^a \ln a$ , 而第二项趋向  $a^a \cdot 1 \cdot 1 = a^a$ , 所以,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} = a^a \ln a - a^a = a^a \ln \frac{a}{e}.$$

【543】  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} \quad (a > 0).$

解  $\frac{x^x - a^a}{x - a} = a^a \cdot \frac{e^{x \ln x - a \ln a} - 1}{x \ln x - a \ln a} \cdot \frac{x \ln x - a \ln a}{x - a}.$

而当  $x \rightarrow a$  时,

$$\frac{x \ln x - a \ln a}{x - a} = \frac{x \ln x - x \ln a}{x - a} + \ln a = \frac{x}{a} \cdot \frac{\ln \left( 1 + \frac{x-a}{a} \right)}{\frac{x-a}{a}} + \ln a \rightarrow 1 + \ln a = \ln ea.$$

又  $\frac{e^{x \ln x - a \ln a} - 1}{x \ln x - a \ln a} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow a),$  所以,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} = a^a \ln ea.$

【544】  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\left( 1 + \frac{x}{e^x} \right)^{\frac{x}{x}} \cdot e^{-x}} = e \cdot e = e^2.$

【545】  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+x \cdot 2^x}{1+x \cdot 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解  $\left( \frac{1+x \cdot 2^x}{1+x \cdot 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \left( 1 + \frac{1}{\frac{1+x \cdot 3^x}{x(2^x - 3^x)}} \right)^{\frac{1+x \cdot 3^x}{x(2^x - 3^x)} \cdot \frac{2^x - 3^x}{x(1+x \cdot 3^x)}}.$

因为

$$\frac{2^x - 3^x}{x(1+x \cdot 3^x)} = \frac{1}{1+x \cdot 3^x} \cdot \left( \frac{2^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x} \right) \rightarrow \ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{2}{3} \quad (x \rightarrow 0),$$



所以,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+x \cdot 2^x}{1+x \cdot 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\ln \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$ .

\* ) 利用 541 题的结果.

**【546】**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right)$ .

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \tan \frac{1}{n}}{1 - \tan \frac{1}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{1 - \tan \frac{1}{n}} \right)^{\frac{1 - \tan \frac{1}{n}}{2 \tan \frac{1}{n}} \cdot \frac{2 \tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1 - \tan \frac{1}{n}}} = e^2$ .

**【547】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\beta x} [e^{(\alpha-\beta)x} - 1]}{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} x \sin \frac{\alpha-\beta}{2} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(\alpha-\beta)x} - 1}{(\alpha-\beta)x} \cdot \frac{\frac{\alpha-\beta}{2} x}{\sin \frac{\alpha-\beta}{2} x} \cdot \frac{e^{\beta x}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2} x} = \ln e^{\ast} = 1$ .

\* ) 利用 541 题的结果.

**【548】**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^a}{x^\beta - a^\beta} \quad (a > 0)$ .

解  $\frac{x^a - a^a}{x^\beta - a^\beta} = a^{a-\beta} \cdot \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^a - 1}{\left(\frac{x}{a}\right)^\beta - 1} = a^{a-\beta} \cdot \frac{e^{a \ln \frac{x}{a}} - 1}{a \ln \frac{x}{a}} \cdot \frac{\beta \ln \frac{x}{a}}{e^{\beta \ln \frac{x}{a}} - 1} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$ .

当  $x \rightarrow a$  时,  $\ln \frac{x}{a} \rightarrow 0$ , 于是上式趋向  $\frac{\alpha}{\beta} a^{a-\beta}$ , 即

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^a}{x^\beta - a^\beta} = \frac{\alpha}{\beta} a^{a-\beta} \quad (\beta \neq 0).$$

**【549】**  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} \quad (a > 0)$ .

提示  $\frac{a^x - a^b}{x - b} = a^b \cdot \frac{a^{x-b} - 1}{x - b}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b} \left( a^b \cdot \frac{a^{x-b} - 1}{x - b} \right) = a^b \ln a^{\ast}$ .

\* ) 利用 541 题的结果.

**【550】**  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} \quad (a > 0)$ .

提示  $\frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} = a^{x-h} \left( \frac{a^h - 1}{h} \right)^2$ .

解  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( a^x \cdot \frac{a^h + a^{-h} - 2}{h^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x}{a^h} \left( \frac{a^h - 1}{h} \right)^2 = a^x \ln^2 a^{\ast}$ .

\* ) 利用 541 题的结果.

**【551】**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x+a} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1 + \frac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a} + a} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{b} + b}}{\left(1 + \frac{a+b}{x}\right)^{\frac{x}{a+b} [2(a+b)] + (a+b)}}$   
 $= \frac{e^a \cdot e^b}{e^{2(a+b)}} = e^{-(a+b)}.$

**【552】**  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) \quad (x > 0)$ .



提示 利用 541 题的结果.

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln x^{*}).$$

\* ) 利用 541 题的结果.

$$\text{【553】 } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) \quad (x > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n+1}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n+1}} [x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1]}{\frac{1}{n(n+1)} + \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2 + n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)} + \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2 + n} \right)} \right] \\ &= \ln x. \end{aligned}$$

$$\text{【554】 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a} \right)^n \quad (a > 0, b > 0).$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{a}{b^{\frac{1}{n}} - 1}} \right)^{\frac{a}{b^{\frac{1}{n}} - 1} \cdot \frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{a}} = e^{\frac{1}{a} \ln b} = \sqrt[a]{b}.$$

$$\text{【555】 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \quad (a > 0, b > 0).$$

$$\text{提示 注意 } \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = \left[ 1 + \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right) \right]^{\left( \frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1} \right) \cdot n \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right)}, \text{ 及}$$

$$n \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2} [n(\sqrt[n]{a} - 1) + n(\sqrt[n]{b} - 1)],$$

仿 515 题, 并利用 552 题的结果.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right)^{\left( \frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1} \right) \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right) n} = e^{\frac{1}{2} (\ln a + \ln b)^{*})} = \sqrt{ab} \\ &\quad (a > 0, b > 0). \end{aligned}$$

\* ) 利用 552 题的结果.

$$\text{【556】 } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

提示 仿 555 题, 并利用 541 题的结果.

解 利用 555 题的方法:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1 \right)^{\frac{1}{\frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1} \cdot \frac{a^x - 1 + b^x - 1 + c^x - 1}{3x}} = \sqrt[3]{abc}.$$

$$\text{【557】 } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

解 利用 541 题的结果, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1} - a - b - c}{x(a + b + c)} &= \frac{1}{a + b + c} \lim_{x \rightarrow 0} \left( a \cdot \frac{a^x - 1}{x} + b \cdot \frac{b^x - 1}{x} + c \cdot \frac{c^x - 1}{x} \right) \\ &= \ln(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}, \end{aligned}$$

因而,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1 \right)^{\left( \frac{1}{\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1} \right) \cdot \frac{1}{x} \left( \frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1 \right)}$$



$$= (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}.$$

**【558】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0).$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{1}{\frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} - a^x - b^x} \right)^{\frac{a^x + b^x}{a^{x^2} + b^{x^2} - a^x - b^x} \cdot \left[ x \left( \frac{a^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{b^{x^2} - 1}{x^2} \right) - \frac{a^x - 1}{x} - \frac{b^x - 1}{x} \right] \cdot \frac{1}{a^x + b^x}}$

$$= e^{-\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

**【559】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} \quad (a > 0, b > 0).$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{a^{x^2} - 1}{x^2} - \frac{b^{x^2} - 1}{x^2} \right) \cdot \frac{1}{\left( \frac{a^x - 1}{x} - \frac{b^x - 1}{x} \right)^2} \right]$

$$= (\ln a - \ln b) \cdot \frac{1}{(\ln a - \ln b)^2} = \frac{1}{\ln a - \ln b} = \left( \ln \frac{a}{b} \right)^{-1}.$$

**【560】**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a} \quad (a > 0).$

解  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a} = \lim_{x \rightarrow a} \left( a^{x^a} \cdot \frac{a^{a^x - x^a} - 1}{a^x - x^a} \right) = a^{a^a} \ln a.$

**【561】** (1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$ .

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\ln(1+3^x)}{3^x} \cdot \frac{2^x}{\ln(1+2^x)} \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^{-x} \right] = 1 \cdot 1 \cdot 0^{+} = 0.$

\* ) 利用 529 题的结果.

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln 3 + \ln(1+3^{-x})}{x \ln 2 + \ln(1+2^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3 + \frac{1}{x} \cdot \ln(1+3^{-x})}{\ln 2 + \frac{1}{x} \cdot \ln(1+2^{-x})} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$

**【562】**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right).$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right)}{\frac{3}{x}} \cdot \frac{x \ln 2 + \ln(2^{-x} + 1)}{\frac{x}{3}} \right] = 3 \ln 2 = \ln 8.$

**【563】**  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \lg_x 2.$

解  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \lg_x 2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x} \cdot \ln 2 = -\ln 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln[1+(x-1)]} = -\ln 2. *$

\* ) 利用 529 题的结果.

**【564】** 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 0, n > 0).$$

证明思路 注意到当  $x \geq 1$  时, 存在唯一的正整数  $k$ , 使得  $k \leq x < k+1$ . 于是, 当  $n > 0$  时, 有  $\frac{k^n}{a^{k+1}} < \frac{x^n}{a^x}$

$< \frac{(k+1)^n}{a^k}$ , 利用 60 题的结果.

证 当  $x \geq 1$  时, 存在唯一的正整数  $k$ , 使

$$k \leq x < k+1.$$

于是当  $n > 0$  时, 我们有



$$\frac{x^n}{a^x} < \frac{(k+1)^n}{a^k} \quad \text{及} \quad \frac{x^n}{a^x} > \frac{k^n}{a^{k+1}} = \frac{k^n}{a^k} \cdot \frac{1}{a}.$$

因为当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $k \rightarrow +\infty$ , 所以有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^n}{a^k} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^n}{a^{k+1}} \cdot a = 0 \cdot a^{**} = 0$$

及

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k^n}{a^{k+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k^n}{a^k} \cdot \frac{1}{a} = 0 \cdot \frac{1}{a}^{**} = 0.$$

于是,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ .

\* ) 利用 60 题的结果.

【565】 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\epsilon} = 0 \quad (a > 1, \epsilon > 0).$$

证明思路 令  $y = \log_a x$ , 则  $x = a^y$ , 且当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow +\infty$ . 由  $\frac{\log_a x}{x^\epsilon} = \left(\frac{y}{a^y}\right)^\epsilon$ , 并利用 564 题的结果, 命题即获证.

证 设  $\log_a x = y$ , 则  $x = a^y$ , 且当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow +\infty$ . 于是,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\epsilon} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{(a^y)^\epsilon} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{a^y}\right)^\epsilon = 0^{**},$$

即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\epsilon} = 0.$$

\* ) 利用 564 题的结果.

求下列极限:

【566】 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$ .

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(1 + x^2 e^{-x})}{2x + \ln(1 + x^4 e^{-2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\ln(1 + x^2 e^{-x})}{x^2 e^{-x}} \cdot x e^{-x}}{2 + \frac{\ln(1 + x^4 e^{-2x})}{x^4 e^{-2x}} \cdot x^3 e^{-2x}} = \frac{1}{2};$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\ln(1 + x^2 e^{-x})}{x}}{2 + \frac{\ln(1 + x^4 e^{-2x})}{x}} = \frac{1}{2},$$

其中利用了结果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n a^{-x} = 0$  ( $n > 0, a > 1$ ), 因而,

$$x^2 e^{-x} \rightarrow 0 \quad \text{及} \quad x^4 e^{-2x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

【567】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x e^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x e^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + x e^x)}{x e^x} \cdot x e^x}{\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)}{\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \sqrt{1 + x^2} = 1.$$

【568】  $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x].$



解  $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{(x+2)^{x+2} \cdot x^x}{(x+1)^{2x+2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2+2}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x+2}} = \ln \frac{e^2}{e^2} = 0.$$

【569】  $\lim_{x \rightarrow +0} \left[ \ln(x \ln a) \cdot \ln \left( \frac{\ln a x}{\ln \frac{x}{a}} \right) \right] \quad (a > 1).$

解  $\lim_{x \rightarrow +0} \left[ \ln(x \ln a) \cdot \ln \left( \frac{\ln a x}{\ln \frac{x}{a}} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +0} \ln \left( \frac{\ln a + \ln x}{\ln x - \ln a} \right)^{\ln x + \ln(\ln a)}$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \ln \left( 1 + \frac{2 \ln a}{\ln x - \ln a} \right)^{\frac{\ln x - \ln a}{2 \ln a} \cdot 2 \ln a \cdot \frac{\ln x + \ln(\ln a)}{\ln x - \ln a}} = \ln e^{\ln a^2} = \ln a^2.$$

【570】  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x+1}{x-1} \right).$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x+1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left( 1 + \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right)}{\ln^2 \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left\{ \ln \left[ 1 + \frac{2}{(x + \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})} \right] \right\}^{\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{2}}}}{\ln^2 \left[ \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right]}$$

$$\cdot \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{(x + \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}$$

$$\frac{1}{\left( \frac{2}{x-1} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2}{2(x + \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( 1 - \frac{1}{x} \right)^2}{2 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)} = \frac{1}{8}.$$

【571】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{(e^{x^2} - 1)(\sqrt{1+x \sin x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} (1 + \sqrt{1+x \sin x})} = \frac{1}{2}.$

【572】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x(e^x + e^{-x})}{2} \sin \frac{x(e^x - e^{-x})}{2}}{x^3}$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin \frac{x(e^x + e^{-x})}{2}}{\frac{x(e^x + e^{-x})}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x(e^x - e^{-x})}{2}}{\frac{x(e^x - e^{-x})}{2}} \cdot \frac{x^2(e^{4x} - 1)}{4x^3 e^{2x}} \right]$$



$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{4x} - 1}{4x} \cdot \frac{1}{e^{2x}} \right) = -2.$$

**【573】**  $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^{\frac{x}{x+1}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^{\frac{x}{x+1}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left[ 1 + 2(e^{\frac{x}{x+1}} - 1) \right]^{\frac{1}{2(e^{\frac{x}{x+1}} - 1)}} \right\}^{\frac{2(x^2+1)}{x+1} \cdot \frac{e^{\frac{x}{x+1}} - 1}{\frac{x}{x+1}}} = e^2.$

**【574】**  $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\sec \frac{\pi x}{2}}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\sec \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} [1 + (-x+1)]^{\frac{1}{1-x} \cdot \frac{\pi(x-1)}{\sin \frac{\pi(x-1)}{2}} \cdot \frac{2}{\pi}} = e^{\frac{2}{\pi}}.$

**【575】**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^{\alpha} x)(1 - \sin^{\beta} x)}} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$

解  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^{\alpha} x)(1 - \sin^{\beta} x)}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{(\alpha+\beta) \cdot \ln \sin x}}{\sqrt{(1 - e^{\alpha \cdot \ln \sin x})(1 - e^{\beta \cdot \ln \sin x})}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[ \left( \frac{1 - e^{(\alpha+\beta) \cdot \ln \sin x}}{(\alpha+\beta) \cdot \ln \sin x} \right) \cdot \left( \frac{\alpha \cdot \ln \sin x}{1 - e^{\alpha \cdot \ln \sin x}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{\beta \cdot \ln \sin x}{1 - e^{\beta \cdot \ln \sin x}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{(\alpha+\beta) \cdot \ln \sin x}{\sqrt{\alpha\beta} \cdot \ln \sin x} \right) \right]$   
 $= \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}.$

注 其中  $x$  在  $\frac{\pi}{2}$  的附近变化, 故  $\sin x > 0$ .

**【576】<sup>+</sup>**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}^2 x}{\ln(\text{ch} 3x)}$  (参见 340 题).

解题思路 由  $\text{sh} x$  及  $\text{ch} x$  的定义, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh}^2 x}{\ln(\text{ch} 3x)} &= \frac{(e^{2x} - 1)^2}{\ln \left[ 1 + \frac{1}{2} (e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2 \right] \cdot 4e^{2x}} \\ &= \left( \frac{e^{2x} - 1}{2x} \right)^2 \cdot \left( \frac{3x}{e^{3x} - 1} \right)^2 \cdot \frac{\frac{1}{2} (e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2}{\ln \left[ 1 + \frac{1}{2} (e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2 \right]} \cdot \frac{2}{9} e^x, \end{aligned}$$

利用 541 题及 529 题的结果, 即知所求极限为  $\frac{2}{9}$ .

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}^2 x}{\ln(\text{ch} 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(e^{2x} - 1)^2}{4e^{2x}}}{\ln \left[ 1 + \frac{1}{2} (e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2 \right]}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{e^{2x} - 1}{2x} \right)^2 \cdot \frac{\frac{1}{2} (e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2 \cdot e^x}{\ln \left[ 1 + \frac{1}{2} (e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2 \right]} \cdot \left( \frac{3x}{e^{3x} - 1} \right)^2 \cdot \frac{2}{9} \right] = \frac{2}{9}.$

**【577】**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh} \sqrt{x^2+x} - \text{sh} \sqrt{x^2-x}}{\text{ch} x}.$

解  $\text{sh} \sqrt{x^2+x} - \text{sh} \sqrt{x^2-x} = 2\text{sh} \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}}{2} \cdot \text{ch} \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}{2}.$

因为

$$\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow +\infty),$$



$$\frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}}}{e^x + e^{-x}} \rightarrow 1,$$

所以,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x^2+x} - \operatorname{sh} \sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch} x} = 2 \operatorname{sh} \frac{1}{2}.$$

**【578】**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln \operatorname{ch} x).$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln \operatorname{ch} x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \ln \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + \ln 2 - \ln(1 + e^{2x})]$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln 2 - \ln(e^{-2x} + 1)] = \ln 2.$

**【579】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{th} x}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{th} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin 2x} - e^{\sin x})(e^{2x} + 1)}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2} \right) (e^{2x} + 1)}{\frac{e^{2x} - 1}{2x}}$   
 $= \frac{2 \left( 1 - \frac{1}{2} \right)}{1} = 1.$

**【580】**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^2}.$

解  $\left( \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^2} = \left( \frac{e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}}}{2 \cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^2} = \left[ 1 + \frac{1}{\frac{e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}} - 2 \cos \frac{\pi}{n}}{2 \cos \frac{\pi}{n}}} \right]^{\frac{2 \cos \frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}} - 2 \cos \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{n^2 (e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}} - 2 \cos \frac{\pi}{n})}{2 \cos \frac{\pi}{n}}},$

因为

$$\begin{aligned} n^2 \left( e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}} - 2 \cos \frac{\pi}{n} \right) &= n^2 \left[ (e^{\frac{\pi}{2n}} - e^{-\frac{\pi}{2n}})^2 + 2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \right] \\ &= n^2 \left[ (e^{\frac{\pi}{2n}} - e^{-\frac{\pi}{2n}})^2 + 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \right] \\ &= \left( \frac{e^{\frac{\pi}{2n}} - 1}{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2n}} - 1}{-\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{2} \right)^2 + \pi^2 \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right)^2 \rightarrow 2\pi^2 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^2} = e^{\pi^2}.$

**【581】**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x}.$

解  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x} = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$

**【582】**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x} - x).$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$

**【583】**  $\lim_{x \rightarrow 2} \arctan \frac{x-4}{(x-2)^2}.$



解  $\lim_{x \rightarrow 2} \arctan \frac{x-4}{(x-2)^2} = -\frac{\pi}{2}.$

【584】  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

解  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arccot}(-1) = \frac{3}{4}\pi.$

【585】  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan(x+h) - \arctan x}{h}.$

解  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan(x+h) - \arctan x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\arctan \frac{h}{1+x(x+h)}}{\frac{h}{1+x(x+h)}} \cdot \frac{1}{1+x(x+h)} \right) = \frac{1}{1+x^2} *).$

\* ) 其中利用了结果:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$

【586】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln \left( 1 + \frac{2x}{1-x} \right)}{\frac{2x}{1-x}} \cdot \frac{\frac{2x}{2-x^2}}{\arctan \frac{2x}{2-x^2}} \cdot \frac{2-x^2}{1-x} \right] = 2.$

【587】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \arctan \frac{1}{n(x^2+1)+x} \cdot \tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2n} \right) \right].$

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \arctan \frac{1}{n(x^2+1)+x} \cdot \tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2n} \right) \right]$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\arctan \frac{1}{n(x^2+1)+x}}{\frac{1}{n(x^2+1)+x}} \cdot \frac{n}{n(x^2+1)+x} \cdot \left( 1 + \frac{1}{1 - \tan \frac{x}{2n}} \right)^{\frac{1 - \tan \frac{x}{2n}}{2 \tan \frac{x}{2n}} \cdot \frac{\tan \frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}} \cdot \frac{x}{1 - \tan \frac{x}{2n}}} \right] = \frac{e^x}{1+x^2}.$

【588】  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1} \right).$

解  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \arctan \frac{1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\arctan \frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x+1}} \cdot \frac{x}{2x+1} \right) = \frac{1}{2}.$

【589】  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right).$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = 1 *).$

\* ) 其中利用了结果:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$

【590】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\csc(\pi \sqrt{1+n^2})}.$

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\csc(\pi \sqrt{1+n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\frac{n}{(-1)^n} \cdot \frac{(-1)^n}{n \sin \pi \sqrt{1+n^2}}}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\frac{n}{(-1)^n} \cdot \frac{-1}{n \sin(n\pi - \pi \sqrt{1+n^2})}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\frac{n}{(-1)^n} \cdot \frac{n\pi - \pi \sqrt{1+n^2}}{\sin(n\pi - \pi \sqrt{1+n^2})} \cdot \frac{1}{n(\pi \sqrt{1+n^2} - n\pi)}}$



$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1+n}}{\pi n(n^2+1-n^2)}} = e^{\frac{2}{\pi}} \quad (n\pi - \pi\sqrt{1+n^2} \rightarrow 0).$$

**【591】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}}.$

提示 令  $y = \frac{1}{x}$ , 并利用 564 题的结果.

解 设  $y = \frac{1}{x}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{100}}{e^{y^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(y^2)^{50}}{e^{y^2}} = 0^{*})$ .

\* ) 利用 564 题的结果.

**【592】**  $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x.$

提示 令  $y = \frac{1}{x}$ , 并利用 565 题的结果.

解 设  $y = \frac{1}{x}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln y}{y} = 0^{*})$ .

\* ) 利用 565 题的结果.

**【593】** (1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x);$  (2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x).$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = +\infty;$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{1}{2}.$

**【594】** (1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2});$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}).$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1}}^{*}) = -1;$

\* ) 当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $x = -\sqrt{x^2}.$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1}}^{*}) = 1.$

\* ) 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $x = \sqrt{x^2}.$

**【595】** (1)  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \arctan \frac{1}{1-x};$  (2)  $\lim_{x \rightarrow 1+0} \arctan \frac{1}{1-x}.$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \arctan \frac{1}{1-x} = \frac{\pi}{2};$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 1+0} \arctan \frac{1}{1-x} = -\frac{\pi}{2}.$

**【596】** (1)  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}};$  (2)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1;$  (2)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0.$

**【597】** (1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x};$  (2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}.$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} \cdot \frac{e^x}{x} \right] = 0;$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{\ln(e^{-x}+1)}{x} \right] = 1.$



【598】 证明:

(1) 当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2+0$ ;

(2) 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2-0$ .

证 (1) 当  $x < 0$  时, 及当  $|x|$  充分大以后,  $\frac{2x}{1+x} > 2$ . 于是, 当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2+0$ ;

(2) 当  $x > 0$  时,  $0 < \frac{2x}{1+x} < 2$ . 于是, 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2-0$ .

【599】 证明:

(1) 当  $x \rightarrow -0$  时,  $2^x \rightarrow 1-0$ ;

(2) 当  $x \rightarrow +0$  时,  $2^x \rightarrow 1+0$ .

证 (1) 当  $x < 0$  时,  $0 < 2^x < 1$ . 于是, 当  $x \rightarrow -0$  时,  $2^x \rightarrow 1-0$ ;

(2) 当  $x > 0$  时,  $2^x > 1$ . 于是, 当  $x \rightarrow +0$  时,  $2^x \rightarrow 1+0$ .

【600】 设  $f(x) = x + [x^2]$ , 求  $f(1)$ ,  $f(1-0)$ ,  $f(1+0)$ .

解  $f(1) = 2$ ;

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x + [x^2]) = 1 + 0 = 1;$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + [x^2]) = 1 + 1 = 2.$$

【601】 设  $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$ , 求  $f(n)$ ,  $f(n-0)$ ,  $f(n+0)$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ).

解  $f(n) = 0$ ;

$$f(n-0) = \lim_{x \rightarrow n-0} \operatorname{sgn}(\sin \pi x) = (-1)^{n-1};$$

$$f(n+0) = \lim_{x \rightarrow n+0} \operatorname{sgn}(\sin \pi x) = (-1)^n.$$

求:

【602】  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ .

解 因为  $\sqrt{\cos \frac{1}{x}}$  为有界函数, 所以,  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = 0$ .

【603】  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right]$ .

提示 注意到当  $x \neq 0$  时, 有  $\frac{1}{x} - 1 < \left[ \frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$ .

解 因为

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[ \frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

当  $x > 0$  时

$$1 - x < x \left[ \frac{1}{x} \right] \leq 1,$$

当  $x < 0$  时

$$1 - x > x \left[ \frac{1}{x} \right] \geq 1,$$

于是,  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right] = 1$ .

【604】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$ .

解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1} - n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = 0$ .

【605】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n})$ .



解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2+n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi \sqrt{n^2+n})] = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \{1 - \cos[2\pi(\sqrt{n^2+n} - n)]\} = 1.$

【606】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_n.$

解 先设  $0 \leq x \leq \pi$ , 这时,  $0 \leq \sin x \leq x$ ,  $0 \leq \sin(\sin x) \leq \sin x$ , 依次类推. 用数学归纳法, 即可证得

$$0 \leq \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_n \leq \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_{n-1},$$

这说明  $\underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_n$  随着  $n$  的增大而单调减少, 于是, 由其有界性知极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_n = \mu$$

存在有限, 且  $0 \leq \mu \leq 1$ , 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_n = \sin(\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_{n-1})$$

即  $\sin \mu = \mu$ , 故  $\mu = 0$ .

同法可证, 当  $\pi < x \leq 2\pi$  时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_n = 0.$$

再利用  $\sin x$  的周期性(周期为  $2\pi$ ), 得知对任一  $x$  值, 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_n = 0.$$

【607】 设  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$  及  $\lim_{x \rightarrow A} \psi(x) = B$ , 则由此是否可推出  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(\varphi(x)) = B$ ?

研究例子:  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} (p, q \text{ 是互素的整数}), \\ 0, & x \text{ 为无理数}, \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

并且  $x \rightarrow 0$ .

解 不一定. 例如, 对于函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} (p, q \text{ 是互素的整数}), \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

及

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0 (=A) \quad \text{及} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 1,$$

但是, 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(\varphi(x))$  却不存在. 事实上, 当  $x$  以一串无理数列  $x_n$  趋近于零时, 有  $\varphi(x_n) = 0$ , 因此  $\psi(\varphi(x_n)) = 0 (n=1, 2, \cdots)$ ; 而当  $x$  以一串有理数列  $x'_n$  趋近于零时,  $\varphi(x'_n) \neq 0$ , 因此,  $\psi(\varphi(x'_n)) = 1 (n=1, 2, \cdots)$ .

由此可知, 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(\varphi(x))$  不存在.

【608】 证明柯西定理: 若函数  $f(x)$  定义于区间  $(a, +\infty)$ , 且在每一个有限的区间  $(a, b)$  内是有界的, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)],$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} \quad (f(x) \geq c > 0),$$

假定等式右端的极限都存在.

证 (1) 记  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = A$ . 任给  $\epsilon > 0$ , 必存在正数  $X_0 > a$ , 使当  $x \geq X_0$  时, 恒有

$$|f(x+1) - f(x) - A| < \frac{\epsilon}{3}.$$



现设  $x > X_0 + 1$ . 于是, 恰有一个正整数  $n$  (依赖于  $x$ ), 满足  $n \leq x - X_0 < n + 1$ . 令  $\tau = x - X_0 - n$ , 则  $0 \leq \tau < 1$ ,  $x = X_0 + \tau + n$ . 我们有

$$\frac{f(x)}{x} - A = \frac{n}{x} \left[ \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} - A \right] + \frac{f(X_0 + \tau)}{x} - \frac{(X_0 + \tau)A}{x}.$$

显然

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{x} \left[ \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} - A \right] \right| &\leq \left| \frac{f(X_0 + \tau + n) - f(X_0 + \tau)}{n} - A \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n [f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1) - A] \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1) - A| < \frac{1}{n} \cdot \frac{n\epsilon}{3} = \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

由假定,  $f(x)$  在  $X_0 \leq x < X_0 + 1$  上有界, 故存在正数  $X_1$ , 使当  $x > X_1$  时, 恒有

$$\left| \frac{f(X_0 + \tau)}{x} \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad (0 \leq \tau < 1);$$

另外, 显然存在正数  $X_2$ , 使当  $x > X_2$  时, 恒有

$$\left| \frac{(X_0 + 1)A}{x} \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

令  $X = \max\{X_0 + 1, X_1, X_2\}$ . 于是, 当  $x > X$  时, 必有

$$\left| \frac{f(x)}{x} - A \right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

由此可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A$ . 故(1)获证.

(2) 由假定,  $f(x) \geq c > 0$ . 记  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = A'$ . 显然  $A' \geq 0$ . 下证  $A' > 0$ . 事实上, 若  $A' = 0$ , 则存在正数

$X_0$ , 使当  $x \geq X_0$  时, 必  $0 < \frac{f(x+1)}{f(x)} < \frac{1}{2}$ . 于是,

$$0 < \frac{f(X_0 + n)}{f(X_0)} = \frac{f(X_0 + n)}{f(X_0 + n - 1)} \cdot \frac{f(X_0 + n - 1)}{f(X_0 + n - 2)} \cdot \dots \cdot \frac{f(X_0 + 1)}{f(X_0)} < \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

由此可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(X_0 + n) = 0$ , 此显然与  $f(x) \geq c > 0$  矛盾, 因此, 有  $A' > 0$ .

由于  $f(x) \geq c > 0$  且  $f(x)$  在每个有限区间  $(a, b)$  内有界, 故函数  $\ln f(x)$  在每个有限区间  $(a, b)$  内也有界, 并且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln f(x+1) - \ln f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{f(x+1)}{f(x)} = \ln A'.$$

于是, 将(1)的结果用于函数  $\ln f(x)$ , 即知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{x} = \ln A'.$$

故有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{\ln f(x)}]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln f(x)}{x}} = e^{\ln A'} = A'$ .

证毕.

**【609】** 证明: 若(1)函数  $f(x)$  定义于区域  $x > a$  内; (2)在每一个有限的区域  $a < x < b$  内是有界的; (3)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = +\infty$  (或  $-\infty$ ), 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad (\text{或 } -\infty).$$

**证** 只要证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = +\infty$  的情形, 这时要证  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  (对于  $-\infty$  的情形, 只

要考虑函数  $-f(x)$  即可归结为  $+\infty$  的情形). 任给  $G > 0$ . 必存在正数  $X_0 > a$ , 使当  $x \geq X_0$  时, 恒有

$$f(x+1) - f(x) > 4G.$$

现设  $x > 2(X_0 + 1)$ . 仿 608 题(1)的证明, 恰有一个正整数  $n$  (依赖于  $x$ ), 满足  $n \leq x - X_0 < n + 1$ . 令  $\tau = x$



$-X_0-n$ , 则  $0 \leq \tau < 1, x = X_0 + \tau + n$ . 由于  $n+1 > x - X_0 > X_0 + 2$ , 故  $n > X_0 + 1 > X_0 + \tau$ . 从而,  $2n > x$ , 即

$$\frac{n}{x} > \frac{1}{2}.$$

又, 我们有

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{n}{x} \cdot \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} + \frac{f(X_0 + \tau)}{x};$$

显然

$$\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)] > \frac{1}{n} \cdot 4nG = 4G,$$

故

$$\frac{n}{x} \cdot \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} > 2G.$$

由假定,  $f(x)$  在  $X_0 \leq x < X_0 + 1$  上有界, 故存在正数  $X_1$ , 使当  $x > X_1$  时, 恒有

$$\left| \frac{f(X_0 + \tau)}{x} \right| < G.$$

令  $X = \max\{2(X_0 + 1), X_1\}$ , 则当  $x > X$  时, 恒有  $\frac{f(x)}{x} > G$ . 由此可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ .

证毕.

\* ) 原题条件(3)误写为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$ , 结论误写为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ . 例如, 按下式定义  $[0, +\infty)$  上的函数  $f(x)$ :

$$f(x) = \begin{cases} 2n, & 2n \leq x < 2n+1, \\ 0, & 2n+1 \leq x < 2n+2, \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

则显然  $f(x)$  满足原题的条件(1)和(2)(这时  $a=0$ ), 并且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$ ; 但显然  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq \infty$  (实际  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  不存在,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ,  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ ).

**【610】** 证明: 若(1)函数  $f(x)$  定义于区域  $x > a$  内; (2)在每一个有限的区域  $a < x < b$  内是有界的; (3)存在着有限的或无穷的(带确定符号的无穷, 即  $+\infty$  和  $-\infty$ ) \* ) 极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = l,$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

证 先证一条一般性的定理(Stolz 定理在函数情形的推广)若: (1)函数  $f(x)$  与  $g(x)$  都定义于区域  $x > a$  内; (2)  $f(x)$  与  $g(x)$  在每一个有限区域  $a < x < b$  内有界, 并且  $g(x)$  当  $x > a$  时满足  $g(x+1) > g(x)$  且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ; (3)存在极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} = l \quad (l \text{ 为有限数或为 } +\infty \text{ 或为 } -\infty);$$

$$\text{则必 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

证如下:

先证  $l$  为有限数. 任给  $\epsilon > 0$ . 存在正数  $X_0 > a$ , 使当  $x \geq X_0$  时, 恒有

$$\left| \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} - l \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

现设  $x > X_0 + 1$ . 于是, 恰有一个正整数  $n$  (依赖于  $x$ ), 使  $n \leq x - X_0 < n+1$ . 令  $\tau = x - X_0 - n$ , 则  $0 \leq \tau < 1, x = X_0 + \tau + n$ . 我们有

$$\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} - l$$



$$= \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} \cdot \left[ \frac{f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)}{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)} - l \right],$$

而

$$\left| \frac{f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)}{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

又由于

$$g(x) = g(X_0 + \tau + n) > g(X_0 + \tau + n - 1) > g(X_0 + \tau + n - 2) > \dots > g(X_0 + \tau),$$

从而,

$$\frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} > 0 \quad (k=1, 2, \dots, n);$$

由此可知

$$\left| \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

容易直接验证等式

$$\frac{f(x)}{g(x)} - l = \left[ 1 - \frac{g(X_0 + \tau)}{g(x)} \right] \cdot \left[ \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} - l \right] + \frac{f(X_0 + \tau) - lg(X_0 + \tau)}{g(x)}.$$

由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , 并且  $f(x)$  与  $g(x)$  都在  $X_0 \leq x < X_0 + 1$  上有界, 故必有正数  $X_1 > a$  存在, 使当  $x > X_1$  时, 恒有

$$\left| \frac{g(X_0 + \tau)}{g(x)} \right| < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{f(X_0 + \tau) - lg(X_0 + \tau)}{g(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

令  $X = \max\{X_0 + 1, X_1\}$ . 于是, 当  $x > X$  时, 恒有

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

由此可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ ,  $l$  为有限数获证.

下设  $l = +\infty$  (若  $l = -\infty$ , 则考虑函数  $-f(x)$  即可化为  $l = +\infty$  的情形). 任给  $G > 0$ , 存在正数  $X_0 > a$ , 使当  $x \geq X_0$  时, 恒有

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} > 4G.$$

当  $x > X_0 + 1$  时, 仿前一段之证, 有

$$\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} = \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} \cdot \frac{f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)}{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}$$

从而,

$$\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} > 4G \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} = 4G.$$

易知

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left[ 1 - \frac{g(X_0 + \tau)}{g(x)} \right] \cdot \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} + \frac{f(X_0 + \tau)}{g(x)}.$$

根据  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  以及  $f(x), g(x)$  在  $X_0 \leq x < X_0 + 1$  上的有界性, 可取正数  $X_1 > a$ , 使当  $x > X_1$  时, 恒有

$$\left| \frac{g(X_0 + \tau)}{g(x)} \right| < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{f(X_0 + \tau)}{g(x)} \right| < G.$$

令  $X = \max\{X_0 + 1, X_1\}$ . 于是, 当  $x > X$  时, 恒有

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2} \cdot 4G - G = G.$$

由此可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ . 所述一般性定理获证.



现在我们应用此一般定理来证明本题,在一般性定理中取 $g(x)=x^{n+1}$ .显然此 $g(x)$ 满足一般性定理的条件,并且

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{(n+1)x^n + \frac{1}{2}(n+1)nx^{n-1} + \cdots + (n+1)x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x+1)-f(x)}{x^n} \cdot \frac{1}{(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)nx^{-1} + \cdots + (n+1)x^{-n+1} + x^{-n}} \right] = \frac{l}{n+1}. \end{aligned}$$

由此,根据此一般性定理,即得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{n+1}$ .

证毕.

\* ) 原题所说的无穷,必须是带确定符号的无穷,即 $+\infty$ 或 $-\infty$ ;参看 609 题末尾加的注.

注 608 题的(1)和 609 题可直接从上述一般性定理推出.实际上,只需令 $g(x)=x$ ,由

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1)-f(x)]$$

即知.

**【611】** 证明:(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$ .

证 (1) 当  $x=0$  时是显然的;当  $x \neq 0$  时,令  $y_n = \frac{n}{x}$ ,由 71 题的结果,得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n \cdot x} = e^x;$$

(2) 当  $x=0$  时是显然的,我们先讨论  $x>0$  的情形.由牛顿二项式定理知

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &\leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

另一方面,当  $m>n$  时有

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m > 1 + x + \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \cdots + \frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right),$$

令  $m \rightarrow \infty$  ( $n$  保持不变),得

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x \quad (x>0).$$

由于

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) = 1 + (-1)^n \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2,$$

而由 61 题知,对固定的  $x$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ . 于是,对于  $x<0$ ,仍然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x \quad (x<0).$$

**【612】** 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!) = 2\pi$ .

提示 利用 72 题中的公式(1).

证 由 72 题



$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{\theta_k}{k!k},$$

其中  $0 < \theta_k < 1$ , 因而,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n!) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left[ 2\pi n! \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sin \left[ 2\pi \left( \frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right) \right]}{2\pi \left( \frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right)} \cdot 2\pi n \left( \frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right) \right\} = 2\pi. \end{aligned}$$

作下列函数的图像:

【613】 (1)  $y = 1 - x^{100}$ ; (2)  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{2n})$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ).

解 (1) 如图 1.238 所示. 它关于  $y$  轴对称.

$$(2) y = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{2n}) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1. \end{cases}$$

如图 1.239 所示.

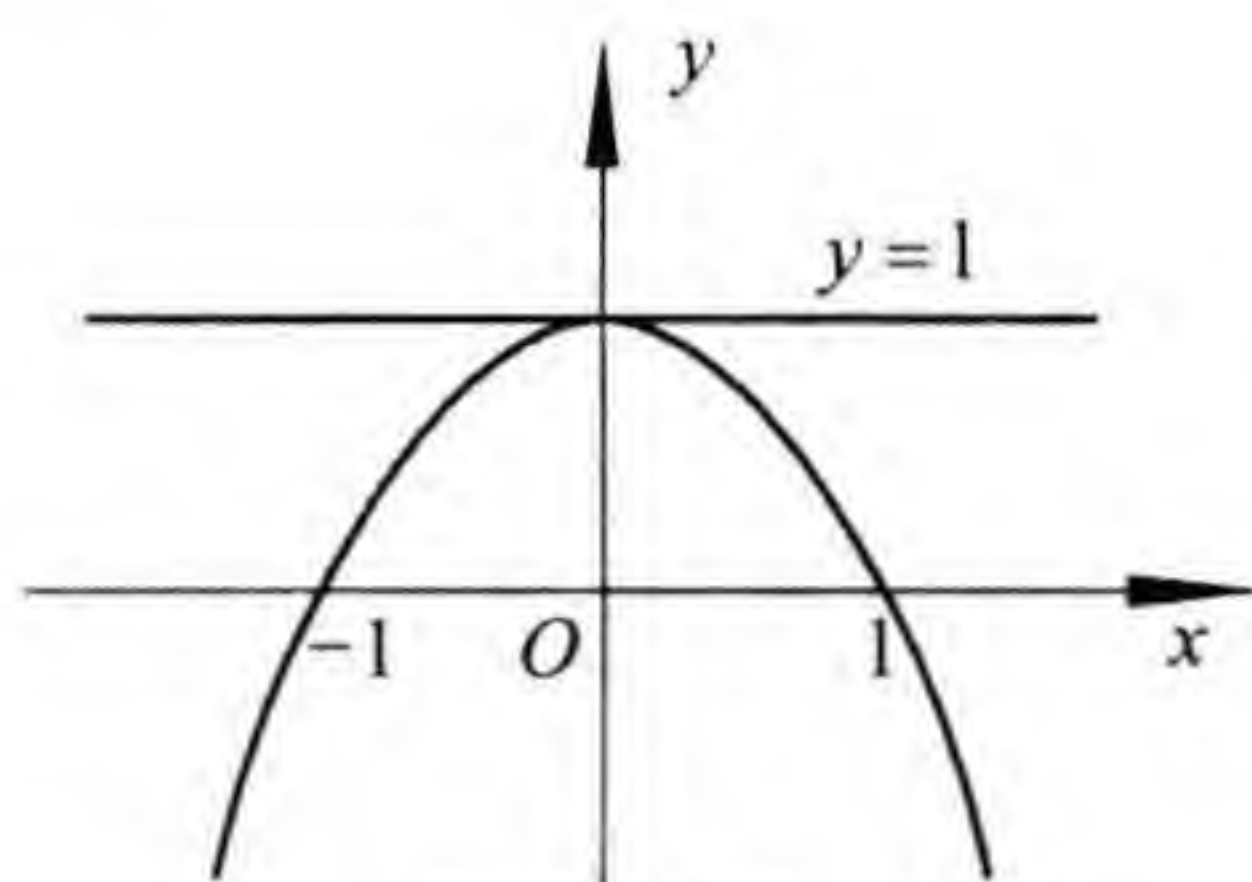


图 1.238

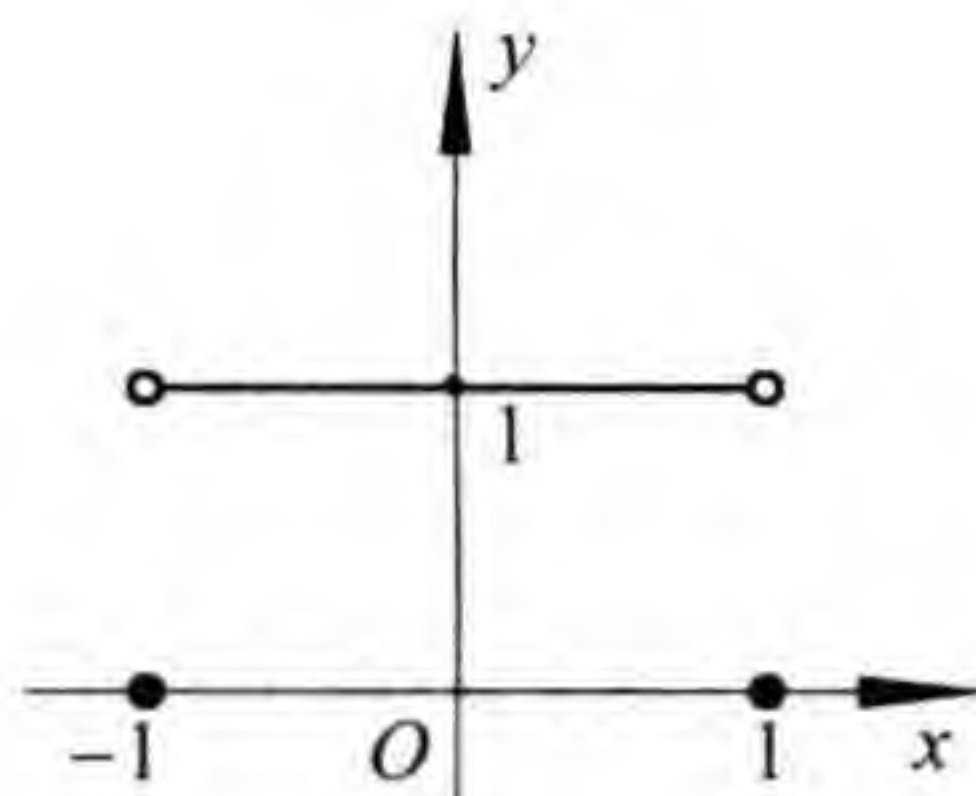


图 1.239

【614】 (1)  $y = \frac{x^{100}}{1 + x^{100}}$  ( $x \geq 0$ ); (2)  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1 + x^n}$  ( $x \geq 0$ ).

解 (1) 如图 1.240 所示.

$$(2) y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 1, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

如图 1.241 所示.

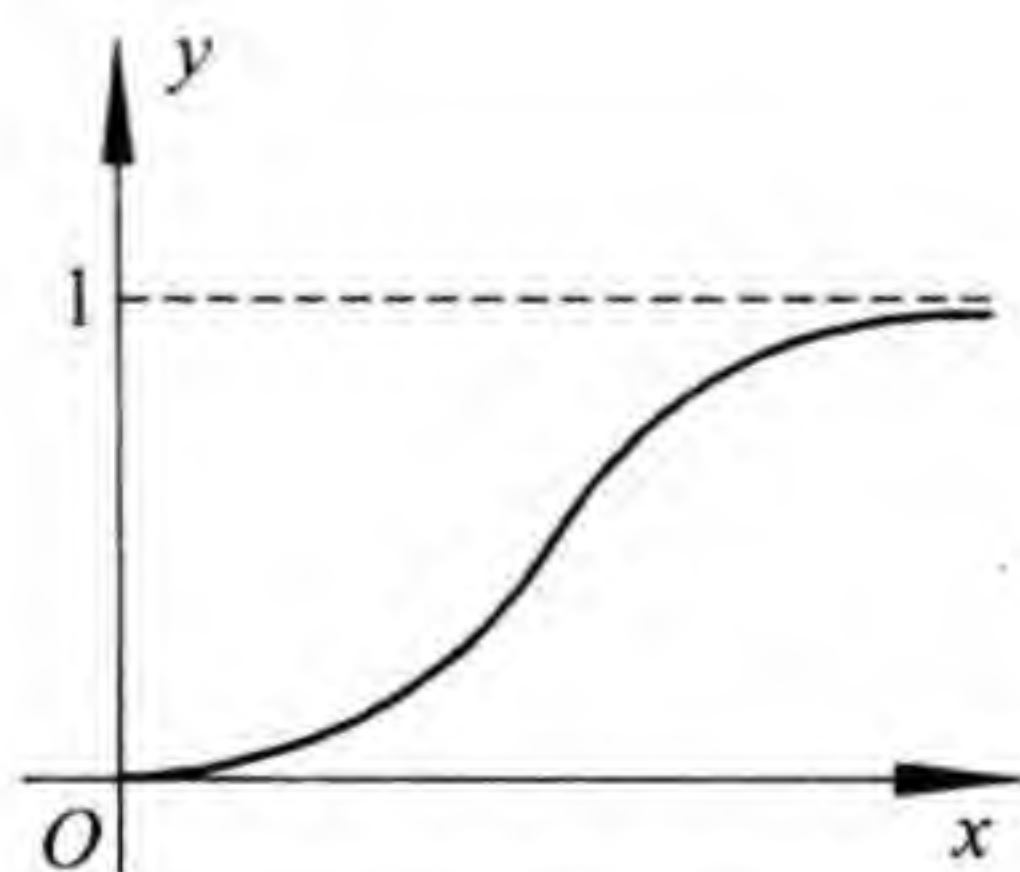


图 1.240

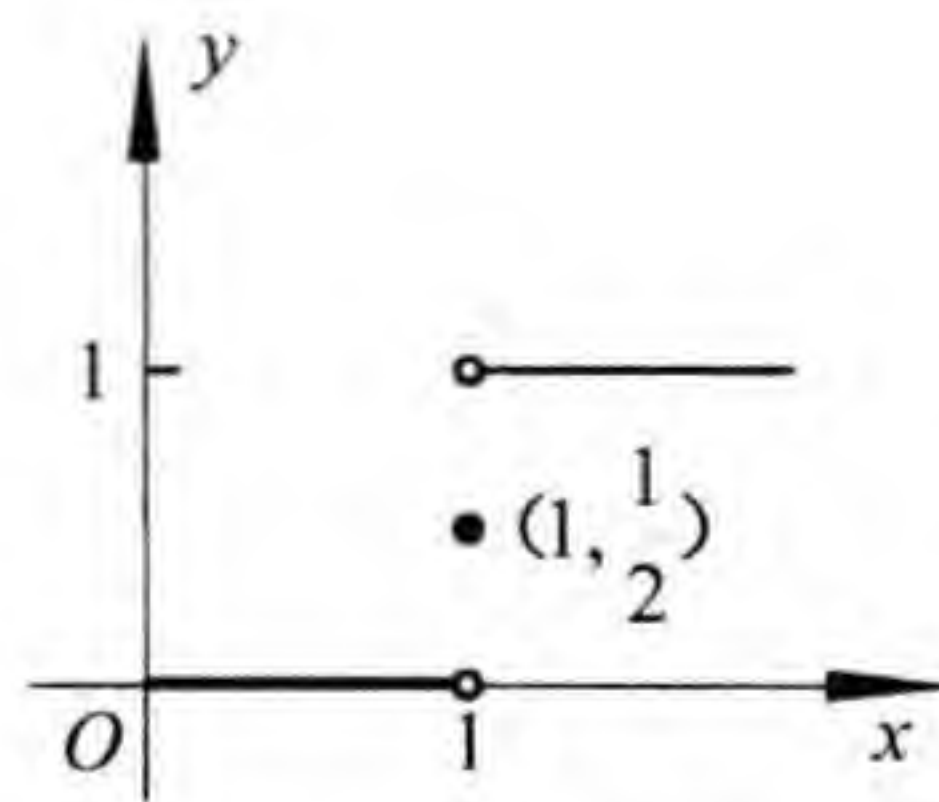


图 1.241

【615】  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$  ( $x \neq 0$ ).

解 因为  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$ , 所以,  $y = \begin{cases} -1, & |x| < 1, x \neq 0, \\ 0, & |x| = 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$

如图 1.242 所示.



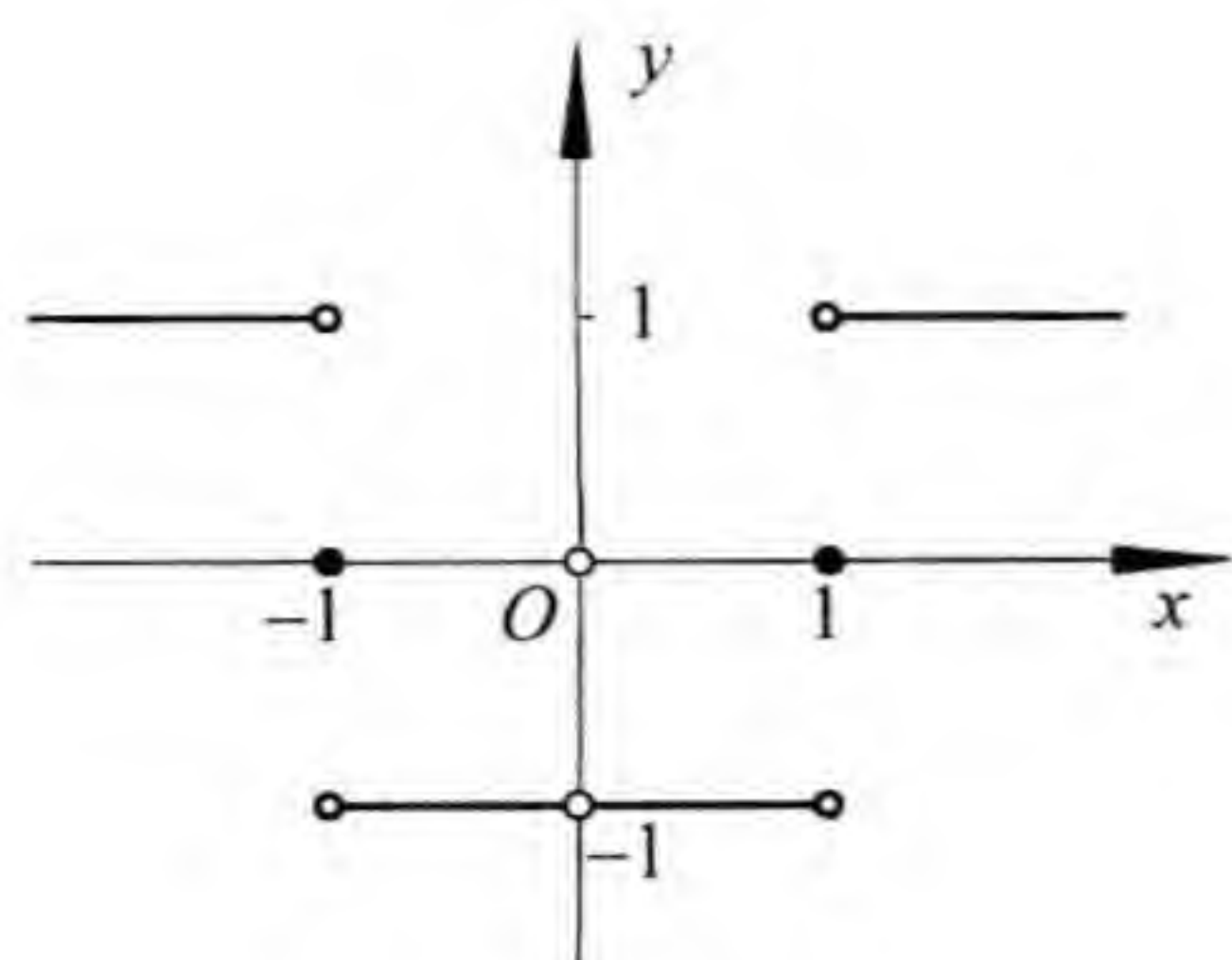


图 1.242

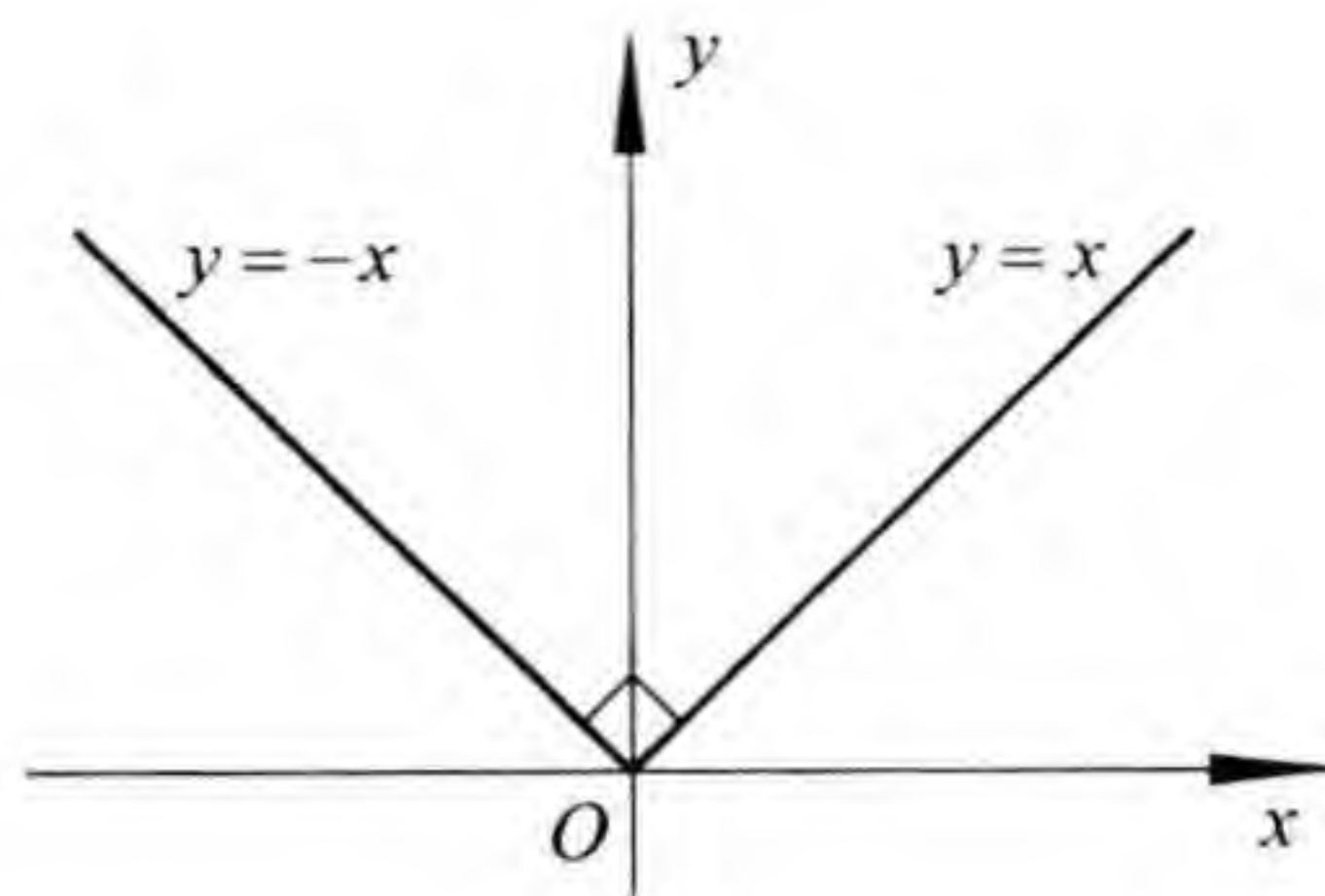


图 1.243

**【616】**  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$

解  $y = \sqrt{x^2} = |x|.$

如图 1.243 所示.

**【617】**  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} \quad (x \geqslant 0).$

解  $y = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$

如图 1.244 所示.

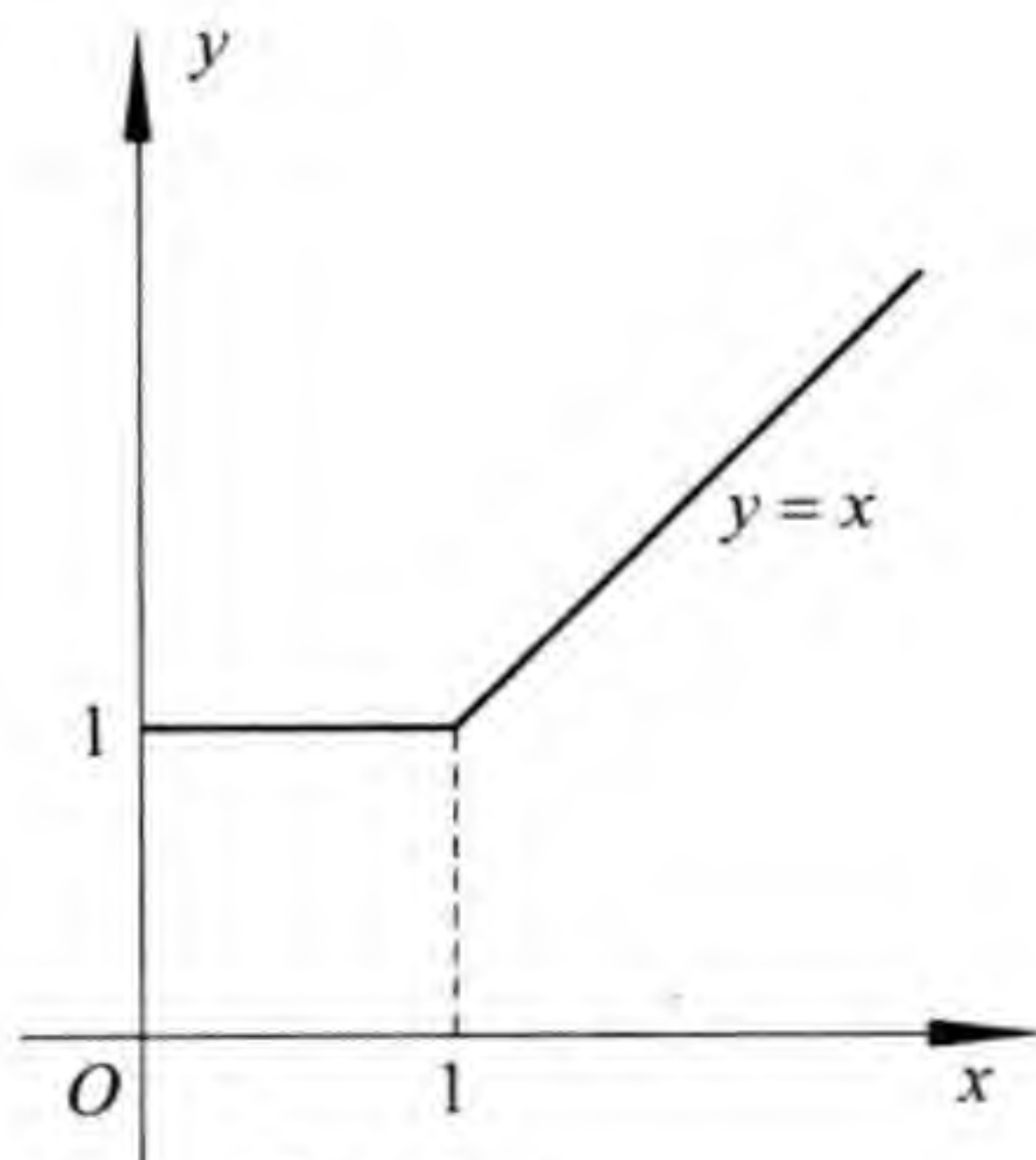


图 1.244

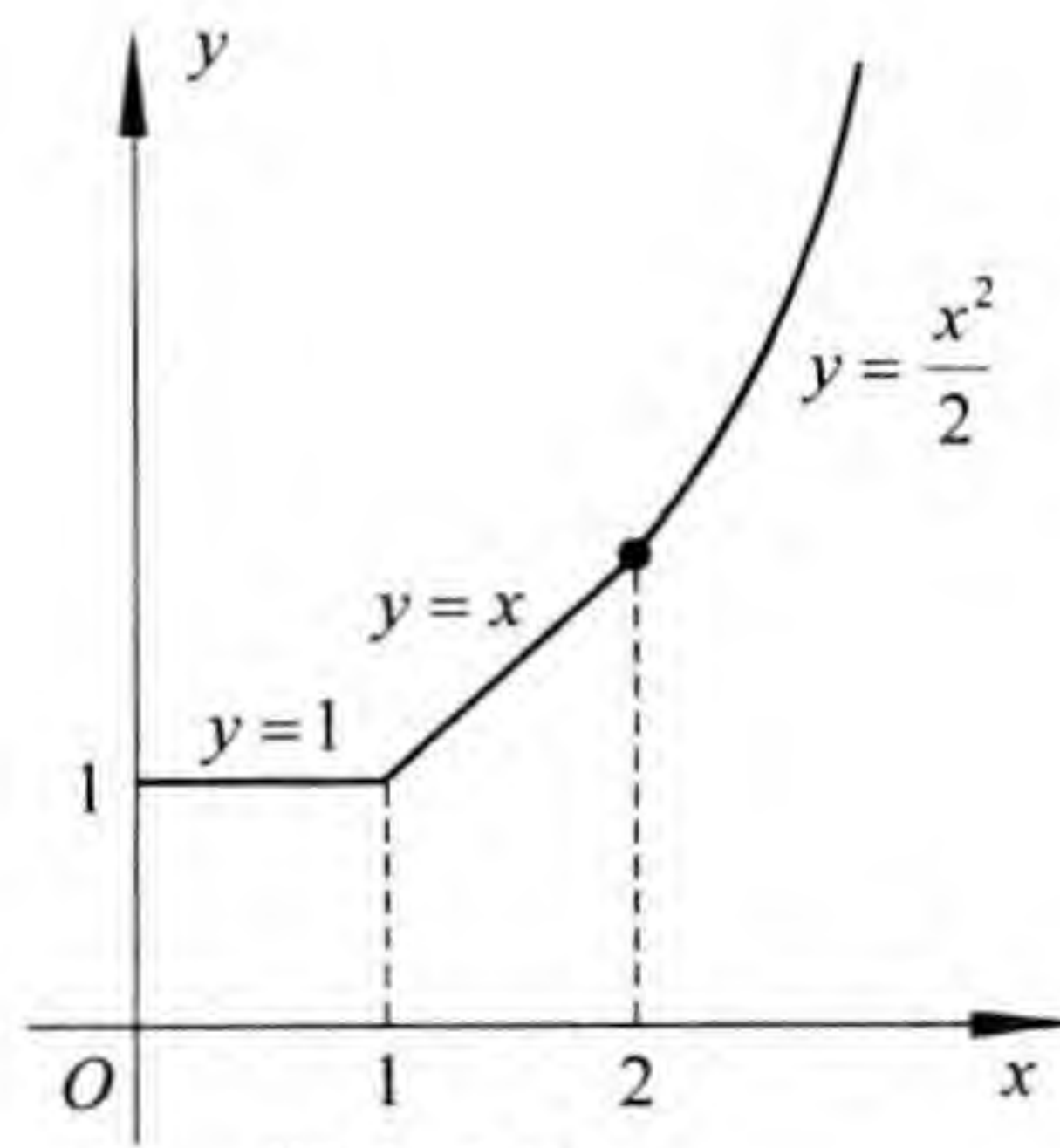


图 1.245

**【618】**  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \geqslant 0).$

解  $y = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x, & 1 < x < 2, \\ \frac{x^2}{2}, & 2 \leqslant x < +\infty. \end{cases}$

如图 1.245 所示.

**【619】**  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}} \quad (x \geqslant 0).$

解  $y = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 2, \\ 2\sqrt{2}, & x = 2, \\ x^2, & x > 2. \end{cases}$

如图 1.246 所示.

**【620】** (1)  $y = \sin^{1000} x;$

(2)  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x.$

解 (1) 如图 1.247 所示. 其图像始终在  $Ox$  轴上方.

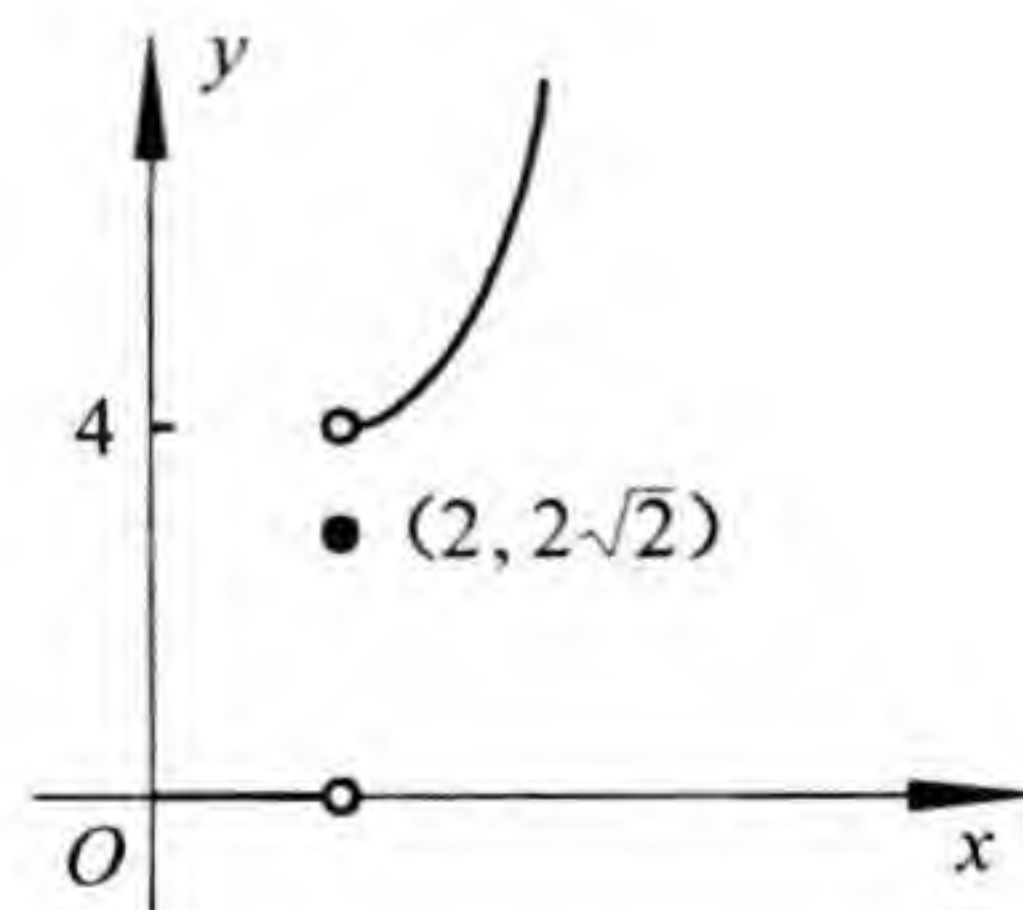


图 1.246



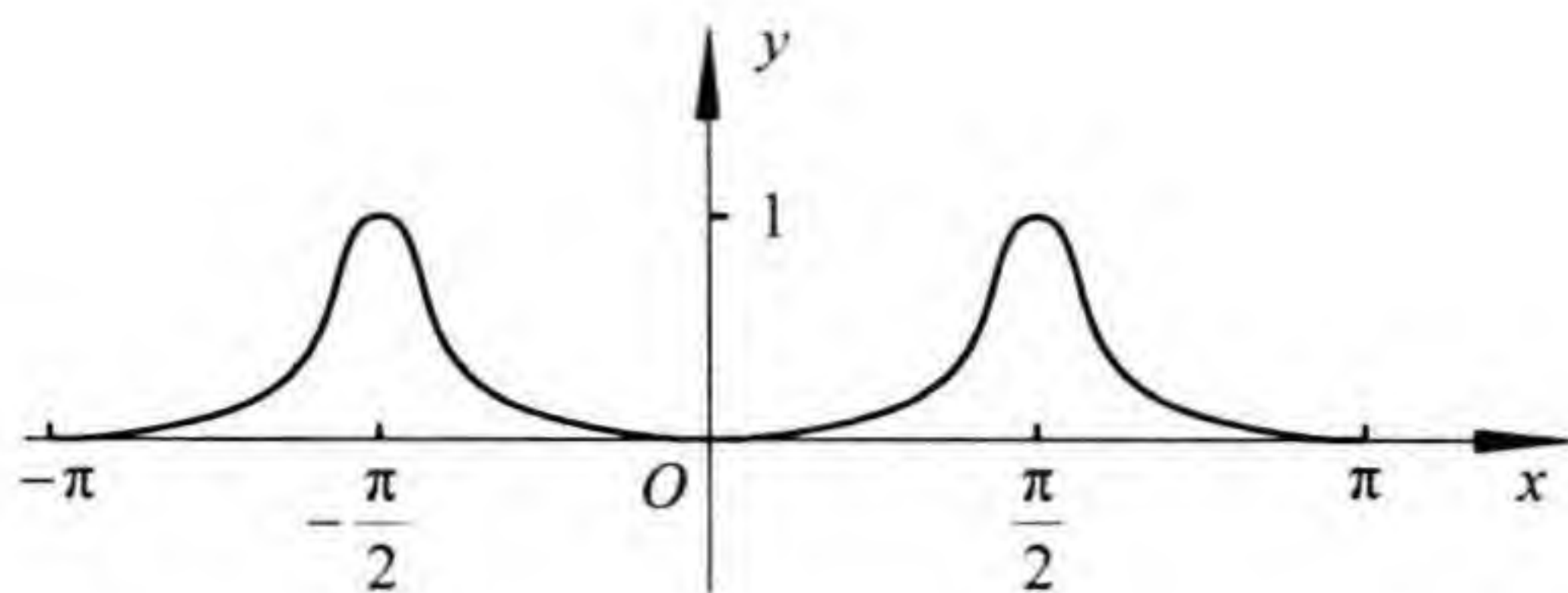


图 1.247

$$(2) y = \begin{cases} 0, & x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \\ 1, & x = (2k+1)\frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

如图 1.248 所示.

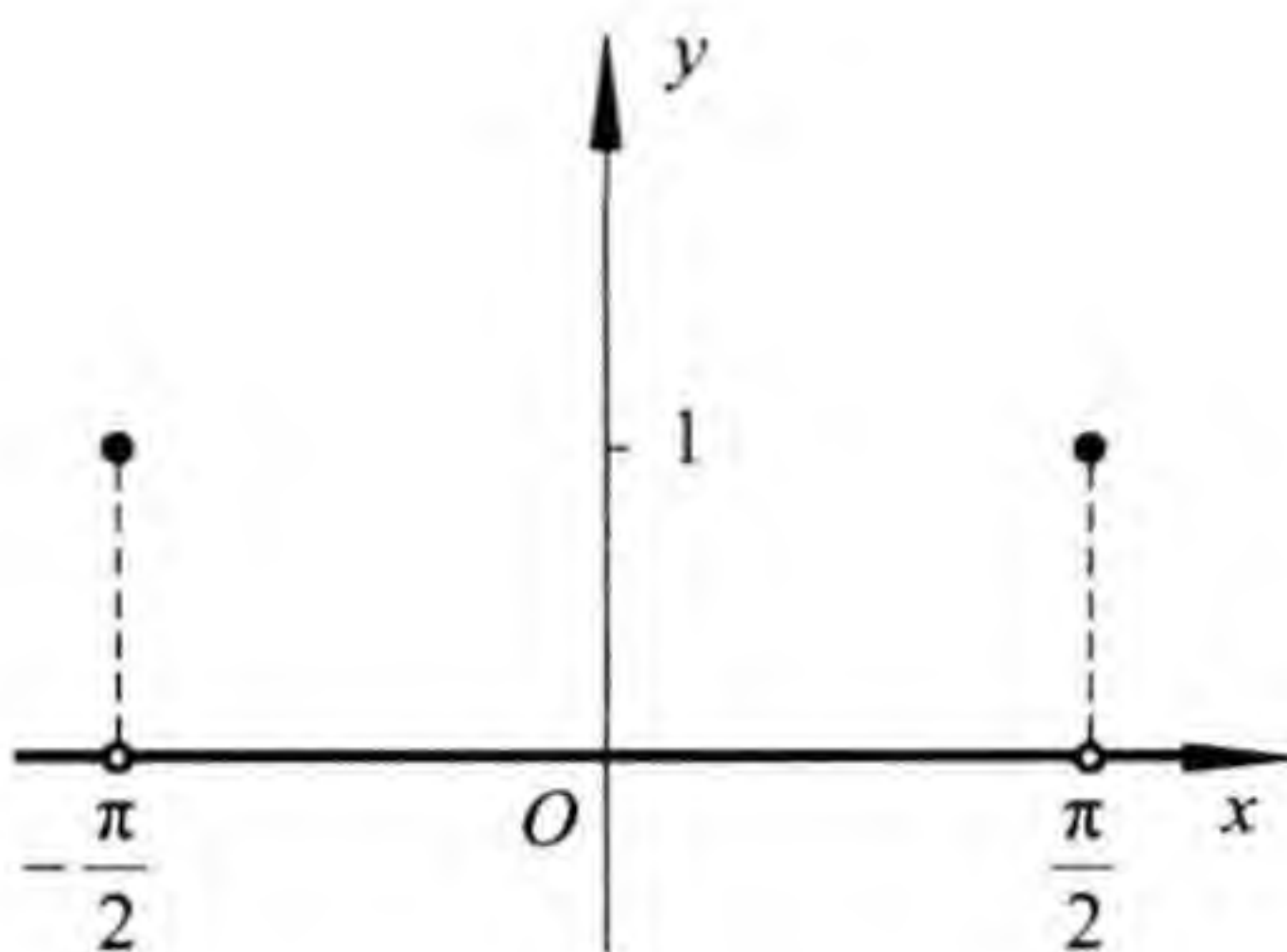


图 1.248

【621】  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n} \quad (x \geq 0).$

解  $y = \begin{cases} \ln 2, & 0 \leq x \leq 2, \\ \ln x, & 2 < x < +\infty. \end{cases}$

如图 1.249 所示.

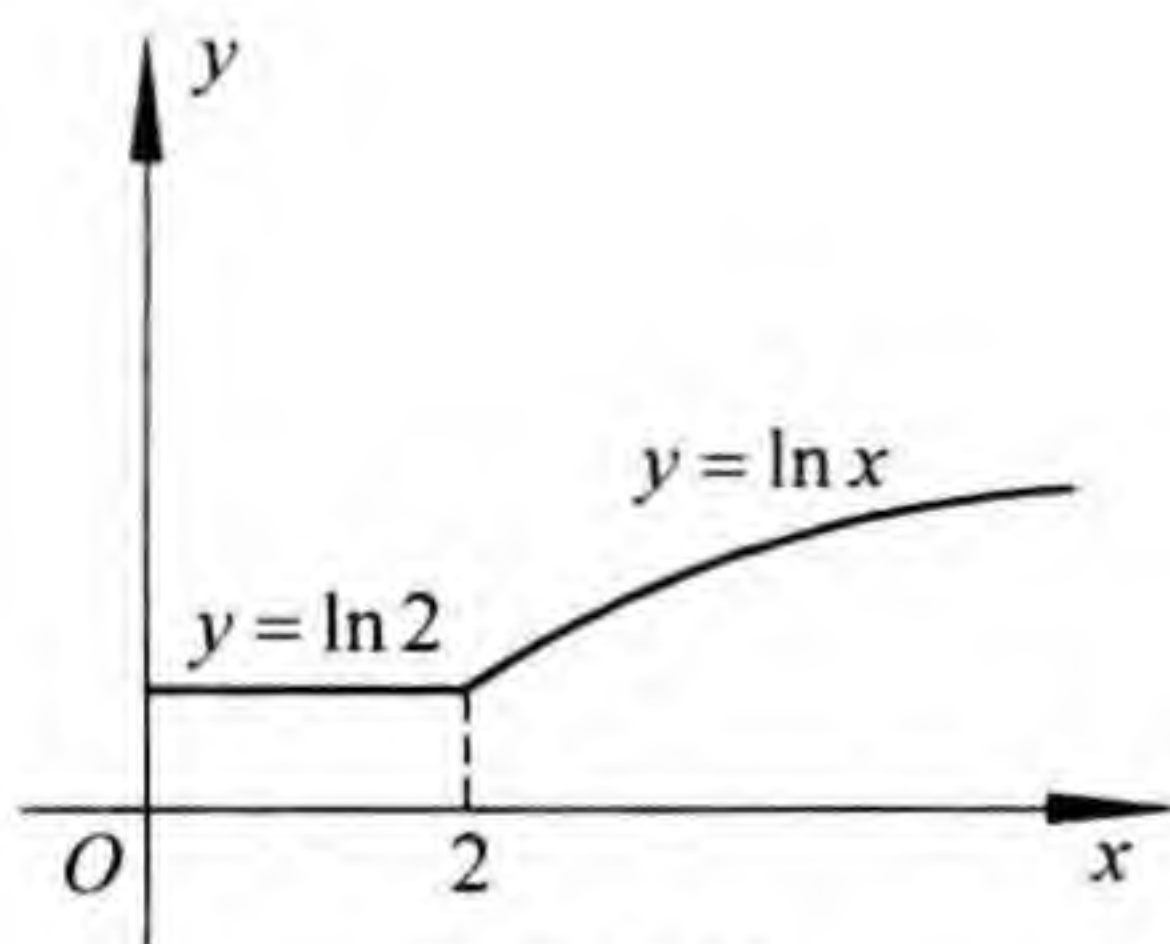


图 1.249

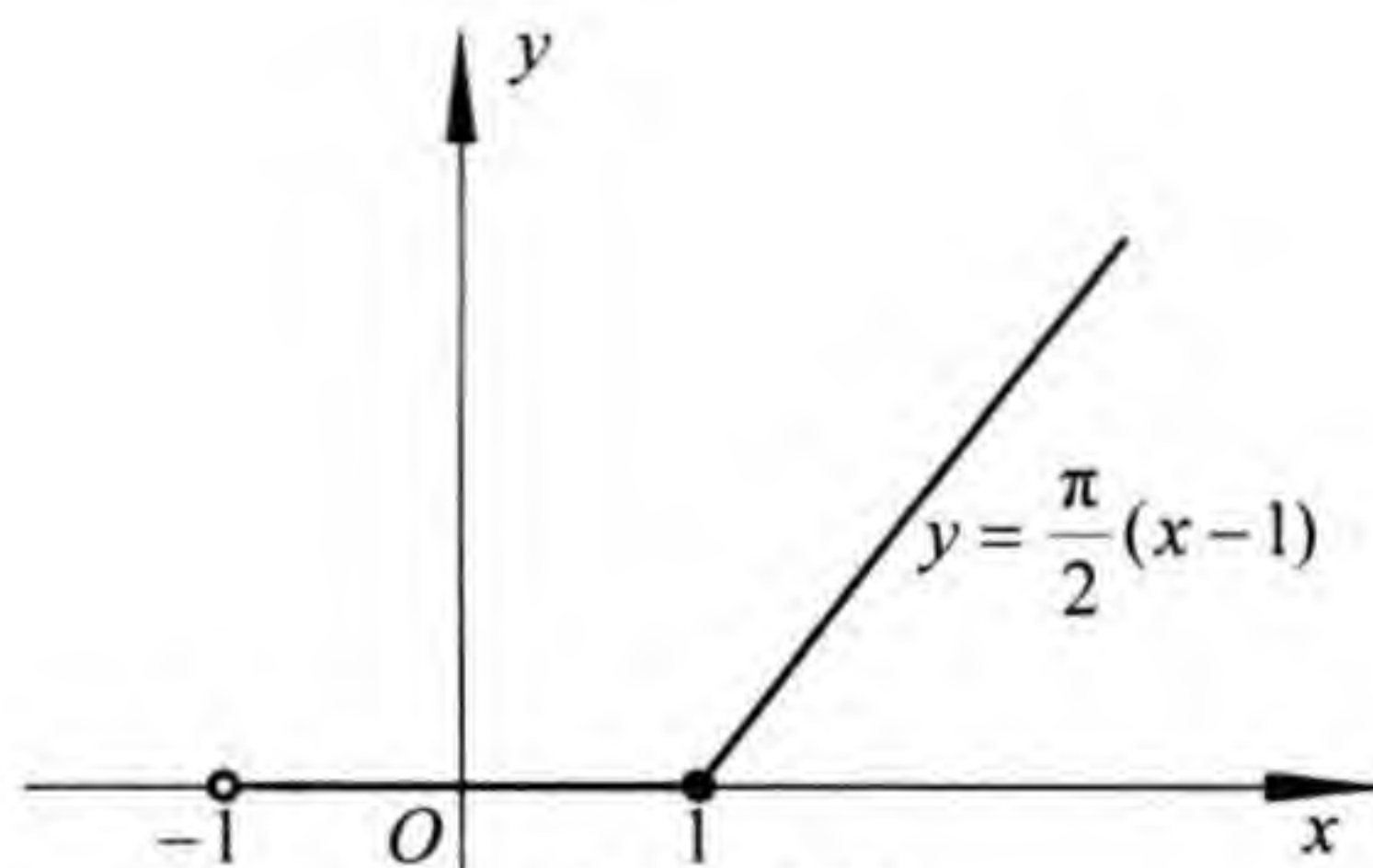


图 1.250

【622】  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \arctan x^n.$

解  $y = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 1, \\ \frac{\pi}{2}(x-1), & x > 1. \end{cases}$

如图 1.250 所示.

【623】  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + e^{n(x+1)}}.$

解  $y = \begin{cases} 1, & x \leq -1, \\ e^{x+1}, & x > -1. \end{cases}$

如图 1.251 所示.

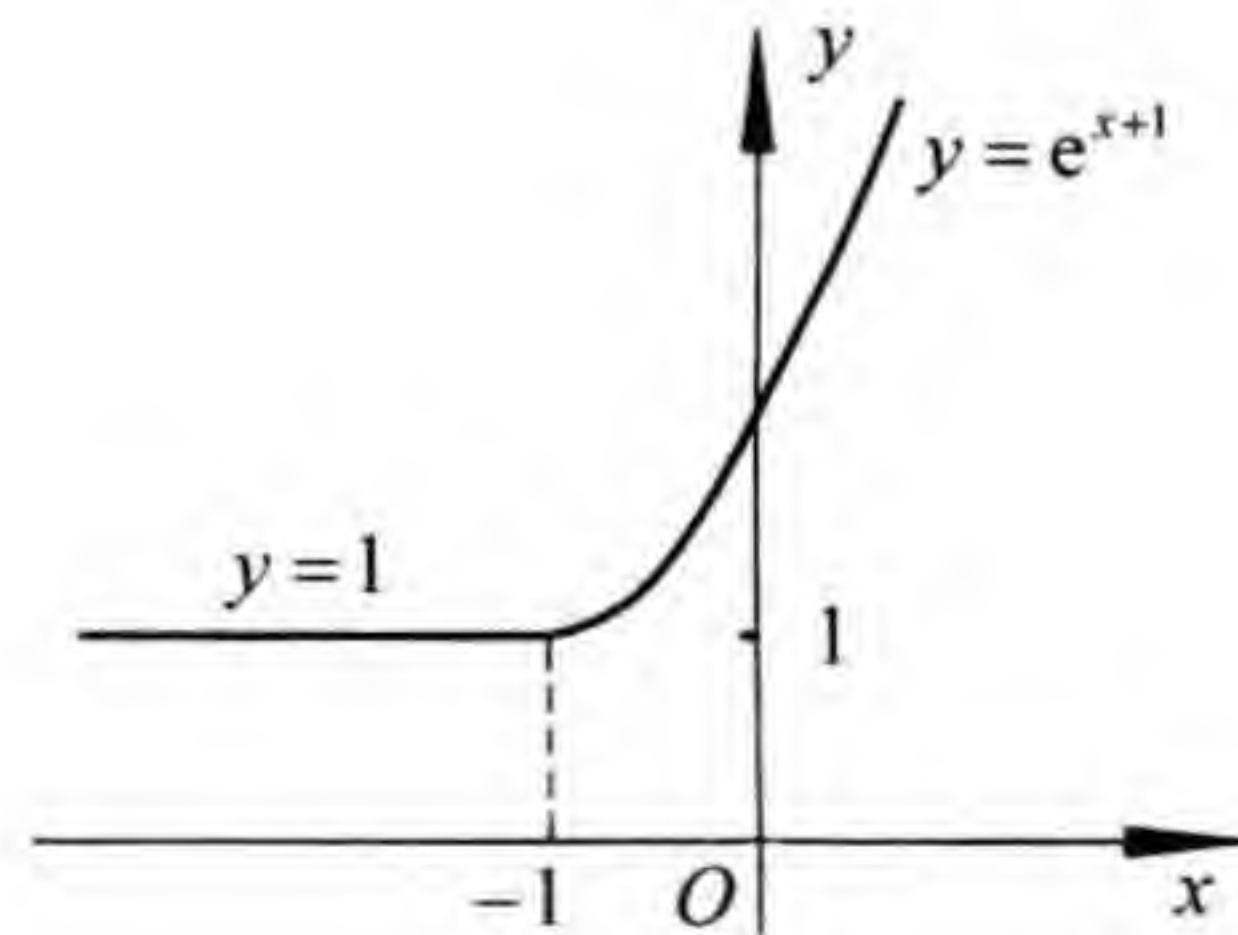


图 1.251



【624】  $y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + e^{tx}}$ .

解  $y = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

如图 1.252 所示.

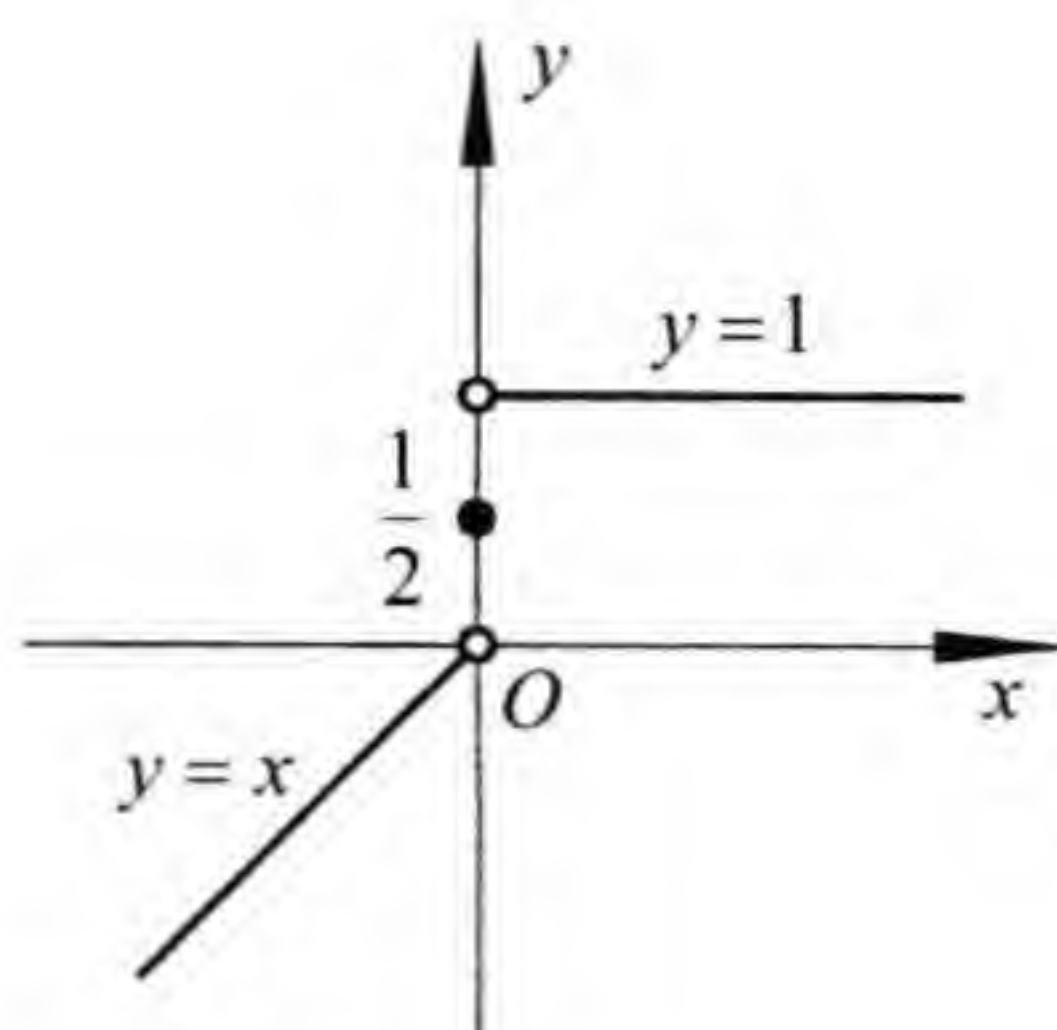


图 1.252

【625】  $y = \lim_{t \rightarrow x} \frac{1}{t-x} \ln \frac{t}{x} \quad (x > 0).$

解  $y = \lim_{t \rightarrow x} \left[ \frac{\ln \left( 1 + \frac{t-x}{x} \right)}{\frac{t-x}{x}} \cdot \frac{1}{x} \right] = \frac{1}{x}.$

如图 1.253 所示.

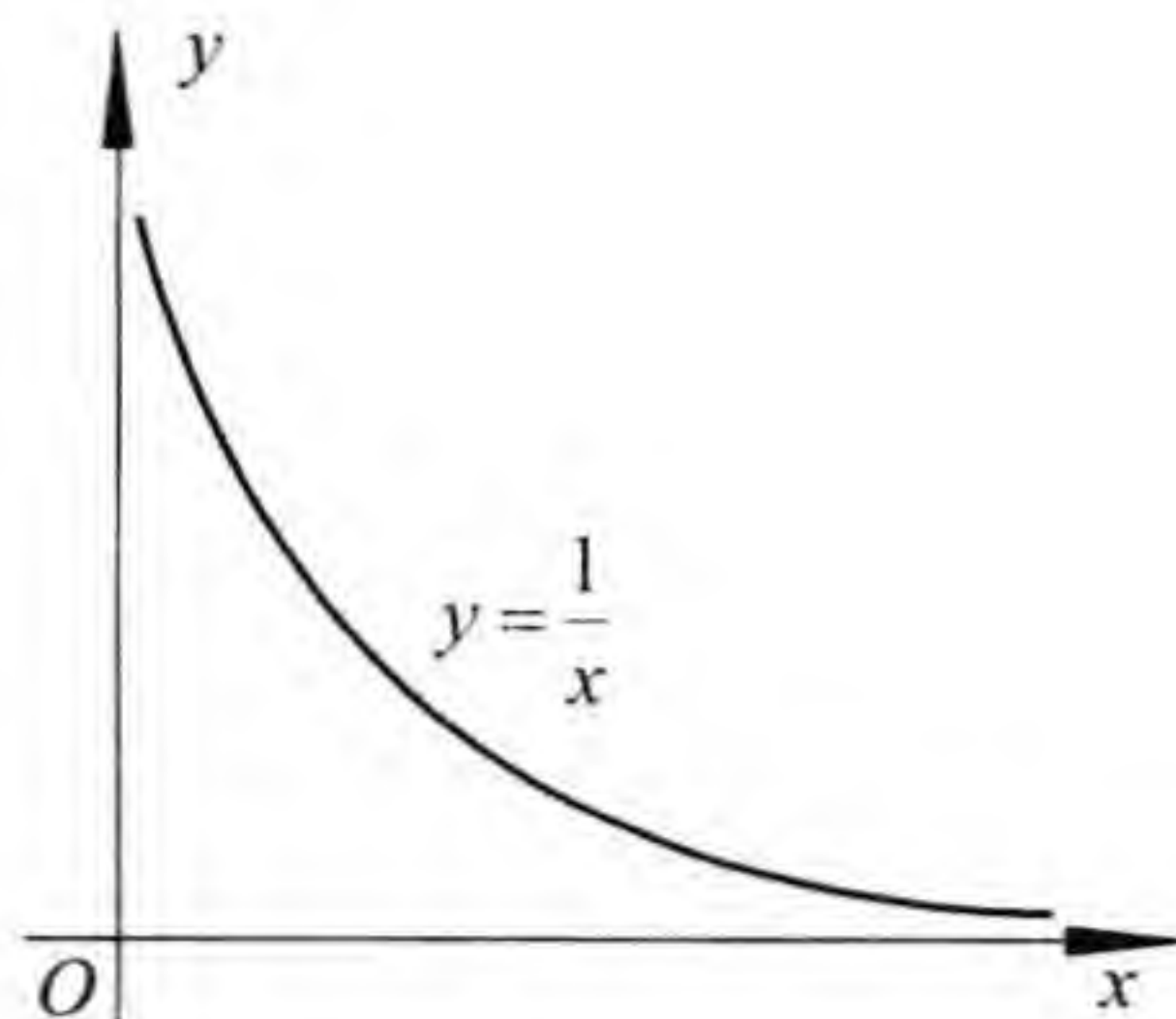


图 1.253

【626】 若有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则直线  $y = kx + b$  称为曲线  $y = f(x)$  的(斜)渐近线. 利用这方程推出渐近线存在的充分必要条件.

**解题思路** 先讨论渐近线从右边伸向无穷远的情形. 当  $x > 0$  时, 由于

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - (kx + b)}{x} + k + \frac{b}{x},$$

利用假设条件即得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ 及 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b.$$

反之, 若上式成立, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ .

用类似的方法可讨论  $x \rightarrow -\infty$  的情形, 且得同样结论.

**解** 先讨论渐近线从右边伸向无穷远的情形:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0. \quad (1)$$

而在  $x > 0$  时,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - (kx + b)}{x} + k + \frac{b}{x},$$

可见

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k. \quad (2)$$

又由(1)式得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b, \quad (3)$$

即常数  $k, b$  可由(2)、(3)式确定. 反之, 若极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  存在, 且为有限数  $k$ , 极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$  存在且有限, 等于  $b$ , 则(1)式成立, 即

$$y = kx + b$$

是一条渐近线. 用完全类似的方法可以讨论  $x \rightarrow -\infty$  的情形, 且得出同样的结论.

综上所述, 所求的渐近线存在的充分必要条件为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ 及 } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b,$$

此时,  $y = kx + b$  为曲线  $y = f(x)$  的(斜)渐近线.

【627】 求下列曲线的渐近线并作其图像:

(1)  $y = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$ ; (2)  $y = \sqrt{x^2 + x}$ ; (3)  $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ ; (4)  $y = \frac{xe^x}{e^x - 1}$ ;



$$(5) y = \ln(1+e^x); \quad (6) y = x + \arccos \frac{1}{x}; \quad (7) y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}.$$

提示 (1) 注意  $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty$  及  $\lim_{x \rightarrow -2} y = \infty$ , 并利用 626 题的结果, 即得渐近线:  $x=1, x=-2$  及  $y=1$ . (2) 应就  $x \rightarrow -\infty$  及  $x \rightarrow +\infty$  分别利用 626 题的结果. (4) 仿 (2). (5) 仿 (2).

解 (1) 因为  $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty$  及  $\lim_{x \rightarrow -2} y = \infty$ , 所以, 直线  $x=1$  及  $x=-2$  为曲线的垂直渐近线. 其次, 因为

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x^2+x-2)} = 0,$$

而

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+x-2} = 1,$$

所以,  $y=1$  为曲线的水平渐近线.

曲线通过原点.

当  $-2 < x < 1$  时,  $y < 0$ , 故曲线在  $Ox$  轴的下方;

当  $x > 1$  或  $x < -2$  时,  $y > 0$ , 故曲线在  $Ox$  轴的上方.

适当描若干点;

$$A(2, 1), B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), C(4, \frac{8}{9}), D(-3, \frac{9}{4}), \dots,$$

并用光滑曲线连接, 即得图像(图 1.254).

$$(2) k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = 1, b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \frac{1}{2},$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = -1, b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = -\frac{1}{2},$$

于是, 直线  $y = x + \frac{1}{2}$  及  $y = -x - \frac{1}{2}$  为曲线的(斜)渐近线.

曲线  $y = \sqrt{x^2+x}$  为双曲线

$$\frac{(x + \frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1,$$

在  $Ox$  轴上方的部分. 如图 1.255 所示.

$$(3) k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2-x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1} = -1,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^2-x^3} + x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2} - x \sqrt[3]{x^2-x^3} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(\frac{1}{x}-1)^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{x}-1} + 1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

斜渐近线为

$$y = -x + \frac{1}{3}.$$

曲线通过原点及点  $A(1, 0)$ .

当  $-\infty < x < 1$  时,  $y > 0$ ; 而当  $x > 1$  时,  $y < 0$ .

如图 1.256 所示.

(4) 当  $x > 0$  时,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x(e^x-1)} = 1,$$

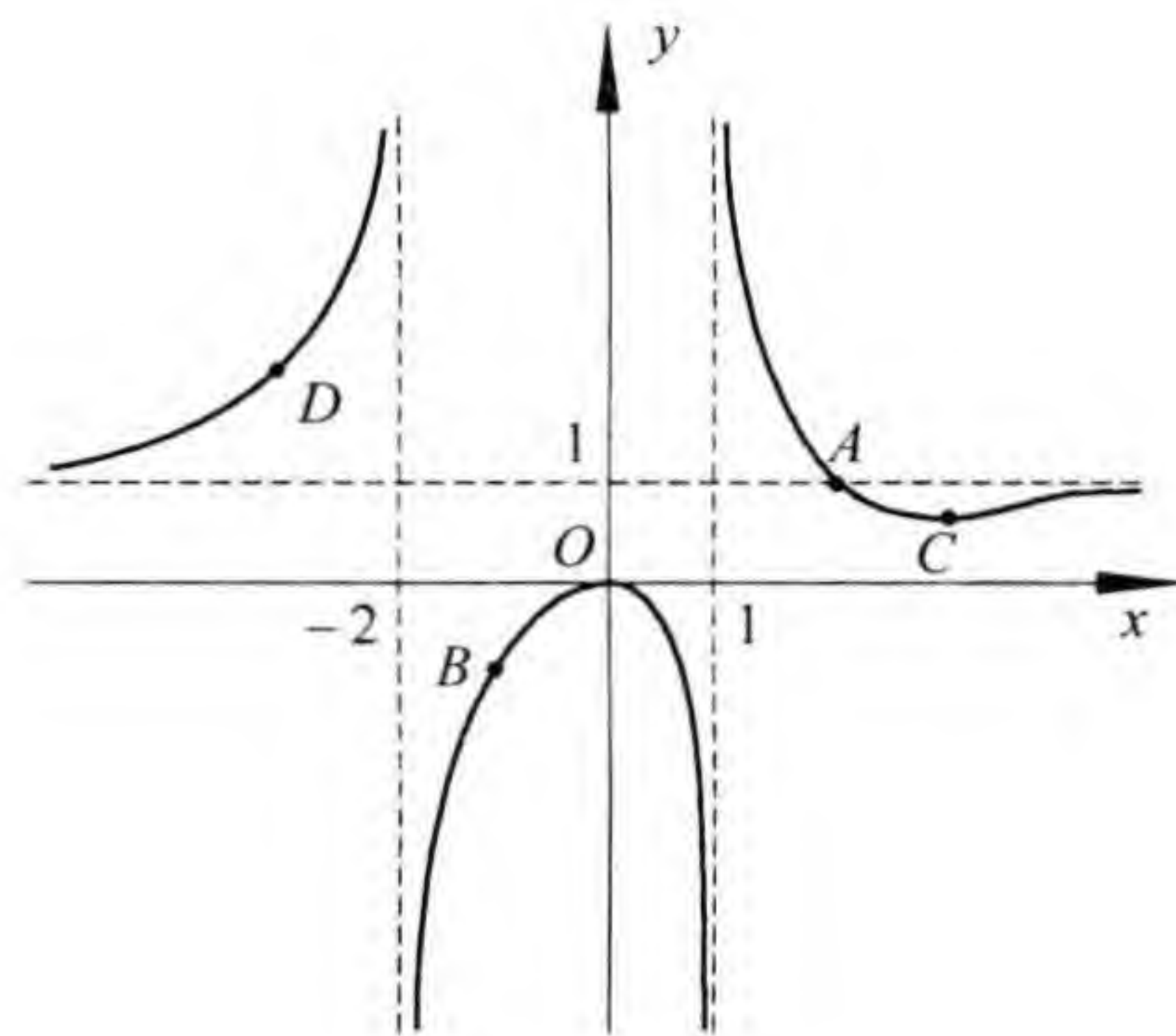


图 1.254

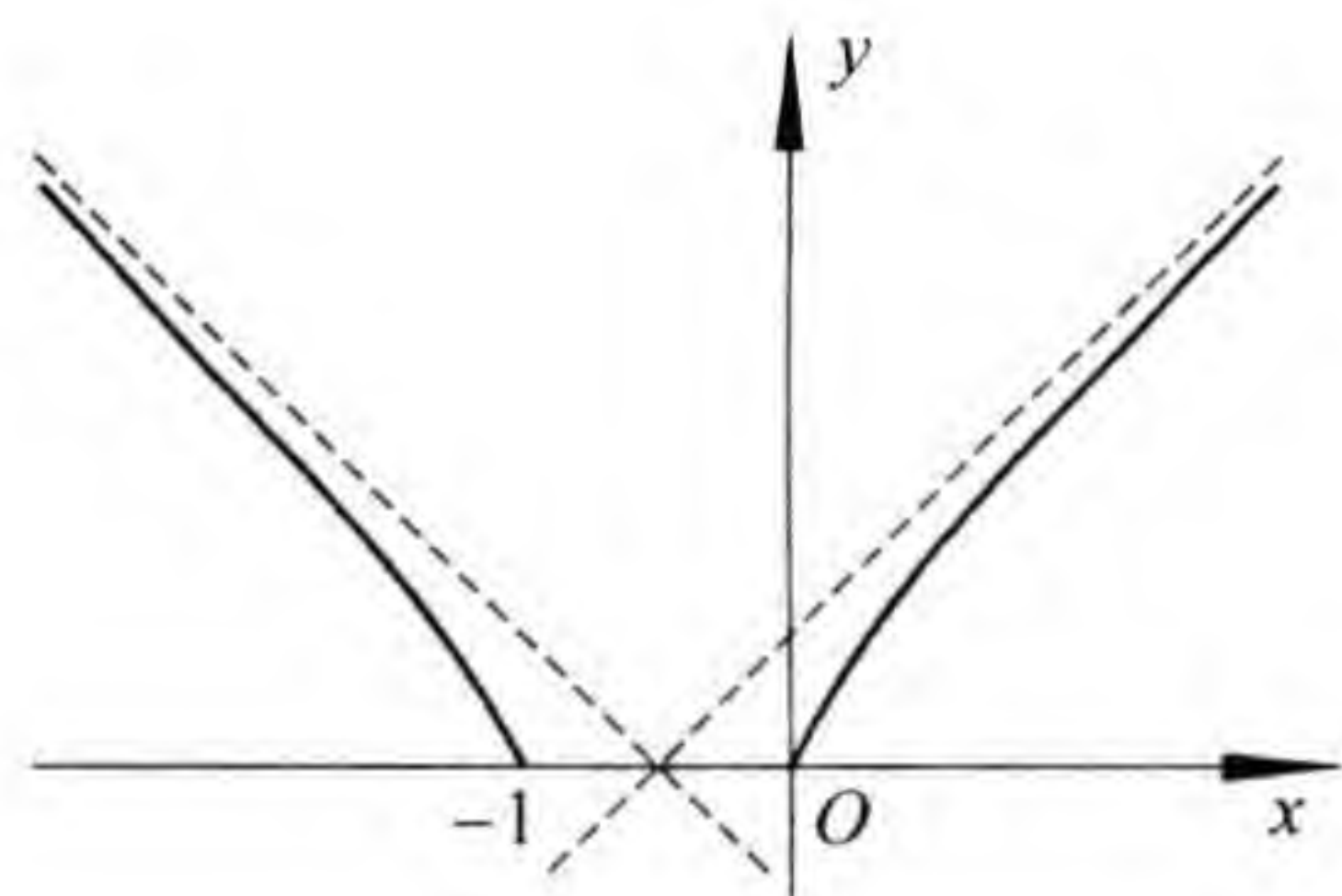


图 1.255

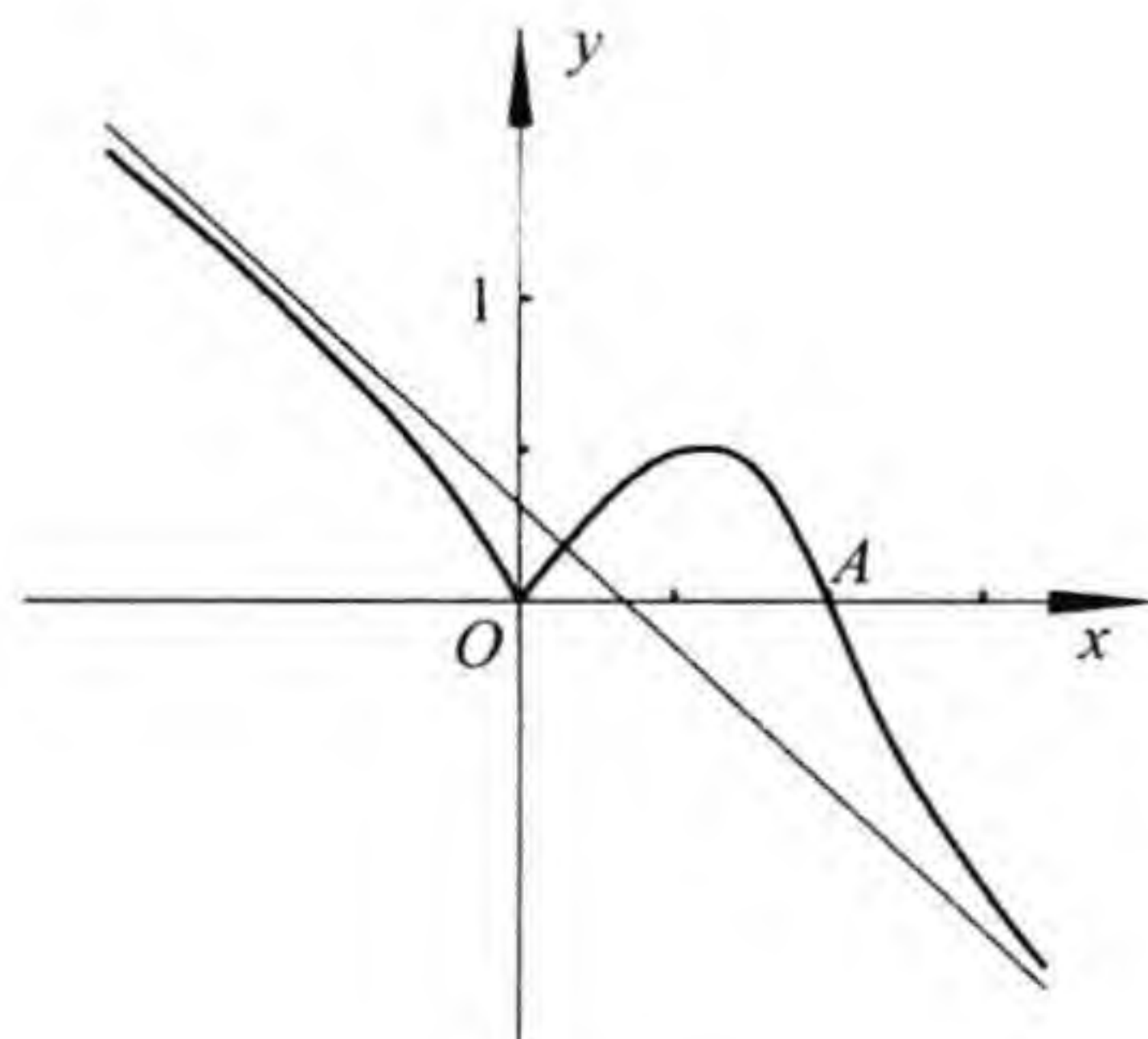


图 1.256



$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{xe^x}{e^x - 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = 0,$$

故渐近线为  $y=x$ ; 当  $x<0$  时,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{x(e^x - 1)} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = 0,$$

故另一渐近线为  $y=0$ .

曲线在  $x=0$  处无定义(以后可以说明它是“可去的间断”).

因为  $y>0$ , 故图像始终在  $Ox$  轴的上方.

如图 1.257 所示.

(5) 当  $x>0$  时,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x + \ln(e^{-x} + 1)}{x} \right] = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1+e^x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{-x} + 1) = 0,$$

故渐近线为  $y=x$ . 同法可求, 当  $x<0$  时的渐近线为  $y=0$ .

曲线通过点  $A(0, \ln 2)$ .

如图 1.258 所示.

$$(6) \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \arccos \frac{1}{x}}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( x + \arccos \frac{1}{x} \right) - x \right] = \frac{\pi}{2},$$

故渐近线为  $y = x + \frac{\pi}{2}$ .

将函数  $y=x$  及  $y=\arccos \frac{1}{x}$  (见 316 题) 的图像按相加法即得, 如图 1.259 所示.

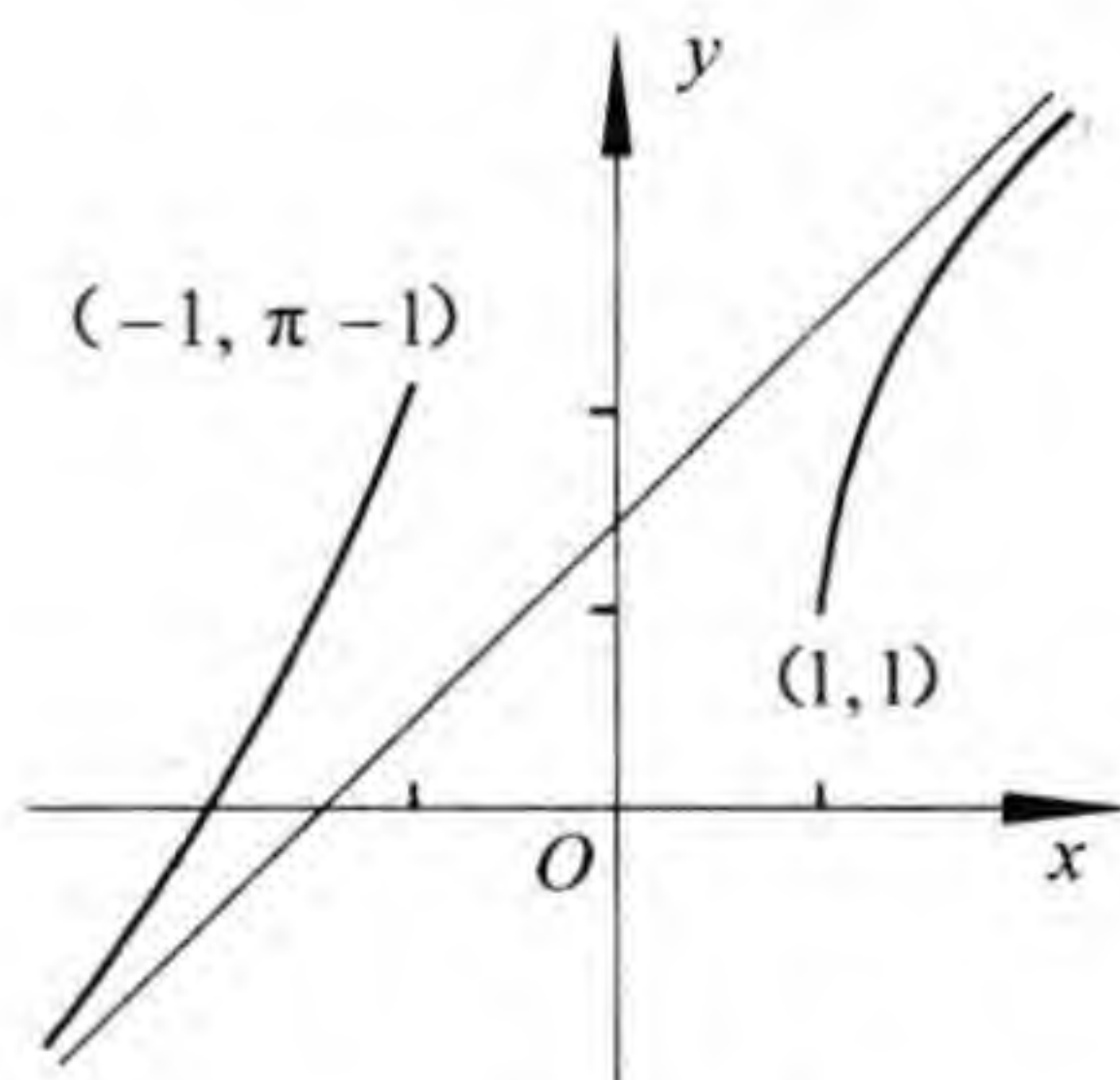


图 1.259

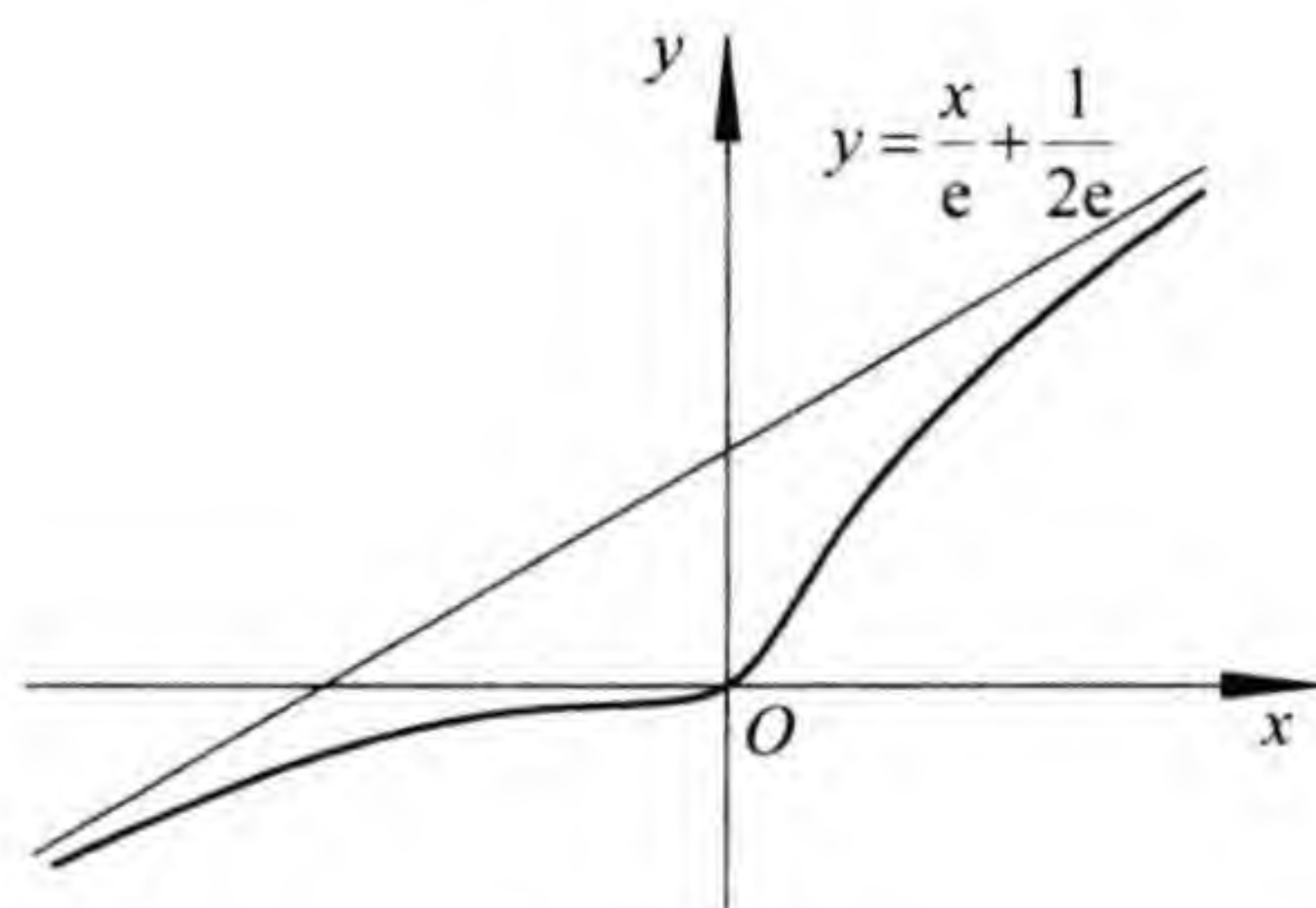


图 1.260

$$(7) \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{(1+x)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right] = \frac{1}{2e},$$

故渐近线为  $y = \frac{x}{e} + \frac{1}{2e}$ . 曲线通过原点. 如图 1.260 所示.

求下列极限:

$$\text{【628】} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right].$$

解题思路 注意到

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} (1 + |x| + \cdots + |x|^{n-1}),$$

当  $|x|=1$  时, 不等式右端趋于零. 当  $|x| \neq 1$  时,

$$\text{右端} = \frac{1}{1-|x|} \cdot \left[ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{|x|}{n+1} \cdot \frac{(|x|^2)^n}{n!} \right].$$

利用 61 题的结果也趋于零.

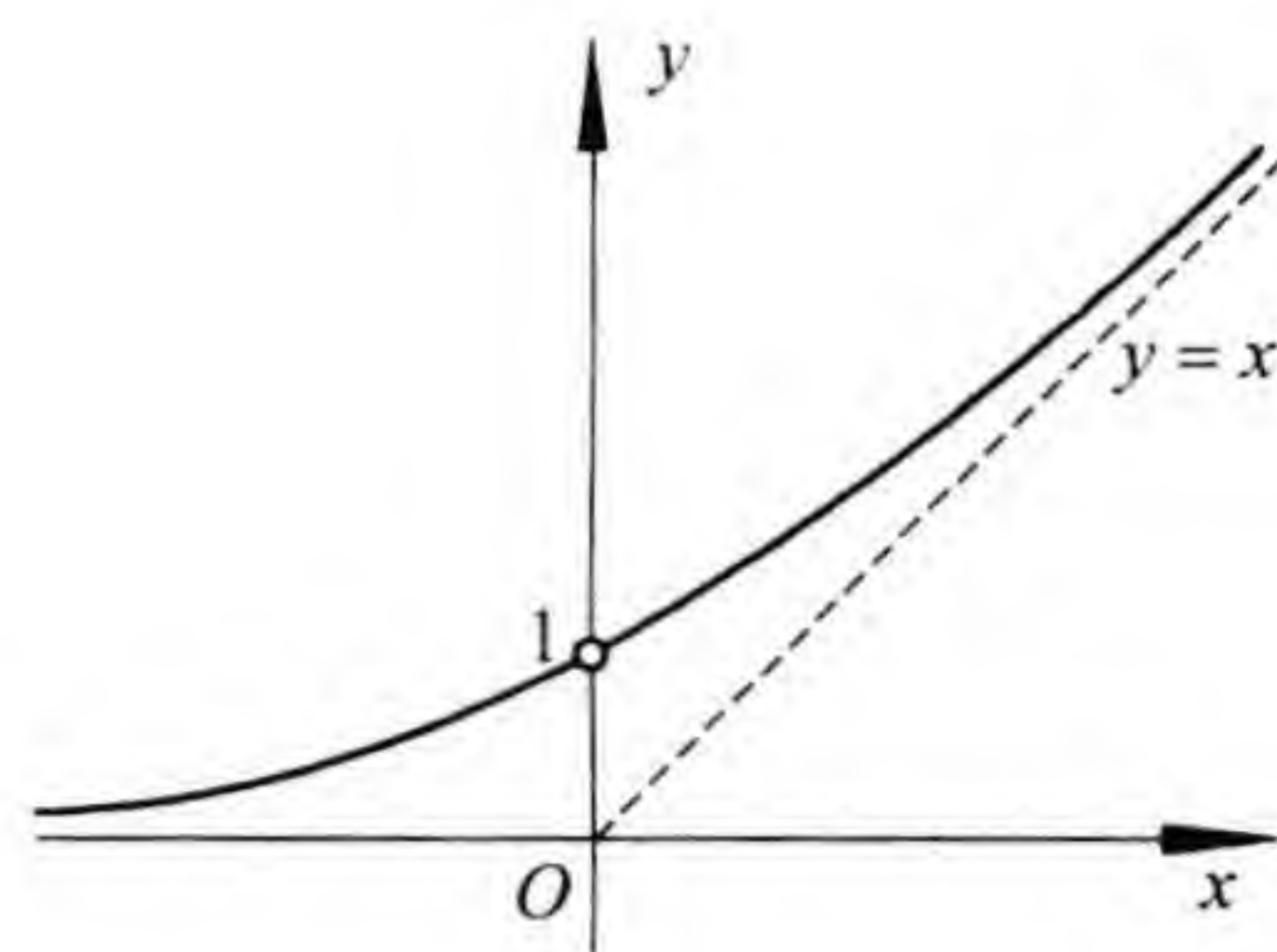


图 1.257

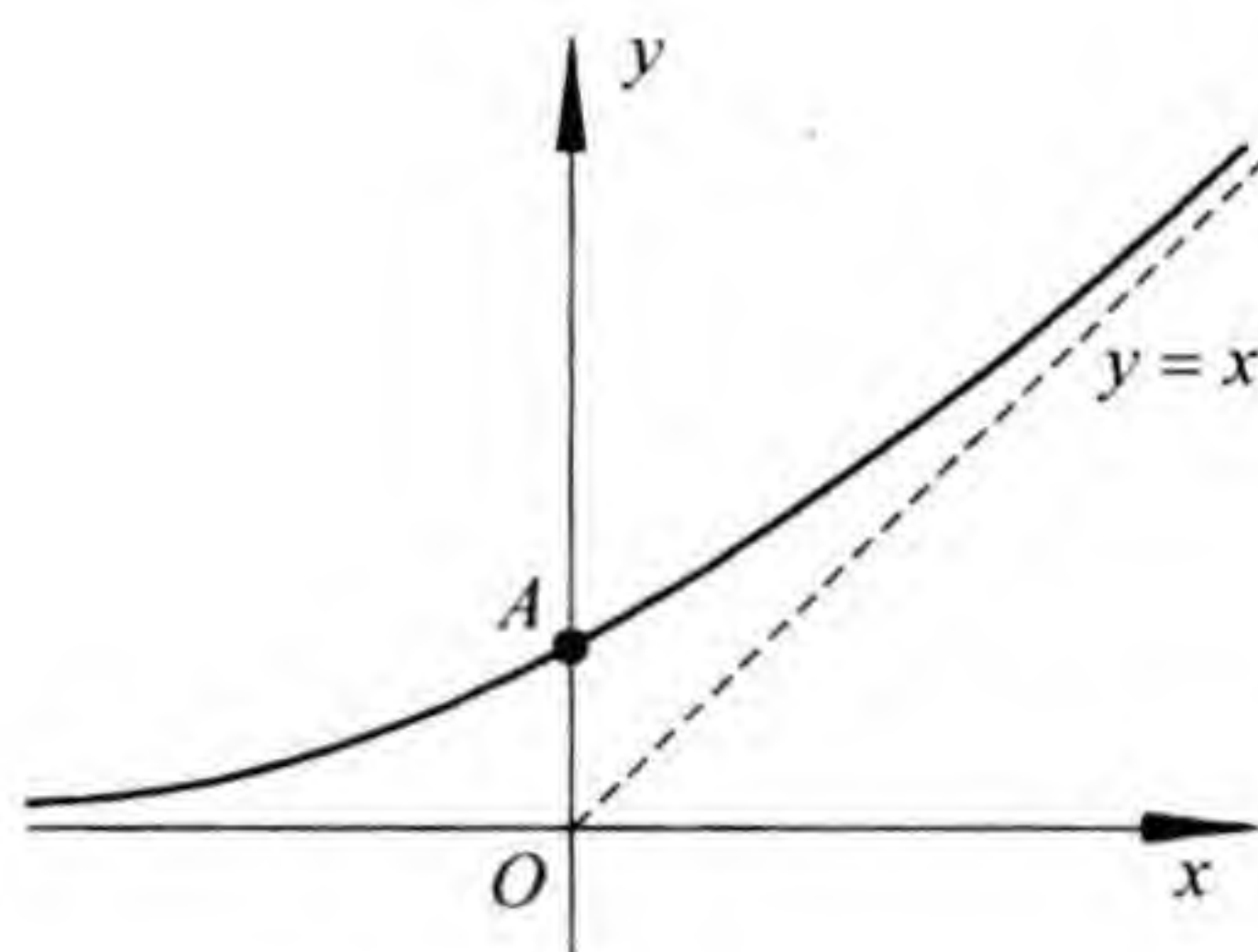


图 1.258



解 由于

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} (1 + |x| + \cdots + |x|^{n-1}).$$

当  $|x|=1$  时, 上式右端为  $\frac{n}{(n+1)!} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ ;

当  $|x| \neq 1$  时, 此式为

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1-|x|^n}{1-|x|} = \frac{1}{1-|x|} \cdot \left[ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{|x|}{n+1} \cdot \frac{(|x|^2)^n}{n!} \right].$$

由 61 题的结果知:  $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ ,  $\frac{(|x|^2)^n}{n!} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ , 故当  $n \rightarrow \infty$  时有  $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1-|x|^n}{1-|x|} \rightarrow 0$ .

于是, 对于任意实数  $x$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right] = 0$ .

【629】  $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]$ , 若  $|x| < 1$ .

提示 由  $1+x^{2^k} = \frac{1-x^{2^{k+1}}}{1-x^{2^k}} \ (k=0, 1, 2, \cdots, n)$  可得  $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ .

解 因为

$$1+x = \frac{1-x^2}{1-x}, \quad 1+x^2 = \frac{1-x^4}{1-x^2}, \quad \cdots \quad 1+x^{2^n} = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^n}}.$$

所以,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

又因  $|x| < 1$ , 故当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x^{2^{n+1}} \rightarrow 0$ . 最后得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})] = \frac{1}{1-x}.$$

【630】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right)$ .

提示 由  $\sin x = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = 2^2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{4} = \cdots = 2^n \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n}$ ,

可得  $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \ (x \neq 0)$ . 当  $x=0$  时, 显见原式为 1.

解 因为

$$\sin x = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = 2^2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{4} = \cdots = 2^n \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n},$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2^n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0).$$

当  $x=0$  时, 原式显然为 1.

【631】 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$ , 其中  $\psi(x) > 0$ , 再设  $n \rightarrow \infty$  时  $\alpha_{mn} \rightarrow 0 \ (m=1, 2, \cdots, n)$ , 换言之, 对于任意  $\epsilon > 0$ ,

存在正整数  $N(\epsilon)$ , 当  $m=1, 2, \cdots, n$  且  $n > N(\epsilon)$  时  $|\alpha_{mn}| < \epsilon$ . 再假定  $\alpha_{mn} \neq 0$ . \*

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(\alpha_{1n}) + \varphi(\alpha_{2n}) + \cdots + \varphi(\alpha_{nn})] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\psi(\alpha_{1n}) + \psi(\alpha_{2n}) + \cdots + \psi(\alpha_{nn})], \quad (1)$$

此处假定等式(1)右端的极限存在.

证 任给  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使当  $0 < |x| < \delta$  时, 恒有



$$\left| \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - 1 \right| < \varepsilon,$$

从而(注意到  $\psi(x) > 0$ ),

$$(1-\varepsilon)\psi(x) < \varphi(x) < (1+\varepsilon)\psi(x). \quad (2)$$

由  $\alpha_{mn} \neq 0$  以及  $\alpha_{mn} \rightarrow 0$  ( $m=1, 2, \dots, n$ ) 知, 必有正整数  $N=N(\varepsilon)$  存在, 使当  $n > N$  时, 恒有

$$0 < |\alpha_{mn}| < \delta \quad (m=1, 2, \dots, n).$$

于是,

$$(1-\varepsilon)\psi(\alpha_{mn}) < \varphi(\alpha_{mn}) < (1+\varepsilon)\psi(\alpha_{mn}) \quad (n > N, m=1, 2, \dots, n).$$

将这  $n$  个不等式相加, 得

$$(1-\varepsilon) \sum_{m=1}^n \psi(\alpha_{mn}) < \sum_{m=1}^n \varphi(\alpha_{mn}) < (1+\varepsilon) \sum_{m=1}^n \psi(\alpha_{mn}) \quad (n > N).$$

即

$$1-\varepsilon < \frac{\sum_{m=1}^n \varphi(\alpha_{mn})}{\sum_{m=1}^n \psi(\alpha_{mn})} < 1+\varepsilon \quad (n > N).$$

由此可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n \varphi(\alpha_{mn})}{\sum_{m=1}^n \psi(\alpha_{mn})} = 1$ . 由假定, 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \psi(\alpha_{mn})$  存在, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \varphi(\alpha_{mn}) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n \varphi(\alpha_{mn})}{\sum_{m=1}^n \psi(\alpha_{mn})} \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \psi(\alpha_{mn}) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \psi(\alpha_{mn}).$$

证毕.

\* ) 作者注: 此题应加上条件  $\alpha_{mn} \neq 0$  (原书没有), 因为  $\varphi(x)$  或  $\psi(x)$  都可能在  $x=0$  处无定义. 另外,  $m=1, 2, \dots$  应改为  $m=1, 2, \dots, n$ .

利用上述定理, 求:

$$\text{【632】} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right).$$

**解题思路** 令  $x = \frac{k}{n^2}$ ,  $\varphi(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1$ ,  $\psi(x) = \frac{x}{3}$ . 先求出  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$ , 其次, 说明  $\frac{k}{n^2} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ;  $k=1, 2, \dots, n$ ). 最后, 求出  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{3n^2} = \frac{1}{6}$ . 利用 631 题的结果, 即知所求的极限也是  $\frac{1}{6}$ .

下列各题(633~636)的思路相同.

**解** 设  $x = \frac{k}{n^2}$ , 我们将首先说明它满足 631 题的条件. 首先,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\frac{x}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1}}{\frac{x}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1} = 1,$$

其次,  $\frac{k}{n^2} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ;  $k=1, 2, \dots, n$ ). 最后,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{3n^2} = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{6}$ . 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) = \frac{1}{6}.$$

$$\text{【633】} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \sin \frac{ka}{n^2} \right).$$

**解** 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 而且当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{ka}{n^2} \rightarrow 0$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ).



又因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{ka}{n^2} = \frac{a}{2}$ , 故利用 631 题的结果, 即得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \sin \frac{ka}{n^2} \right) = \frac{a}{2}$ .

**【634】**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a^{\frac{k}{n^2}} - 1) \quad (a > 0)$ .

解 我们有  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} \right) = 1$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{k}{n^2} \cdot \ln a \rightarrow 0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln a = \frac{1}{2} \ln a$ ;  
因而,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a^{\frac{k}{n^2}} - 1) = \frac{1}{2} \ln a.$$

**【635】**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{k}{n^2} \right)$ .

提示 令  $y = \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{k}{n^2} \right)$ , 则有  $\ln y = \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{k}{n^2} \right)$ . 利用 631 题的结果, 先求出  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{k}{n^2} \right)$ .

解 设  $y = \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{k}{n^2} \right)$ ,  $\ln y = \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{k}{n^2} \right)$ .

我们考虑下列极限,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{k}{n^2} \right).$$

因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ , 又  $\frac{k}{n^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty \text{ 时}, k=1, 2, \dots, n)$ , 且有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}$ , 所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y = \frac{1}{2}$ ,

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{k}{n^2} \right) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ .

**【636】**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}$ .

提示 令  $y = \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}$ , 当  $n$  充分大时,  $\cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} > 0$ , 此时

$$\ln y = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \tan^2 \frac{ka}{n\sqrt{n}} \right),$$

以下仿 632 题, 只需注意  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\tan^2 x)}{x^2} = 1$ .

解 设  $y = \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}$ , 当  $n$  充分大时,  $\cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} > 0$ , 此时

$$\ln y = \sum_{k=1}^n \ln \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \tan^2 \frac{ka}{n\sqrt{n}} \right).$$

因  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\tan^2 x)}{x^2} = 1$ , 又  $\frac{ka}{n\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty \text{ 时}, k=1, 2, \dots, n)$ , 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 a^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)a^2}{6n^3} = \frac{a^2}{3},$$

所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y = -\frac{a^2}{6}$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} = e^{-\frac{a^2}{6}}$ .

**【637】** 数列  $x_n$  由以下的等式所给定:

$$x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots \quad (a > 0).$$

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

证明思路 显然可知此数列单调上升:  $\sqrt{a} < x_{n-1} < x_n$ , 又由  $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$  可得  $x_n = \frac{a}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n} <$

$\frac{a}{x_n} + 1 < \sqrt{a} + 1$ . 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在. 在等式  $x_n^2 = a + x_{n-1}$  两端令  $n \rightarrow \infty$  取极限, 即可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$ .



解 首先,我们注意到此数列显然是单调上升的.其次,由  $x_n = \sqrt{a+x_{n-1}}$ , 得  $x_n^2 = a+x_{n-1}$ , 即

$$x_n = \frac{a}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n}. \quad (1)$$

因为  $\sqrt{a} < x_{n-1} < x_n$ , 即在(1)式右端第二项小于1, 所以,

$$x_n < \frac{a}{x_n} + 1. \quad (2)$$

又显然有

$$x_n > \sqrt{a} \quad (n=2, 3, \dots) \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式右端, 即得  $x_n < \sqrt{a} + 1$ , 故数列  $\{x_n\}$  是有界的.

根据极限存在的准则可知, 数列  $\{x_n\}$  的极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 设其值为  $l$ .

利用等式  $x_n^2 = a + x_{n-1}$ , 两端取极限, 得  $l^2 = a + l$ , 解之, 得

$$l = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} \quad (a > 0),$$

负根不适合(因为  $x_n > 0$ ), 只取其正根, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$ .

**【638】** 函数序列  $y_n = y_n(x)$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 用以下的方法来确定:  $y_1 = \frac{x}{2}$ ,  $y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2}$  ( $n=2, 3, \dots$ ).

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

解 当  $x=0$  时,  $y_n=0$ ,  $n=1, 2, \dots$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n=0$ .

当  $0 < x \leq 1$  时, 用数学归纳法可证  $y_n > 0$ ,  $n=1, 2, \dots$ ;  $y_1 > 0$ . 若  $y_k > 0$ , 由  $x > y_{k-1}^2$ , 可得

$$y_{k+1} = \frac{x}{2} - \frac{y_k^2}{2} = \frac{4x - (x - y_{k-1}^2)^2}{8} \geq \frac{3x}{8} > 0.$$

因而有

$$y_1 - y_3 = \frac{y_2^2}{2} > 0, \quad y_2 - y_4 = \frac{y_3^2 - y_1^2}{2} < 0, \quad \dots$$

用数学归纳法可证

$$y_{2n} - y_{2n+2} < 0, \quad y_{2n-1} - y_{2n+1} > 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

即

$$\frac{x}{2} = y_1 > y_3 > \dots > 0, \quad 0 < y_2 < y_4 < \dots < \frac{x}{2}.$$

可见序列  $y_1, y_3, \dots$  及序列  $y_2, y_4, \dots$  都是收敛的. 设极限分别为  $A_1, A_2$ , 由

$$y_{2n} = \frac{x}{2} - \frac{y_{2n-1}^2}{2} \quad \text{及} \quad y_{2n+1} = \frac{x}{2} - \frac{y_{2n}^2}{2},$$

求极限得  $A_2 = \frac{x}{2} - \frac{A_1^2}{2}$ ,  $A_1 = \frac{x}{2} - \frac{A_2^2}{2}$ , 相减得  $A_1 - A_2 = (A_1 - A_2) \frac{(A_1 + A_2)}{2}$ . 而  $0 \leq A_1 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq A_2 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}$ , 故

$$A_1 = A_2 = A.$$

用极限定义直接可以证明: 若  $\{y_n\}$  的两个子序列  $\{y_{2n}\}$  及  $\{y_{2n-1}\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 收敛于同一个极限, 则

$\{y_n\}$  也收敛于这个极限, 由  $A = \frac{x}{2} - \frac{A^2}{2}$  解得  $A = \sqrt{1+x} - 1$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{1+x} - 1$ .

此结果对  $x=0$  也成立.

**【639】** 函数序列  $y_n = y_n(x)$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 用下面的方法来确定:  $y_1 = \frac{x}{2}$ ,  $y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2}$  ( $n=2, 3, \dots$ ).

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .



解 显然,  $y_2 > y_1$ . 假设  $y_n \geq y_{n-1}$ , 则由  $y_{n+1} - y_n = \frac{y_n^2 - y_{n-1}^2}{2}$  可推出  $y_{n+1} \geq y_n$ .

由数学归纳法得知, 序列  $\{y_n\}$  单调上升.

现在我们证明这个序列有界. 显然

$$0 \leq y_1 < 1.$$

设  $0 \leq y_k < 1$ , 则  $0 \leq y_k^2 < 1$ , 且  $0 \leq y_{k+1} < 1$ . 由数学归纳法便得知序列  $\{y_n\}$  有界.

这样, 我们就证明了此序列的极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  存在. 设其值为  $l$  (显然  $0 \leq l \leq 1$ ), 即得  $l = \frac{x}{2} + \frac{l^2}{2}$ ,

解之, 得  $l = 1 \pm \sqrt{1-x}$ . 由于  $0 \leq l \leq 1$ , 故必

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l = 1 - \sqrt{1-x}.$$

【640】 为了求开普勒方程 (Уравнение Кеплера)

$$x - \epsilon \sin x = m \quad (0 < \epsilon < 1) \quad (1)$$

的近似解, 假设

$$x_0 = m, \quad x_1 = m + \epsilon \sin x_0, \quad \dots, \quad x_n = m + \epsilon \sin x_{n-1}, \quad \dots \quad (\text{逐步逼近法}).$$

证明: 存在  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , 且数  $\xi$  为方程 (1) 的唯一的根.

证 首先考虑  $|x_m - x_n|$ . 由于

$$x_2 - x_1 = \epsilon (\sin x_1 - \sin x_0) = 2\epsilon \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \cos \frac{x_1 + x_0}{2},$$

所以,

$$|x_2 - x_1| \leq 2\epsilon \left| \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \right| \leq 2\epsilon \cdot \frac{|x_1 - x_0|}{2} = \epsilon |x_1 - x_0|.$$

同理可证

$$|x_3 - x_2| \leq \epsilon^2 |x_1 - x_0|.$$

设

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon^{n-1} |x_1 - x_0|,$$

则有

$$|x_{n+1} - x_n| = 2\epsilon \left| \sin \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \right| \leq \epsilon |x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon^n |x_1 - x_0|.$$

由数学归纳法得知, 对于任意的正整数  $n$ , 均有  $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon^{n-1} |x_1 - x_0|$ . 于是, 当  $m > n$  时, 有

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \leq (\epsilon^{m-1} + \epsilon^{m-2} + \dots + \epsilon^n) |x_1 - x_0| \\ &= \epsilon^n \cdot \frac{1 - \epsilon^{m-n}}{1 - \epsilon} \cdot |x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

而  $|x_1 - x_0| = \epsilon |\sin x_0| \leq \epsilon$ , 所以,  $|x_m - x_n| \leq \epsilon^{n+1} \cdot \frac{1 - \epsilon^{m-n}}{1 - \epsilon} < \frac{\epsilon^{n+1}}{1 - \epsilon}$ . 由此知  $|x_m - x_n| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). 按柯西准则得知极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在. 设其值为  $\xi$ , 由等式  $x_n = m + \epsilon \sin x_{n-1}$  取极限即得  $\xi = m + \epsilon \sin \xi$ . 这就是说, 变量  $x_n$  的极限  $\xi$  是方程 (1) 的根.

最后, 证明此根的唯一性. 设  $\xi_1$  是另一根, 则  $\xi_1 - \xi = \epsilon (\sin \xi_1 - \sin \xi)$ , 由此得

$$|\xi_1 - \xi| \leq \epsilon |\xi_1 - \xi|.$$

因为  $0 < \epsilon < 1$ , 故  $\xi_1 = \xi$ .

于是, 我们就证明了  $\xi$  是方程 (1) 的唯一的根.

【641】 若  $\omega_k(f)$  为函数  $f(x)$  在区间  $|x - \xi| \leq k$  ( $k > 0$ ) 上的振幅, 则数  $\omega_0(f) = \lim_{k \rightarrow 0} \omega_k(f)$  称为函数  $f(x)$  在  $\xi$  点的振幅.

求下列函数  $f(x)$  在点  $x=0$  的振幅:

$$(1) f(x) = \sin \frac{1}{x}; \quad (2) f(x) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \frac{1}{x}; \quad (3) f(x) = x \left( 2 + \sin \frac{1}{x} \right);$$



$$(4) f(x) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{1}{x}; \quad (5) f(x) = \frac{|\sin x|}{x}; \quad (6) f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}};$$

$$(7) f(x) = (1+|x|)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\text{解 } (1) \omega_k(f) = 2, \omega_0(f) = 2;$$

$$(2) \omega_k(f) = +\infty, \omega_0(f) = +\infty;$$

$$(3) \omega_k(f) = 3k - k = 2k, \omega_0(f) = 0;$$

$$(4) \omega_k(f) = \frac{1}{\pi} \left[ \arctan \frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{(-k)} \right] = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{k}, \omega_0(f) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1;$$

$$(5) \omega_k(f) = 2, \omega_0(f) = 2;$$

$$(6) \omega_k(f) = \left| \frac{1}{1+e^{\frac{1}{k}}} - \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{k}}} \right|, \omega_0(f) = 1;$$

$$(7) \omega_k(f) = (1+k)^{\frac{1}{k}} - (1+k)^{-\frac{1}{k}}, \omega_0(f) = e - e^{-1} = 2\text{sh}1.$$

$$\text{【642】 命 } f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

证明: 对于满足条件  $-1 \leq \alpha \leq 1$  的任何数  $\alpha$ , 可以选出数列  $x_n \rightarrow 0 (n=1, 2, \dots)$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$ .

证 对于确定的  $\alpha: |\alpha| \leq 1$ , 总存在  $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , 使  $\sin x_0 = \alpha$ .

令  $x_n = \frac{1}{2n\pi + x_0}$ , 则显然有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . 又因

$$f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n} = \sin(2n\pi + x_0) = \alpha,$$

所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$ .

【643】 设:

$$(1) f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x}; \quad (2) f(x) = (2-x^2) \cos \frac{1}{x}; \quad (3) f(x) = \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x}\right)^{\sec^2 \frac{1}{x}}.$$

求  $l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  和  $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

解 由  $l$  及  $L$  的定义, 容易求得

$$(1) l = -1, L = 2; \quad (2) l = -2, L = 2; \quad (3) l = 2, L = e.$$

【644】 设:

$$(1) f(x) = \sin x; \quad (2) f(x) = x^2 \cos^2 x; \quad (3) f(x) = 2^{\sin x^2}; \quad (4) f(x) = \frac{x}{1+x^2 \sin^2 x} \quad (x \geq 0).$$

求  $l = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  和  $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

解 由  $l$  及  $L$  的定义, 容易求得

$$(1) l = -1, L = 1; \quad (2) l = 0, L = +\infty; \quad (3) l = \frac{1}{2}, L = 2; \quad (4) l = 0, L = +\infty.$$

## § 6. 函数无穷小和无穷大的阶

1° 记号

$$\varphi(x) = O^*(\psi(x))$$

表示函数  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  在  $x \rightarrow a$  的已知过程中是狭义地同阶的无穷小或无穷大, 就是说

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \quad (0 < |k| < +\infty).$$

特别是, 若当  $x \rightarrow 0$  时, 有



$$\varphi(x)=O^*(x^n) \quad (n>0),$$

则称  $\varphi(x)$  为对于无穷小  $x$  是  $n$  阶无穷小.

仿此,若当  $x \rightarrow \infty$  时,有

$$\varphi(x)=O^*(x^n) \quad (n>0),$$

则称  $\varphi(x)$  为对于无穷大  $x$  是  $n$  阶无穷大.

2° 记号

$$\varphi(x)=o(\psi(x))$$

表示当  $x \rightarrow a$  时,函数  $\varphi(x)$  比函数  $\psi(x)$  是较高阶的无穷小,或函数  $\varphi(x)$  比函数  $\psi(x)$  是较低阶的无穷大,就是说

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

3° 若当  $x \rightarrow a$  时,无穷小函数  $\varphi(x)$  的阶(在广义的意义上)不低于某一正的函数  $\psi(x)$  无穷小的阶(或无穷大函数  $\varphi(x)$  的阶不高于函数  $\psi(x)$  无穷大的阶),即

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|\varphi(x)|}{|\psi(x)|} = k \quad (0 \leq k < +\infty),$$

则约定写为:

$$\varphi(x)=O(\psi(x)).$$

4° 若

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1,$$

则称函数  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  当  $x \rightarrow a$  时为等价的  $[\varphi(x) \sim \psi(x)]$ .

例如,当  $x \rightarrow 0$  时,有:

$$\sin x \sim x; \quad \tan x \sim x; \quad a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0); \quad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}; \quad \ln(1+x) \sim x.$$

一般地说来,  $\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x)$ .

当求两个函数比的极限时,已知函数可用其等价的函数来代换.

**【645】** 把圆心角  $AOB=x$  (图 1.261) 当作 1 阶无穷小量,求下列各无穷小量的阶:

- |                        |                    |
|------------------------|--------------------|
| (1) 弦 $AB$ ;           | (2) 拱高 $CD$ ;      |
| (3) 扇形 $AOB$ 的面积;      | (4) 三角形 $ABC$ 的面积; |
| (5) 梯形 $ABB_1A_1$ 的面积; | (6) 弓形 $ABC$ 的面积.  |

解 (1)  $AB=2R\sin \frac{x}{2}$ , 式中  $R$  为圆的半径. 因为

$$\frac{AB}{x} = \frac{2R\sin \frac{x}{2}}{x} \rightarrow R \quad (x \rightarrow 0),$$

所以,弦  $AB$  是关于  $x$  的一阶无穷小.

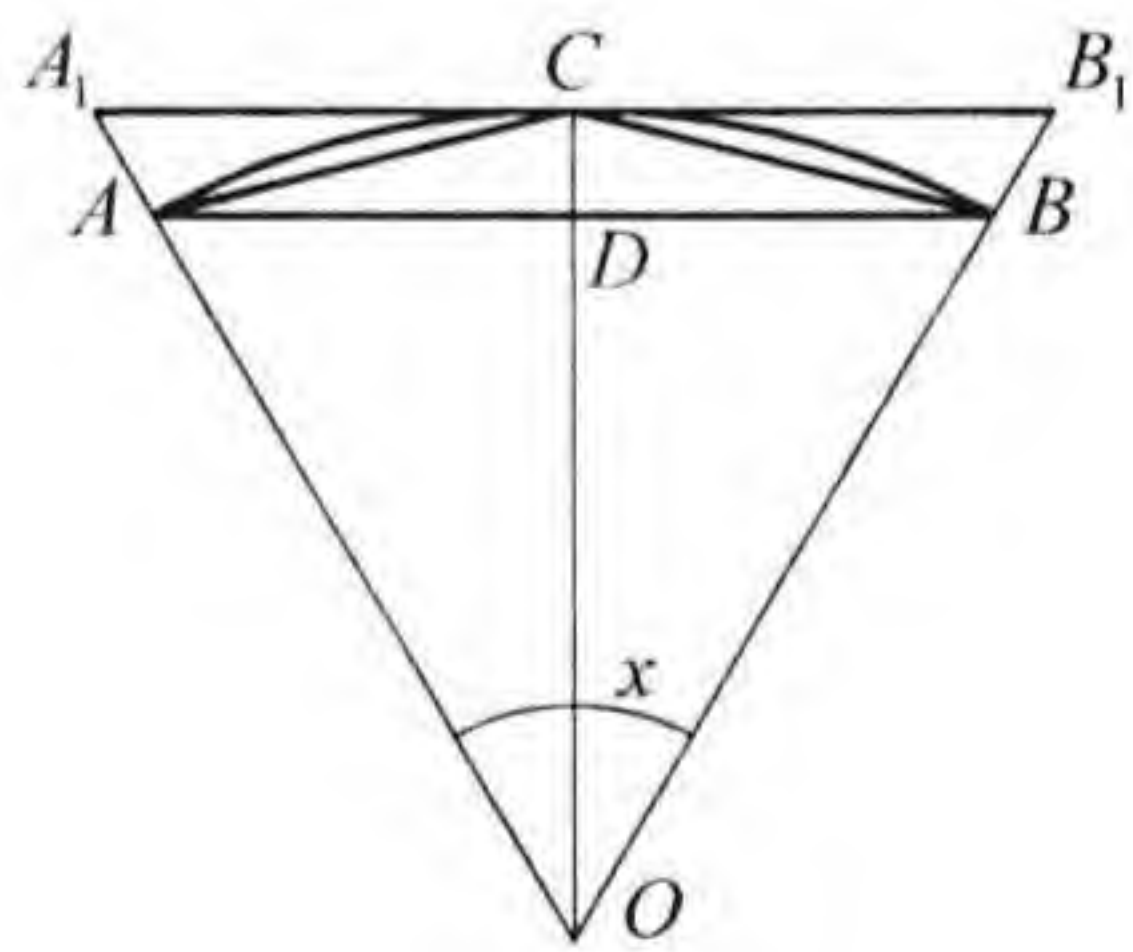


图 1.261

(2)  $CD=R-R\cos \frac{x}{2}=2R\sin^2 \frac{x}{4}$ . 因为  $\frac{CD}{x^2} \rightarrow \frac{R}{8}$ , 所以,拱高  $CD$  是关于  $x$  的二阶无穷小.

(3) 扇形  $AOB$  的面积  $S=\frac{1}{2}R^2x$ . 因为  $\frac{S}{x}=\frac{1}{2}R^2$ , 所以,  $S$  是关于  $x$  的一阶无穷小.

(4)  $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB| \cdot |CD|=2R^2 \sin \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4}$ . 因为  $\frac{S_{\triangle ABC}}{x^3} \rightarrow \frac{R^2}{16}$ , 所以,  $\triangle ABC$  的面积是关于  $x$  的三阶无穷小.

(5)  $A_1C=R\tan \frac{x}{2}$ . 于是,梯形  $ABB_1A_1$  的面积

$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin^2 \frac{x}{2} \left( 2R\sin \frac{x}{2} + 2R\tan \frac{x}{2} \right) = 2R^2 \sin^3 \frac{x}{2} + 2R^2 \sin^2 \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2}.$$



因为  $\frac{A_0}{x^3} \rightarrow \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{4} = \frac{R^2}{2}$ , 所以, 面积  $A_0$  是关于  $x$  的三阶无穷小.

(6) 弓形  $ABC$  的面积

$$p = \frac{1}{2}R^2x - \frac{1}{2} \cdot 2R\sin \frac{x}{2} \cdot R\cos \frac{x}{2} = \frac{R^2}{2}(x - \sin x).$$

由于  $x - \sin x$  是奇函数, 故只需考虑  $x \rightarrow +0$  时的情形. 当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时, 有

$$x - \sin x \leq \tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x}(1 - \cos x) = \frac{\sin x \cdot 2\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x} = O^*(x^3);$$

而由  $x \geq 2\sin \frac{x}{2}$ , 又有

$$x - \sin x \geq 2\sin \frac{x}{2} - \sin x = 2\sin \frac{x}{2} \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) = 4\sin \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4} = O^*(x^3).$$

于是, 当  $x$  大于 0 而充分小时, 存在两常数  $A > 0, B > 0$ , 使

$$Ax^3 \leq x - \sin x \leq Bx^3,$$

即弓形面积  $p$  基本上是关于  $x$  的三阶无穷小. 实际上, 今后将会看到, 有  $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$  (但要用到导数的概念).

**【646】** 设  $o(f(x))$  为当  $x \rightarrow a$  时比函数  $f(x)$  有较低阶的任意无穷大函数, 且  $O(f(x))$  为  $x \rightarrow a$  时与函数  $f(x)$  同阶 (在广义的意义上) 的任意无穷大函数, 其中  $f(x) > 0$ .

- 证明: (1)  $o\{o[f(x)]\} = o[f(x)]$ ; (2)  $O\{o[f(x)]\} = o[f(x)]$ ;  
 (3)  $o\{O[f(x)]\} = o[f(x)]$ ; (4)  $O\{O[f(x)]\} = O[f(x)]$ ;  
 (5)  $O[f(x)] + o[f(x)] = O[f(x)]$ ; (6)  $O[f(x)] \cdot O[g(x)] = O[f(x)g(x)]$ .

**解题思路** (2) 由 133 题(2)的结果, 有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{O\{o[f(x)]\}}{f(x)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{O\{o[f(x)]\}}{o[f(x)]} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{o[f(x)]}{f(x)} = 0,$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{O\{o[f(x)]\}}{f(x)} = 0.$$

(3) 利用 133 题(2)的结果, 仿(2).

(4) 利用 132 题(2)的结果.

(5) 利用 131 题(2)的结果.

(6) 利用 132 题(2)的结果.

**证** (1) 因为

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{o[f(x)]\}}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{o\{o[f(x)]\}}{o[f(x)]} \cdot \frac{o[f(x)]}{f(x)} \right\} = 0,$$

$$\text{故 } o\{o[f(x)]\} = o[f(x)].$$

(2) 由 133 题(2)的结果, 有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{O\{o[f(x)]\}}{f(x)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{O\{o[f(x)]\}}{o[f(x)]} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{o[f(x)]}{f(x)} = 0,$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{O\{o[f(x)]\}}{f(x)} \text{ 存在且等于 } 0. \text{ 因此, } O\{o[f(x)]\} = o[f(x)].$$

(3) 仍由 133 题(2)的结果, 有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{o\{O[f(x)]\}}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{o\{O[f(x)]\}}{O[f(x)]} \right| \cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{O[f(x)]}{f(x)} = 0,$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{O[f(x)]\}}{f(x)} = 0, \text{ 即 } o\{O[f(x)]\} = o[f(x)].$$

(4) 由 132 题(2)的结果, 有



$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O\{O[f(x)]\}|}{f(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O\{O[f(x)]\}|}{O[f(x)]} \cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{O[f(x)]}{f(x)} < +\infty,$$

故  $O\{O[f(x)]\} = O[f(x)]$ .

(5) 由 131 题(2), 有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)] + o[f(x)]|}{f(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} + \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|o[f(x)]|}{f(x)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} < +\infty.$$

故  $O[f(x)] + o[f(x)] = O[f(x)]$ .

(6) 由 132 题(2), 有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]O[g(x)]|}{f(x)g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} \cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[g(x)]|}{g(x)} < +\infty,$$

故  $O[f(x)]O[g(x)] = O[f(x)g(x)]$ .

**【647】** 设  $x \rightarrow +0$  和  $n > 0$ . 证明:

(1)  $CO(x^n) = O(x^n)$  ( $C$  为常数);

(2)  $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$  ( $n < m$ );

(3)  $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$ .

证 (1) 由

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|CO(x^n)|}{x^n} = |C| \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty,$$

故  $CO(x^n) = O(x^n)$ .

(2) 由

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n) + O(x^m)|}{x^n} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} + \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \left( \frac{|O(x^m)|}{x^m} \cdot x^{m-n} \right) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty,$$

故  $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$  ( $n < m$ ).

(3) 由

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)O(x^m)|}{x^{n+m}} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} \cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^m)|}{x^m} < +\infty,$$

得知  $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$ .

**【648】** 设  $x \rightarrow +\infty$  和  $n > 0$ . 证明:

(1)  $CO(x^n) = O(x^n)$ ;

(2)  $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$  ( $n > m$ );

(3)  $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$ .

证 (1) 与 (3) 同 647 题(1) 与 (3) 的证明 (只要将  $x \rightarrow +0$  换为  $x \rightarrow +\infty$ ). 下证(2): 由于

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n) + O(x^m)|}{x^n} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n)|}{x^n} + \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{|O(x^m)|}{x^m} \cdot \frac{1}{x^{n-m}} \right) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty,$$

故  $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$  ( $n > m$ ).

**【649】** 证明符号  $\sim$  具有下列性质: (1) 反射性:  $\varphi(x) \sim \varphi(x)$ ; (2) 对称性: 若  $\varphi(x) \sim \psi(x)$ , 则  $\psi(x) \sim \varphi(x)$ ; (3) 传递性: 若  $\varphi(x) \sim \psi(x)$  及  $\psi(x) \sim \chi(x)$ , 则  $\varphi(x) \sim \chi(x)$ .

证 (1) 因为  $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)} \equiv 1 \rightarrow 1$ , 所以,  $\varphi(x) \sim \varphi(x)$ .

(2) 因为  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \rightarrow 1$ , 所以,  $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \rightarrow 1$ . 即: 若  $\varphi(x) \sim \psi(x)$ , 则  $\psi(x) \sim \varphi(x)$ .

(3) 因为  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \rightarrow 1$ ,  $\frac{\psi(x)}{\chi(x)} \rightarrow 1$ , 所以,  $\frac{\varphi(x)}{\chi(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{\psi(x)}{\chi(x)} \rightarrow 1$ , 即  $\varphi(x) \sim \chi(x)$ .

**【650】** 设  $x \rightarrow +0$ , 证明下列等式:

$$(1) 2x - x^2 = O^*(x); \quad (2) x \sin \sqrt{x} = O^*(x^{\frac{3}{2}}); \quad (3) x \sin \frac{1}{x} = O(|x|);$$



$$(4) \ln x = o\left(\frac{1}{x^\epsilon}\right) (\epsilon > 0); \quad (5) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}; \quad (6) \arctan \frac{1}{x} = O(1);$$

$$(7) (1+x)^n = 1 + nx + o(x).$$

证 由题设  $x \rightarrow +0$ , 于是,

$$(1) \text{ 因为 } \frac{2x-x^2}{x} \rightarrow 2, \text{ 所以, } 2x-x^2 = O^*(x).$$

$$(2) \text{ 因为 } \frac{x \sin \sqrt{x}}{x \sqrt{x}} \rightarrow 1, \text{ 所以, } x \sin \sqrt{x} = O^*(x^{\frac{3}{2}}).$$

$$(3) \text{ 因为 } \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| (x \neq 0), \text{ 所以, } x \sin \frac{1}{x} = O(|x|).$$

$$(4) \text{ 因为 } \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\epsilon}} = x^\epsilon \ln x \rightarrow 0, \text{ 所以, } \ln x = o\left(\frac{1}{x^\epsilon}\right).$$

$$(5) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x^{\frac{1}{8}}} = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x^{\frac{3}{4}} + \sqrt{x^{\frac{1}{2}} + 1}} = 1, \text{ 所以, } \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim x^{\frac{1}{8}}.$$

$$(6) \text{ 因为 } \left| \arctan \frac{1}{x} \right| \leq \frac{\pi}{2} (x \neq 0), \text{ 所以, } \arctan \frac{1}{x} = O(1).$$

$$(7) \text{ 因为 } \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x} = \frac{1}{2}n(n-1)x + \cdots \rightarrow 0, \text{ 所以, } (1+x)^n - 1 - nx = o(x), \text{ 即}$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + o(x).$$

【651】 设  $x \rightarrow +\infty$ . 证明下列等式:

$$(1) 2x^3 - 3x^2 + 1 = O^*(x^3); \quad (2) \frac{x+1}{x^2+1} = O^*\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$(3) x + x^2 \sin x = O(x^2); \quad (4) \frac{\arctan x}{1+x^2} = O^*\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$(5) \ln x = o(x^\epsilon) (\epsilon > 0); \quad (6) x^p e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$(7) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}; \quad (8) x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2.$$

证 由题设  $x \rightarrow +\infty$ , 于是,

$$(1) \text{ 因为 } \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3} \rightarrow 2, \text{ 所以, } 2x^3 - 3x^2 + 1 = O^*(x^3).$$

$$(2) \text{ 因为 } \frac{\frac{x+1}{x^2+1}}{\frac{1}{x}} = \frac{x(x+1)}{x^2+1} \rightarrow 1, \text{ 所以, } \frac{x+1}{x^2+1} = O^*\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$(3) \text{ 因为 } \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x + x^2 \sin x|}{x^2} = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} + \sin x \right| = 1 < +\infty, \text{ 所以, } x + x^2 \sin x = O(x^2).$$

$$(4) \text{ 因为 } \frac{\frac{\arctan x}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \text{ 所以, } \frac{\arctan x}{1+x^2} = O^*\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

$$(5) \text{ 因为 } \frac{\ln x}{x^\epsilon} \rightarrow 0, \text{ 所以, } \ln x = o(x^\epsilon).$$

$$(6) \text{ 因为 } \frac{x^p e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^{p+2}}{e^x} \rightarrow 0, \text{ 所以, } x^p e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

$$(7) \text{ 因为 } \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} \rightarrow 1, \text{ 所以, } \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}.$$



(8) 因为  $\frac{x^2 + x \ln^{100} x}{x^2} = 1 + \frac{\ln^{100} x}{x} \rightarrow 1$ , 所以,  $x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2$ .

**【652】** 证明当  $x$  充分大时, 下边的不等式成立:

(1)  $x^2 + 10x + 100 < 0.001x^3$ ; (2)  $\ln^{1000} x < \sqrt{x}$ ; (3)  $x^{10} e^x < e^{2x}$ .

证 (1) 因为当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\frac{x^2 + 10x + 100}{0.001x^3} \rightarrow 0$  所以, 当  $x$  充分大以后, 有  $\frac{x^2 + 10x + 100}{0.001x^3} < 1$ , 即  $x^2 + 10x + 100 < 0.001x^3$ .

(2) 因为当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\frac{\ln^{1000} x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$  所以, 当  $x$  充分大以后, 有  $\frac{\ln^{1000} x}{\sqrt{x}} < 1$ , 即  $\ln^{1000} x < \sqrt{x}$ .

(3) 因为当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\frac{x^{10} e^x}{e^{2x}} = \frac{x^{10}}{e^x} \rightarrow 0$  所以, 当  $x$  充分大后, 有  $\frac{x^{10} e^x}{e^{2x}} < 1$ , 即  $x^{10} e^x < e^{2x}$ .

**【653】** 设  $x \rightarrow 0$ . 分出下列函数的形如  $Cx^n$  ( $C$  为常数) 的主部, 并求其对于无穷小变量  $x$  的阶:

(1)  $2x - 3x^3 + x^5$ ; (2)  $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ ; (3)  $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$ ; (4)  $\tan x - \sin x$ .

解 所谓函数  $f(x)$  的主部  $g(x)$ , 即满足

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \quad \text{或} \quad f(x) = g(x) + o(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

(1) 因为  $\frac{2x - 3x^3 + x^5}{2x} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0)$ , 故其主部为  $2x$ , 它对于无穷小量  $x$  是一阶的.

(2) 因为  $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0)$ , 故其主部为  $x$ , 它对于  $x$  是一阶的.

(3) 因为  $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x} = \frac{3x^2 - 8x^3}{\sqrt[6]{(1+2x)^{15}} + \sqrt[6]{(1-2x)^{12}}(1-3x)^2 + \dots + \sqrt[6]{(1-3x)^{10}}}$ ,

于是,  $\frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{\frac{x^2}{2}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0)$  故其主部为  $\frac{x^2}{2}$ , 它对于  $x$  是二阶的.

(4) 因为  $\tan x - \sin x = \frac{2}{\cos x} \sin x \sin^2 \frac{x}{2}$ , 于是,  $\frac{\tan x - \sin x}{\frac{x^3}{2}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0)$ ,

故其主部为  $\frac{x^3}{2}$ , 它对于  $x$  是三阶的.

**【654】** 设  $x \rightarrow +0$ , 证明: 无穷小量 (1)  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ , (2)  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ,

无论对任何的  $n$ , 也不能与无穷小量  $x^n$  ( $n > 0$ ) 相比较. 即: 对于任何的  $n$ , 等式  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{x^n} = k$  都不成立, 式中  $k$  为异于零的有限量.

提示 (1) 注意  $\lim_{x \rightarrow +0} x^n \ln x = 0$ , (2) 注意  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0$ .

证 (1) 因为  $\lim_{x \rightarrow +0} x^n \ln x = 0^{*})$  ( $n > 0$ ), 于是,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\ln x} = \infty,$$

即  $\frac{1}{\ln x}$  不能与无穷小量  $x^n$  相比较 ( $x \rightarrow +0$ ).

(2) 因为  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0^{**})$  ( $n > 0$ ), 所以,  $e^{-\frac{1}{x^2}}$  不能与无穷小量  $x^n$  相比较 ( $x \rightarrow 0$ ).

\* ) 参看 592 题.

\*\* ) 参看 591 题.



**【655】** 设  $x \rightarrow 1$ , 分出下列函数的形如  $C(x-1)^n$  的主部, 并求其对于无穷小量  $(x-1)$  的阶:

(1)  $x^3 - 3x + 2$ ; (2)  $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ ; (3)  $\ln x$ ; (4)  $e^x - e$ ; (5)  $x^x - 1$ .

解 (1) 因为  $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ , 又

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{3(x-1)^2} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 1),$$

故其主部为  $3(x-1)^2$ , 它对于  $(x-1)$  是二阶无穷小.

(2) 因为  $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}$ , 又

$$\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{-\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{2}}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 1),$$

故其主部为  $\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{2}}$ , 它对于  $(x-1)$  是  $\frac{1}{3}$  阶无穷小.

(3) 因为  $\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 1)$ , 故其主部为  $x-1$ , 它对于  $(x-1)$  是一阶无穷小.

(4) 因为  $e^x - e = e(e^{x-1} - 1)$ , 又

$$\frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 1).$$

故其主部为  $e(x-1)$ , 它对于  $(x-1)$  是一阶无穷小.

(5) 因  $x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1$ , 又

$$\frac{e^{x \ln x} - 1}{x-1} = \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot \frac{x \ln[1+(x-1)]}{x-1} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 1),$$

故其主部为  $x-1$ , 它对于  $(x-1)$  是一阶无穷小.

**【656】** 设  $x \rightarrow +\infty$ , 分出下列函数的形如  $Cx^n$  的主部, 并求其对于无穷大量  $x$  的阶:

(1)  $x^2 + 100x + 10000$ ; (2)  $\frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}$ ;

(3)  $\sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}$ ; (4)  $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$ .

解 (1) 因为  $x^2 + 100x + 10000 \sim x^2 \quad (x \rightarrow +\infty)$ , 故其主部为  $x^2$ , 它对于无穷大量  $x$  是二阶的.

(2) 因为  $\frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1} = \frac{2x^5}{2x^5 - 6x^3 + 2x^2} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow +\infty)$ , 故其主部为  $2x^2$ , 它对于无穷大量  $x$  是二阶的.

(3)  $\sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x} = x^{\frac{2}{3}} \left( \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} \right)$ , 于是,  $\frac{\sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow +\infty)$ ,

故其主部为  $x^{\frac{2}{3}}$ , 它对于无穷大量  $x$  是  $\frac{2}{3}$  阶的.

(4) 因为  $\frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow +\infty)$ , 故其主部为  $\sqrt[8]{x}$ , 它对于无穷大量  $x$  是  $\frac{1}{8}$  阶的.

**【657】** 设  $x \rightarrow +\infty$ . 分出下列函数的形如  $C\left(\frac{1}{x}\right)^n$  的主部, 并求其对于无穷小量  $\frac{1}{x}$  的阶:

(1)  $\frac{x+1}{x^4+1}$ ; (2)  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ ; (3)  $\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ ; (4)  $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ .

解 (1) 因为  $\frac{\frac{x+1}{x^4+1}}{\left(\frac{1}{x}\right)^3} = \frac{x^3(x+1)}{x^4} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow +\infty)$ , 故其主部为  $\left(\frac{1}{x}\right)^3$ , 它对于无穷小量  $\frac{1}{x}$  是 3 阶的.



(2) 因为  $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \rightarrow 1 \ (x \rightarrow +\infty)$ , 故其主部为  $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ , 它对于无穷小量  $\frac{1}{x}$  是  $\frac{1}{2}$

阶的.

$$\begin{aligned} (3) \quad \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x} &= \frac{2\sqrt{x(x+2)} - 2(x+1)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x} + 2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{-2}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x} + 2\sqrt{x+1})(\sqrt{x(x+2)} + x + 1)}. \end{aligned}$$

于是, 由此得

$$\frac{\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1 + 2\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1 + \frac{1}{x}\right)} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

故其主部为  $-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$ , 它对于无穷小量  $\frac{1}{x}$  是  $\frac{3}{2}$  阶的.

(4) 因为  $\frac{\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \rightarrow (x \rightarrow +\infty)$ , 故其主部为  $\left(\frac{1}{x}\right)^2$ , 它对于无穷小量  $\frac{1}{x}$  为 2 阶的.

**【658】** 设  $x \rightarrow 1$ . 分出下列函数的形如  $C \left(\frac{1}{x-1}\right)^n$  的主部, 并求其对于无穷大量  $\frac{1}{x-1}$  的阶:

(1)  $\frac{x^2}{x^2-1}$ ; (2)  $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ; (3)  $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ ; (4)  $\frac{1}{\sin \pi x}$ ; (5)  $\frac{\ln x}{(1-x)^2}$ .

解 (1)  $\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$ , 于是,

$$\frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{\frac{1}{2(x-1)}} = \frac{2x^2}{x+1} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 1),$$

故其主部为  $\frac{1}{2(x-1)}$ , 它对于无穷大量  $\frac{1}{x-1}$  是一阶的.

(2) 因为  $\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}} \rightarrow 1 \ (x \rightarrow 1)$ , 故其主部为  $\sqrt{2} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$ , 它对于无穷大量  $\frac{1}{1-x}$  是  $\frac{1}{2}$  阶的.

(3) 因为  $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+x+x^2}}$ , 于是,

$$\frac{\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{1-x}}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 1),$$

故其主部为  $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$ , 它对于无穷大量  $\frac{1}{x-1}$  是  $\frac{1}{3}$  阶的.

(4) 因为  $\frac{\frac{1}{\sin \pi x}}{\frac{1}{\pi(1-x)}} = \frac{\pi(1-x)}{\sin \pi(1-x)} \rightarrow 1 \ (x \rightarrow 1)$ , 故其主部为  $\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1-x}\right)$ , 它对于无穷大量  $\frac{1}{x-1}$  是一阶的.

(5) 因为  $\frac{\frac{\ln x}{(1-x)^2}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1} \rightarrow 1 \ (x \rightarrow 1)$ , 故其主部为  $\frac{1}{x-1}$ , 它对于无穷大量  $\frac{1}{x-1}$  是一阶的.



【659】 设  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f_n(x) = x^n$  ( $n=1, 2, \dots$ ). 证明:

(1)  $f_n(x)$  中每一个函数都比其前面的一个函数  $f_{n-1}(x)$  增加较快;

(2) 函数  $e^x$  比函数  $f_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 中的每一个都增加得较快.

证 (1) 因为  $\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} = x \rightarrow +\infty$ , 所以,  $f_n(x)$  比  $f_{n-1}(x)$  增加较快.

(2) 因为  $\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow +\infty$ ),  $n$  为任一固定的正整数, 所以,  $e^x$  比  $f_n(x)$  中的每一个都增加得较快.

【660】 设  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$  ( $n=1, 2, \dots$ ). 证明:

(1) 函数  $f_n(x)$  中每一个都比其前面的一个函数  $f_{n-1}(x)$  增加得较慢;

(2) 函数  $f(x) = \ln x$  比函数  $f_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 中的每一个都增加得较慢.

证 (1) 因为  $\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} = x^{-\frac{1}{n(n-1)}} \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow +\infty$ ), 所以,  $f_n(x)$  比  $f_{n-1}(x)$  增加得较慢.

(2) 因为  $\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} \rightarrow 0^+$  ( $x \rightarrow +\infty$ ), 所以,  $\ln x$  比  $f_n(x)$  中的每一个增加得较慢.

\* ) 利用 565 题的结果.

【661】 证明: 对于任意的函数序列

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (x_0 < x < +\infty).$$

可举出一函数  $f(x)$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时它比函数  $f_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 中的每一个都增加得较快.

证 取正整数  $N > x_0$ . 定义  $x_0 < x < +\infty$  上的函数  $f(x)$  如下:

$$f(x) = \begin{cases} n \left( \sum_{k=1}^n |f_k(x)| + 1 \right), & n \leq x < n+1, (n = N, N+1, \dots); \\ 0, & x_0 < x < N. \end{cases}$$

于是, 对任何正整数  $n$ , 当  $x > \max\{N, n\}$  时, 有

$$\left| \frac{f_n(x)}{f(x)} \right| = \frac{|f_n(x)|}{[x] \left( \sum_{k=1}^{[x]} |f_k(x)| + 1 \right)} < \frac{1}{[x]},$$

其中  $[x]$  表  $x$  的整数部分. 由此可知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{f(x)} = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

故当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x)$  比  $f_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 中的每一个都增加得较快.

## § 7. 函数的连续性

1° 函数的连续性 设

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (1)$$

即, 函数  $f(x)$  对  $x = x_0$  有定义, 并且对于每一个  $\epsilon > 0$ , 都存在  $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ , 使当  $|x - x_0| < \delta$  时, 对于  $f(x)$  的有意义的一切值, 不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

都成立, 则称函数  $f(x)$  当  $x = x_0$  时 (或在点  $x_0$ ) 是连续的.

若函数  $f(x)$  在所给的集合  $X$  (开区间, 闭区间等等) 上的每一点都是连续的, 则称函数  $f(x)$  在集合  $X = \{x\}$  上是连续的.

若某值  $x = x_0$  属于函数  $f(x)$  的定义域  $X = \{x\}$  或为此集合的聚点, 而当  $x = x_0$  时, 等式 (1) 不成立 [即, (i) 数  $f(x_0)$  不存在, 换言之, 函数在点  $x = x_0$  没有定义; 或 (ii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在; 或 (iii) 公式 (1) 的两







**【663】** 需要制造一块边长  $x_0=10\text{cm}$  的正方形金属板. 其面积  $y=x^2$  与预计值  $y_0=100\text{cm}^2$  的差不可超过: (1)  $\pm 1\text{cm}^2$ ; (2)  $\pm 0.1\text{cm}^2$ ; (3)  $\pm 0.01\text{cm}^2$ ; (4)  $\pm \epsilon\text{cm}^2$ , 问其边  $x$  可以在什么范围内变化?

解 (1) 要  $|x^2-100|<1$ , 只要  $99<x^2<101$ . 解之, 得  $9.95<x<10.05$ .

(2) 要  $|x^2-100|<0.1$ , 只要  $\sqrt{100-0.1}<x<\sqrt{100+0.1}$ . 解之, 得  $9.995<x<10.005$ .

(3) 要  $|x^2-100|<0.01$ , 只要  $\sqrt{100-0.01}<x<\sqrt{100+0.01}$ . 解之, 得  $9.9995<x<10.0005$ .

(4) 要  $|x^2-100|<\epsilon$ , 只要  $\sqrt{100-\epsilon}<x<\sqrt{100+\epsilon}$ . \*

\* ) 本来,  $x$  处应记成  $|x|$ , 在此仅考虑点  $x=10$  处, 故在其近傍  $x$  值恒为正, 因此, 不必取绝对值了.

**【664】** 立方体的边介于  $2\text{m}$  和  $3\text{m}$  之间, 在测量此立方体边长  $x$  时容许怎样的绝对误差  $\Delta$ , 方可使计算立方体体积时的绝对误差不超过: (1)  $\epsilon=0.1\text{m}^3$ ; (2)  $\epsilon=0.01\text{m}^3$ ; (3)  $\epsilon=0.001\text{m}^3$ .

解 要  $|x_1^3-x_2^3|<\epsilon$ , 只要  $|x_1-x_2|(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<\epsilon$ , 即只要  $|x_1-x_2|<\frac{\epsilon}{3\times 3^2}=\frac{\epsilon}{27}$ , 故有

(1)  $\Delta<\frac{0.1}{27}(\text{m})=3.7(\text{mm})$ ; (2)  $\Delta<\frac{0.01}{27}(\text{m})=0.37(\text{mm})$ ; (3)  $\Delta<\frac{0.001}{27}(\text{m})=0.037(\text{mm})$ .

**【665】** 问在  $x_0=100$  的尽可能多大的邻域内, 函数  $y=\sqrt{x}$  图像的纵坐标与  $y_0=10$  之差小于  $\epsilon=10^{-n}$  ( $n\geq 0$ )? 求当  $n=0, 1, 2, 3$  时这个邻域的大小.

解 要  $|\sqrt{x}-10|<10^{-n}$ , 只要

$$10[1-10^{-(n+1)}]<\sqrt{x}<10[1+10^{-(n+1)}],$$

即只要

$$100[1-10^{-(n+1)}]^2<x<100[1+10^{-(n+1)}]^2,$$

故得 (1) 当  $n=0$  时,  $81<x<121$ ;

(2) 当  $n=1$  时,  $98.01<x<102.01$ ;

(3) 当  $n=2$  时,  $98.8001<x<100.2001$ ;

(4) 当  $n=3$  时,  $99.980001<x<100.020001$ .

**【666】** 利用  $\langle \epsilon-\delta \rangle$  语言, 证明: 函数  $f(x)=x^2$  当  $x=5$  时连续.

填下表:

$\epsilon$	1	0.1	0.01	0.001	...
$\delta$					

提示 不妨设  $|x-5|<1$ , 即  $4<x<6$ .

证 任给  $\epsilon>0$ , 要  $|x^2-25|<\epsilon$ , 即

$$|x-5||x+5|<\epsilon, \quad (1)$$

不妨只就  $x=5$  的某一邻域来考虑. 例如, 取

$$|x-5|<1 \text{ 或 } 4<x<6,$$

从而有  $9<x+5<11$ . 于是, 只要  $|x-5|<\frac{\epsilon}{11}$ . 取  $\delta=\min\left(\frac{\epsilon}{11}, 1\right)$ , 则当  $|x-5|<\delta$  时, 恒有

$$|x^2-25|<\epsilon,$$

所以, 函数  $y=x^2$  在  $x=5$  处连续.

填下表:

$\epsilon$	1	0.1	0.01	0.001	$\epsilon$	...
$\delta$	0.09	0.009	0.0009	0.00009	$\min\left(\frac{\epsilon}{11}, 1\right)$	...

**【667】** 设  $f(x)=\frac{1}{x}$ ,  $\epsilon=0.001$ . 对于数值  $x_0=0.1; 0.01; 0.001; \dots$  求出最大的正数  $\delta=\delta(\epsilon, x_0)$ , 使得



可从不等式  $|x-x_0|<\delta$  推出不等式  $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ .

可否对于已知的  $\epsilon=0.001$  选出这样的  $\delta>0$ , 使它对于区间  $(0,1)$  中的一切  $x_0$  值都适用? 换言之, 可否找到这样的  $\delta>0$ , 使得只要  $|x-x_0|<\delta$ , 就有  $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ , 而不论  $x_0\in(0,1)$  为何值?

解 
$$|f(x)-f(x_0)|=\frac{|x-x_0|}{|x||x_0|}. \quad (1)$$

由于  $|x_0|-|x|\leq|x-x_0|$  或  $|x|\geq|x_0|-|x-x_0|$ , 故有

$$|f(x)-f(x_0)|\leq\frac{|x-x_0|}{|x_0|^2-|x_0||x-x_0|}$$

(在此, 我们已假设了  $|x-x_0|<|x_0|$ , 这一点是可以办到的).

于是只要  $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ , 只要  $\frac{|x-x_0|}{|x_0|^2-|x_0||x-x_0|}<\epsilon$ , 即只要  $|x-x_0|<\frac{\epsilon x_0^2}{1+\epsilon|x_0|}$ . 取  $\delta=\frac{\epsilon x_0^2}{1+\epsilon|x_0|}>0$ , 则当  $|x-x_0|<\delta$  时, 恒有  $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ .

我们取近似值,  $\delta=0.001x_0^2$  ( $\epsilon=0.001$ ).

当  $x_0=0.1$  时,  $\delta=10^{-5}$ ; 当  $x_0=0.01$  时,  $\delta=10^{-7}$ ; 当  $x_0=0.001$  时,  $\delta=10^{-9}$ .

由表达式(1)可知, 对于不论怎样小的正数  $\delta$ (固定), 则当  $|x-x_0|<\delta$  及  $x_0\rightarrow 0$  时,  $|f(x)-f(x_0)|$  可任意地大. 因此, 无法选出一个公共的正数  $\delta$  来.

**【668】** 用 $\langle\epsilon-\delta\rangle$ 语言以肯定的方式表达以下论断: 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  有定义, 而在这一点不连续.

解 存在一个  $\epsilon_0>0$ , 对于无论怎样小的  $\delta>0$ , 都有某  $x$  满足  $|x-x_0|<\delta$ , 但  $|f(x)-f(x_0)|\geq\epsilon_0$ .

**【669】** 设对于某些数  $\epsilon>0$ , 可找到对应的数  $\delta=\delta(\epsilon, x_0)>0$ , 使得只要  $|x-x_0|<\delta$ , 则

$$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon.$$

若: (1) 诸数  $\epsilon$  形成一有限的集合; (2) 数  $\epsilon$  组成分数  $\epsilon=\frac{1}{2^n}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 的无穷集合, 则可否断定函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续?

提示 (1) 不能. (2) 可以. 可取充分大的  $n$ , 使  $\frac{1}{2^n}<\epsilon$ .

解 (1) 不能. 因为  $\epsilon$  不能任意地小.

(2) 可以. 事实上, 对于任给的  $\epsilon>0$ , 总可以取充分大的  $n$ , 使  $\frac{1}{2^n}<\epsilon$ . 于是, 存在  $\delta>0$ , 使当  $|x-x_0|<\delta$

时, 恒有  $|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2^n}<\epsilon$ .

**【670】** 设已知函数  $f(x)=x+0.001[x]$ . 证明: 对于每一个  $\epsilon>0.001$ , 可以选出  $\delta=\delta(\epsilon, x)>0$ , 使得只要  $|x'-x|<\delta$ , 则  $|f(x')-f(x)|<\epsilon$ . 然而当  $0<\epsilon\leq 0.001$  时, 对于所有的  $x$  值都无法选出这样的  $\delta$ .

这个函数的连续性在哪些点遭到破坏?

证 当  $\epsilon>0.001$ , 且  $|x'-x|<1$  时,

$$|f(x')-f(x)|=|x-x'+0.001([x]-[x'])|\leq|x-x'|+0.001$$

此时只要取  $\delta=\min\{\epsilon-0.001, 1\}$ , 则当  $|x-x'|<\delta$  时恒有  $|f(x)-f(x')|<\epsilon$ .

当  $0<\epsilon\leq 0.001$ , 且  $x_0$  不为整数时, 有整数  $n$ , 使得  $n<x_0<n+1$ . 只要取

$$\delta=\min(x_0-n, n+1-x_0, \epsilon)>0,$$

则当  $|x-x_0|<\delta$  时, 有  $[x]=[x_0]$ . 从而,

$$|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta\leq\epsilon.$$

而当  $x_0=n$  为整数时, 则对于无论怎样取正数  $\delta$ , 总有  $x$  满足  $x<x_0$  及  $x_0-x<\delta$ , 此时

$$|f(x)-f(x_0)|=(x_0-x)+0.001>\epsilon.$$

于是, 函数  $f(x)$  在  $x=n$ (整数)的点失去了连续性.

**【671】** 设对于每一个充分小的数  $\delta>0$ , 都存在  $\epsilon=\epsilon(\delta, x_0)>0$ , 使得只要  $|x-x_0|<\delta$ , 则不等式  $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$  成立. 由此是否可知函数  $f(x)$  在  $x=x_0$  连续? 这些不等式描述了函数  $f(x)$  的什么性



质?

提示 不能.

解 不能. 因为  $\epsilon$  是由  $\delta$  而确定的, 它不能任意小. 因此, 只能说明函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的近傍有界. 事实上,  $|f(x)| < |f(x_0)| + \epsilon$ .

【672】 设对于每一个数  $\epsilon > 0$ , 都存在数  $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ , 使得若  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ , 则  $|x - x_0| < \delta$ . 由此是否可知函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  连续? 这些不等式描述了函数的什么性质?

解 不对, 若函数  $f(x)$  在有限的区间  $(a, b)$  内有定义, 则只要取  $\delta = 2(b - a)$ , 不等式  $|x - x_0| < \delta$  恒成立. 若  $(a, b)$  为无穷区间, 例如, 设  $b = +\infty$ , 则必然

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty.$$

事实上, 若不然, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = c < +\infty.$$

于是, 存在数列  $x_n > a$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $x_n \rightarrow +\infty$  使  $f(x_n) \rightarrow c$ . 由此可知数列  $f(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 有界, 令

$$\epsilon_0 = \sup \{ |f(x_n)| + |f(x_0)| + 1 \} > 0.$$

显然

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon_0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

但是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = +\infty,$$

故对此  $\epsilon_0 > 0$ , 不存在对应的  $\delta = \delta(\epsilon_0, x_0) > 0$ , 此与假定矛盾. 由此可知, 必有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$ .

【673】 设对于每一个数  $\delta > 0$ , 都存在数  $\epsilon = \epsilon(\delta, x_0) > 0$ , 使得若  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ , 则  $|x - x_0| < \delta$ . 由此是否可知函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  连续? 这些不等式描述了函数的什么性质?

解 不能. 它只说明了反函数的连续性和单值性.

【674】 利用《 $\epsilon - \delta$ 》语言证明下列函数的连续性:

- (1)  $ax + b$ ;      (2)  $x^2$ ;      (3)  $x^3$ ;      (4)  $\sqrt{x}$ ;  
(5)  $\sqrt[3]{x}$ ;      (6)  $\sin x$ ;      (7)  $\cos x$ ;      (8)  $\arctan x$ .

证 (1) 设  $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ .

任给  $\epsilon > 0$ , 要  $|(ax + b) - (ax_0 + b)| < \epsilon$ , 只要

$$|x - x_0| < \frac{\epsilon}{|a|} \quad (a \neq 0).$$

取  $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$ , 则当  $|x - x_0| < \delta$  时, 恒有  $|(ax + b) - (ax_0 + b)| < \epsilon$ .

由于  $x_0$  的任意性, 所以,  $f(x) = ax + b$  在  $(-\infty, +\infty)$  内点点连续.

$$(2) |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq |x - x_0| (|x - x_0| + 2|x_0|).$$

任给  $\epsilon > 0$ , 要  $|x^2 - x_0^2| < \epsilon$ , 只要

$$|x - x_0|^2 + 2|x_0| |x - x_0| - \epsilon < 0,$$

即只要  $|x - x_0| < \sqrt{x_0^2 + \epsilon} - |x_0|$ .

取  $\delta = \sqrt{x_0^2 + \epsilon} - |x_0| > 0$ , 则当  $|x - x_0| < \delta$  时, 恒有  $|x^2 - x_0^2| < \epsilon$ .

这就证明了  $f(x) = x^2$  在  $(-\infty, +\infty)$  内的连续性.

(3) 由于  $|x^3 - x_0^3| = |x - x_0| |x^2 + x_0x + x_0^2| \leq |x - x_0| (|x^2| + |x| |x_0| + |x_0|^2)$ , 不妨设  $|x - x_0| < 1$ , 则有

$$|x| < 1 + |x_0| \quad \text{及} \quad |x^3 - x_0^3| < |x - x_0| (1 + 3|x_0| + 3x_0^2).$$

任给  $\epsilon > 0$ , 取  $\delta = \min \left( 1, \frac{\epsilon}{1 + 3|x_0| + 3x_0^2} \right)$ , 则当  $|x - x_0| < \delta$  时, 恒有  $|x^3 - x_0^3| < \epsilon$ .



由于  $x_0$  的任意性, 这就证明了  $x^3$  在  $(-\infty, +\infty)$  内的连续性.

(4) 由于  $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$  ( $x_0 > 0$ ), 任给  $\epsilon > 0$ , 取  $\delta = \epsilon \sqrt{x_0}$ , 即可得证.

若  $x_0 = 0$ , 则取  $\delta = \epsilon^2$ .

(5) 由于  $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{|x^{\frac{2}{3}} + (xx_0)^{\frac{1}{3}} + x_0^{\frac{2}{3}}|} < \frac{|x - x_0|}{|\sqrt[3]{x_0^2}|}$  ( $x_0 \neq 0, xx_0 > 0$ ),

取  $\delta = \min\{|x_0|, \epsilon \sqrt[3]{x_0^2}\}$  即可得证.

若  $x_0 = 0$ , 则取  $\delta = \epsilon^3$ .

(6) 由于  $|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|$ , 取  $\delta = \epsilon$ , 即可得证.

(7) 由于  $|\cos x - \cos x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \sin \frac{x + x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|$ , 取  $\epsilon = \delta$ , 即可得证.

(8) 由  $|\arctan x - \arctan x_0| = \left| \arctan \frac{x - x_0}{1 + xx_0} \right|$ , 又因  $|y| < \frac{\pi}{2}$  时,  $|y| \leq |\tan y|$ , 故有

$$|\arctan x - \arctan x_0| \leq \left| \frac{x - x_0}{1 + xx_0} \right|.$$

当  $x_0 > 0$  时, 不妨就  $|x - x_0| < |x_0| = x_0$  进行讨论, 此时  $|1 + xx_0| > 1$ , 则

$$|\arctan x - \arctan x_0| \leq |x - x_0|.$$

当  $x_0 < 0$  时可同样讨论.

所以, 取  $\delta = \min(\epsilon, |x_0|)$  ( $x_0 = 0$  时, 取  $\delta = \epsilon$ ), 则当  $|x - x_0| < \delta$  时, 恒有

$$|\arctan x - \arctan x_0| < \epsilon.$$

由于  $x_0$  的任意性, 所以,  $\arctan x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续.

研究下列函数的连续性并绘出其图像:

**【675】**  $f(x) = |x|$ .

提示 取  $\delta = \epsilon$  即可.

解  $||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$ ,

取  $\delta = \epsilon$ , 即可证得在任一点的连续性, 如图 1.263 所示.

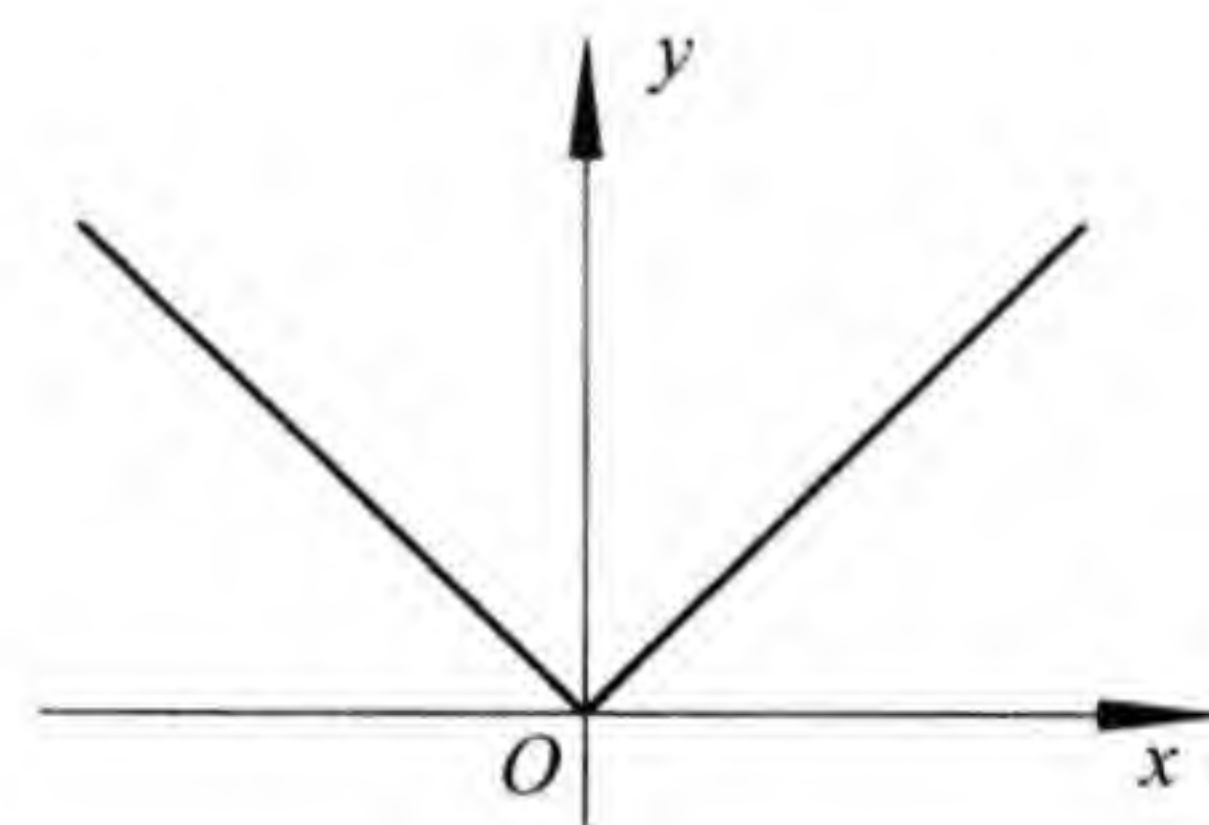


图 1.263

**【676】**  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2; \\ A, & x = 2. \end{cases}$

提示 应就  $A = 4$  及  $A \neq 4$  分别讨论函数  $f(x)$  的连续性.

解  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$ .

因此, 当  $A = 4$  时,  $f(x)$  在点  $x = 2$  处连续; 而当  $A \neq 4$  时,  $f(x)$  在点  $x = 2$  处不连续. 至于在点  $x \neq 2$  处显然是连续的, 并且  $f(x) = x + 2$  ( $x \neq 2$ ).

如图 1.264 所示.

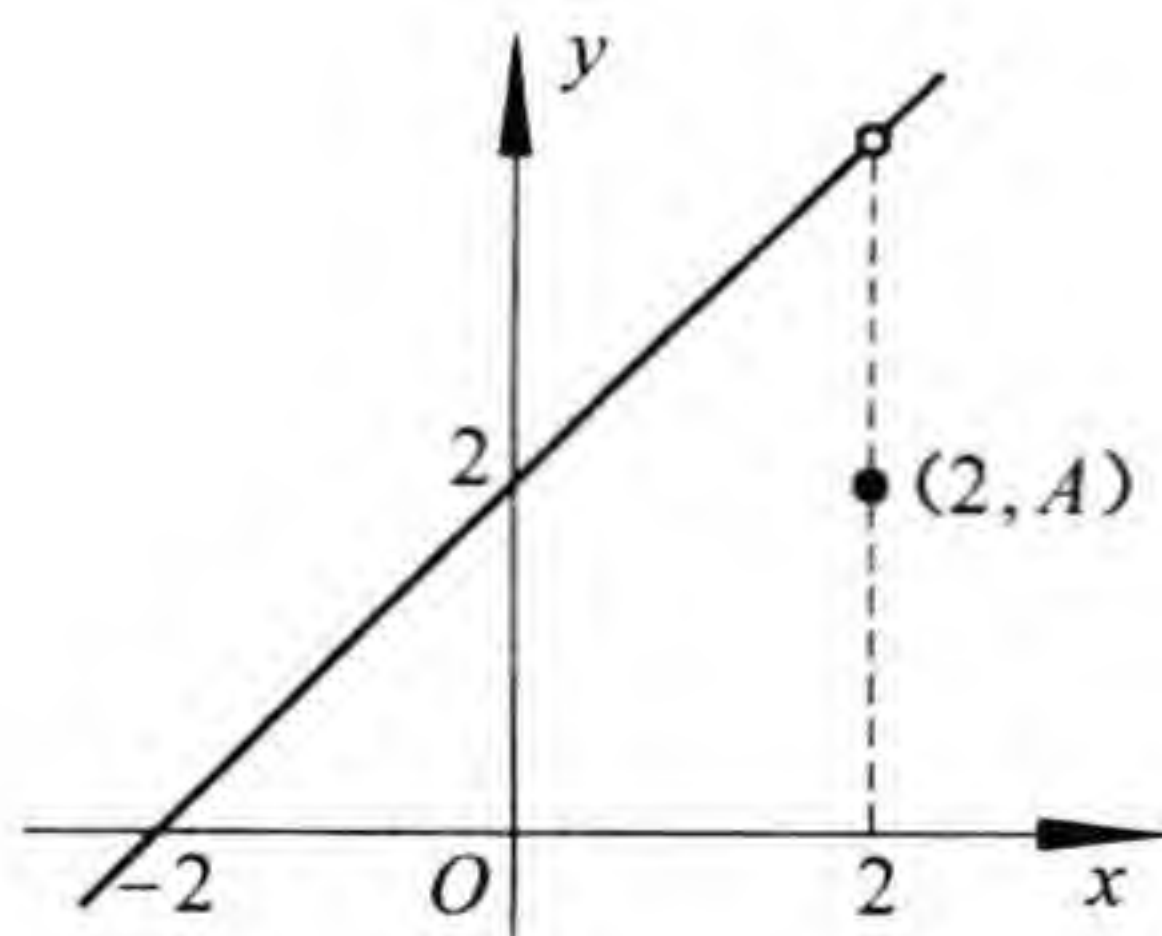


图 1.264



【677】  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & x \neq -1, \\ \text{任意值}, & x = -1. \end{cases}$

提示 注意到  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ , 即知函数  $f(x)$  在点  $x = -1$  处不连续.

解 因为  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ , 故函数  $f(x)$  在点  $x = -1$  处不连续.

在点  $x \neq -1$  处函数  $f(x)$  显然是连续的.

如图 1.265 所示.

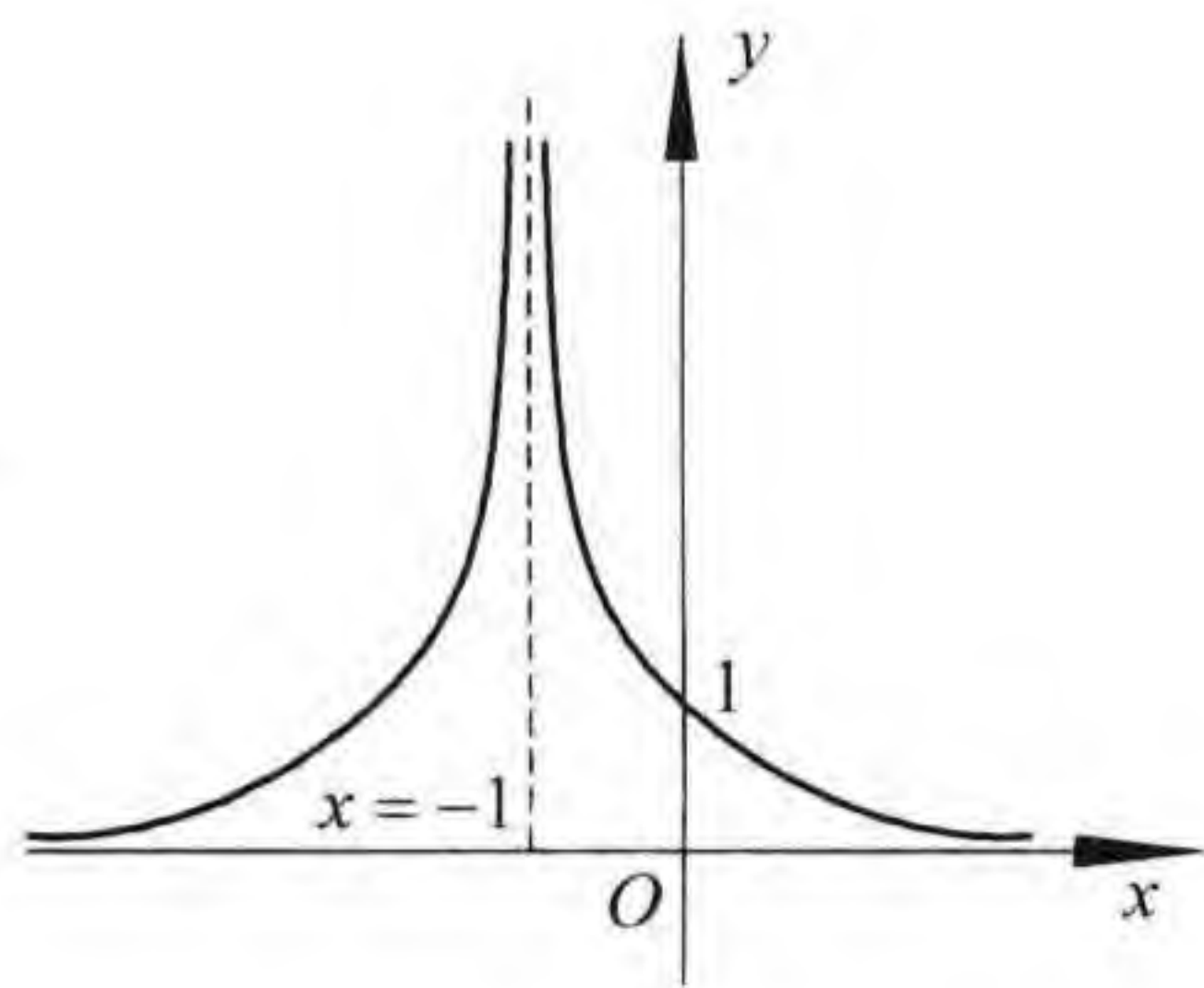


图 1.265

【678】 (1)  $f_1(x) = \begin{cases} \left| \frac{\sin x}{x} \right|, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

(2)  $f_2(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

提示 (1) 由连续定义易知函数  $f_1(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续. (2)  $\lim_{x \rightarrow +0} f_2(x) = 1$  及  $\lim_{x \rightarrow -0} f_2(x) = -1$ .

解 (1) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 1 = f_1(0)$ , 故  $f_1(x)$  在点  $x = 0$  处连续. 又显知  $f_1(x)$  在点  $x \neq 0$  处连续. 因此  $f_1(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内点点连续.

(2) 因  $\lim_{x \rightarrow +0} f_2(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} f_2(x) = -1$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)$  不存在, 因此  $f_2(x)$  在点  $x = 0$  处不连续, 其余各点均连续.

其中(1)的图像关于  $Oy$  轴对称(图 1.266), 而(2)的图像关于原点对称(图 1.267).

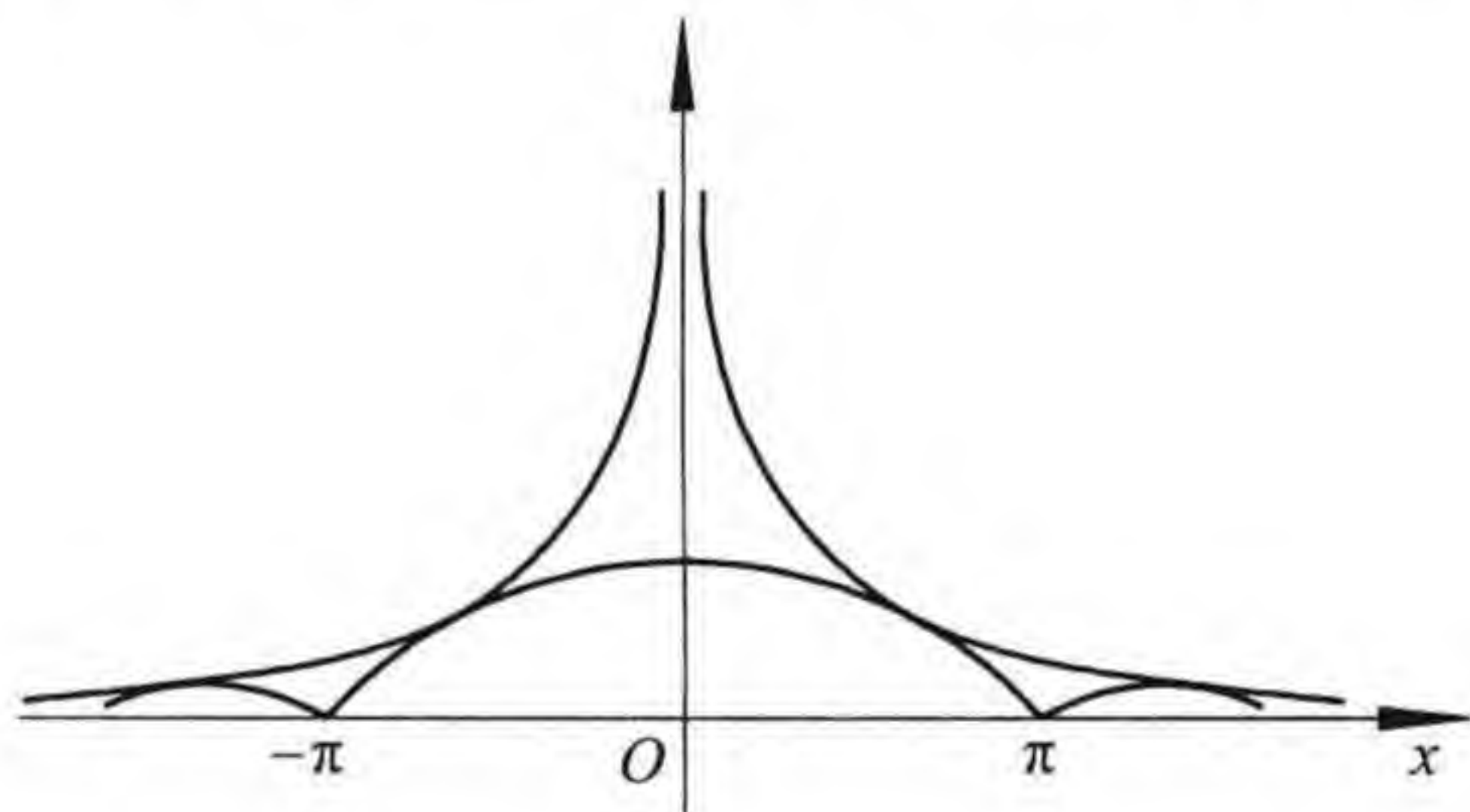


图 1.266

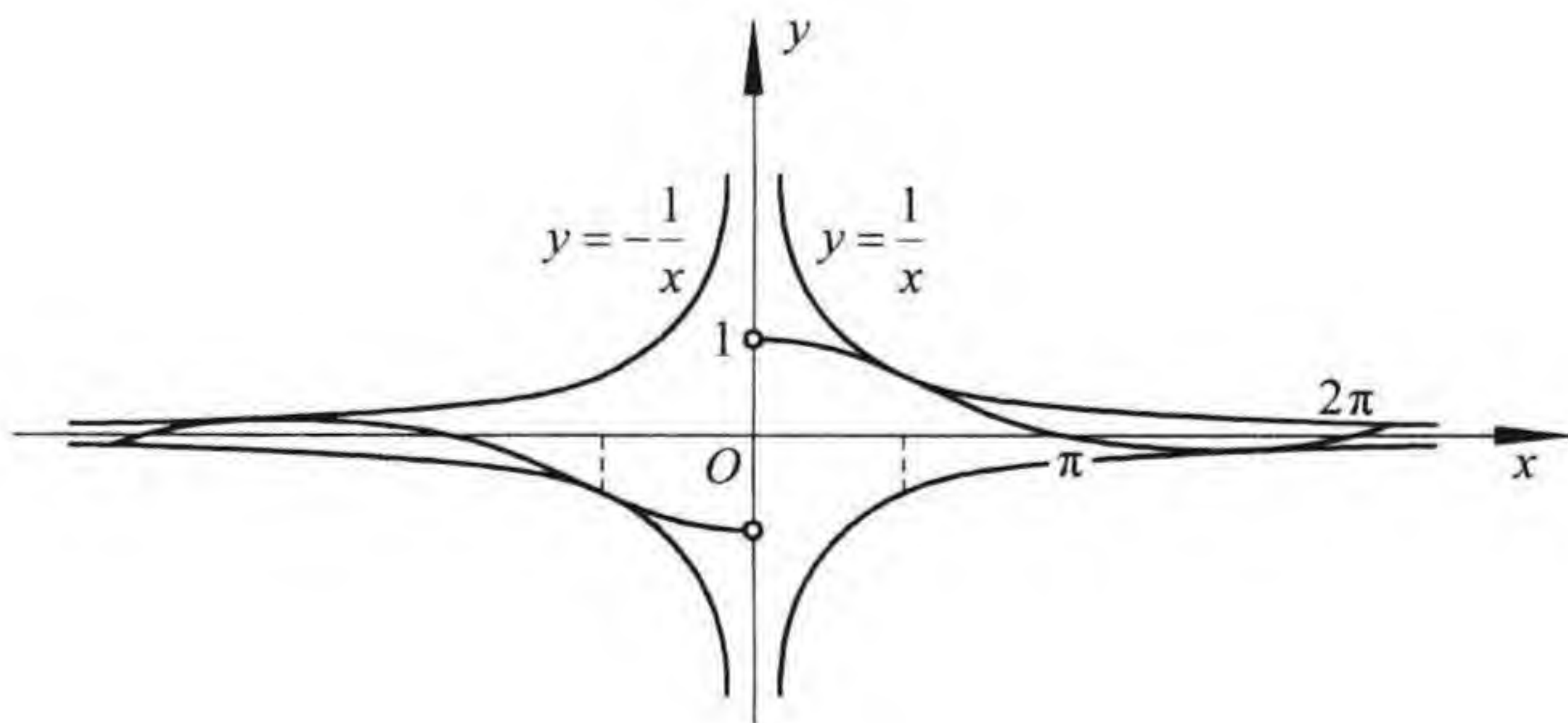


图 1.267

【679】  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ \text{任意值}, & x = 0. \end{cases}$

解 在  $x \neq 0$  的点  $f(x)$  均为连续, 而在  $x = 0$  不连续(因为  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在). 图像关于原点对称, 图 1.268 仅为  $x > 0$  的一部分.



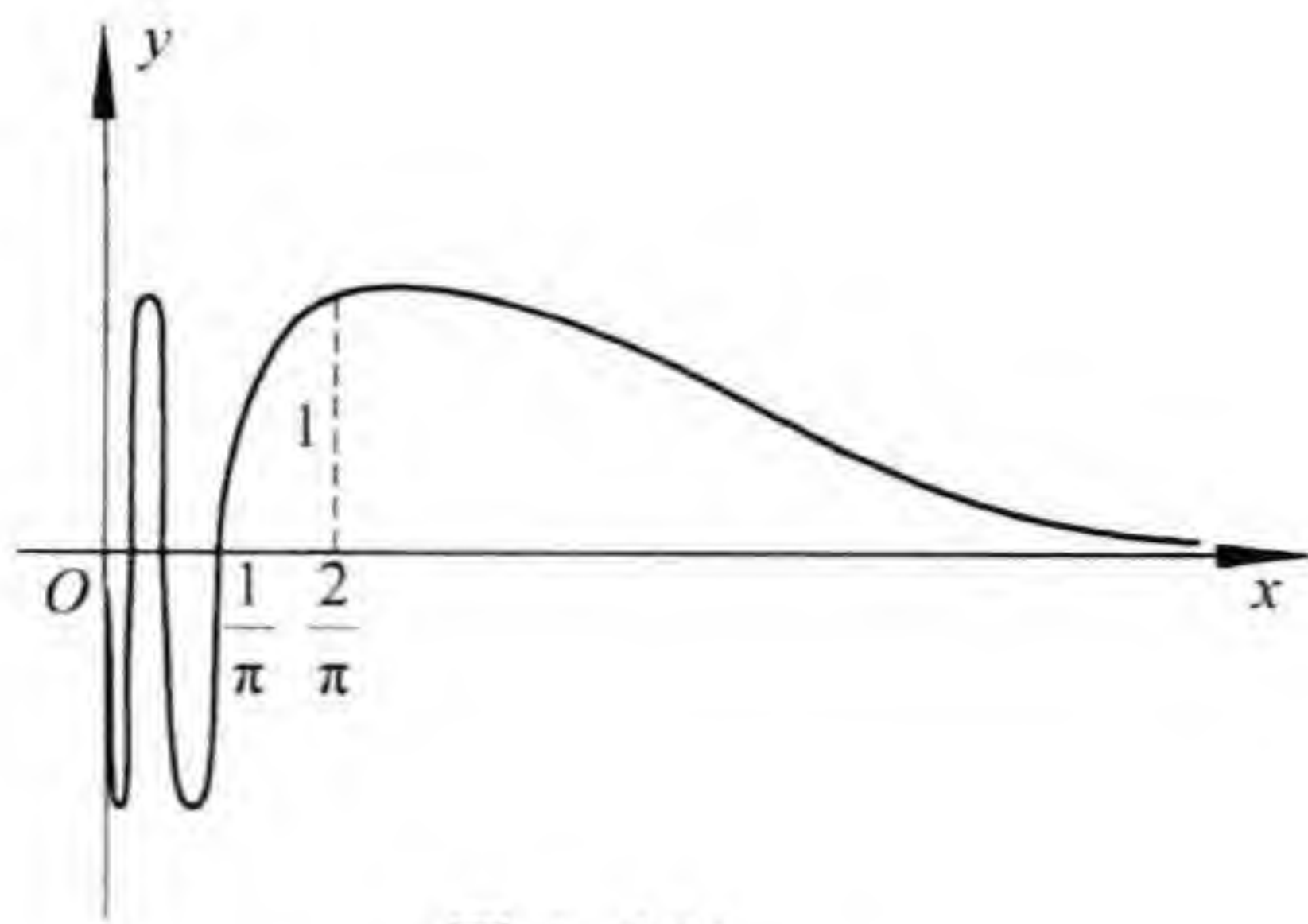


图 1.268

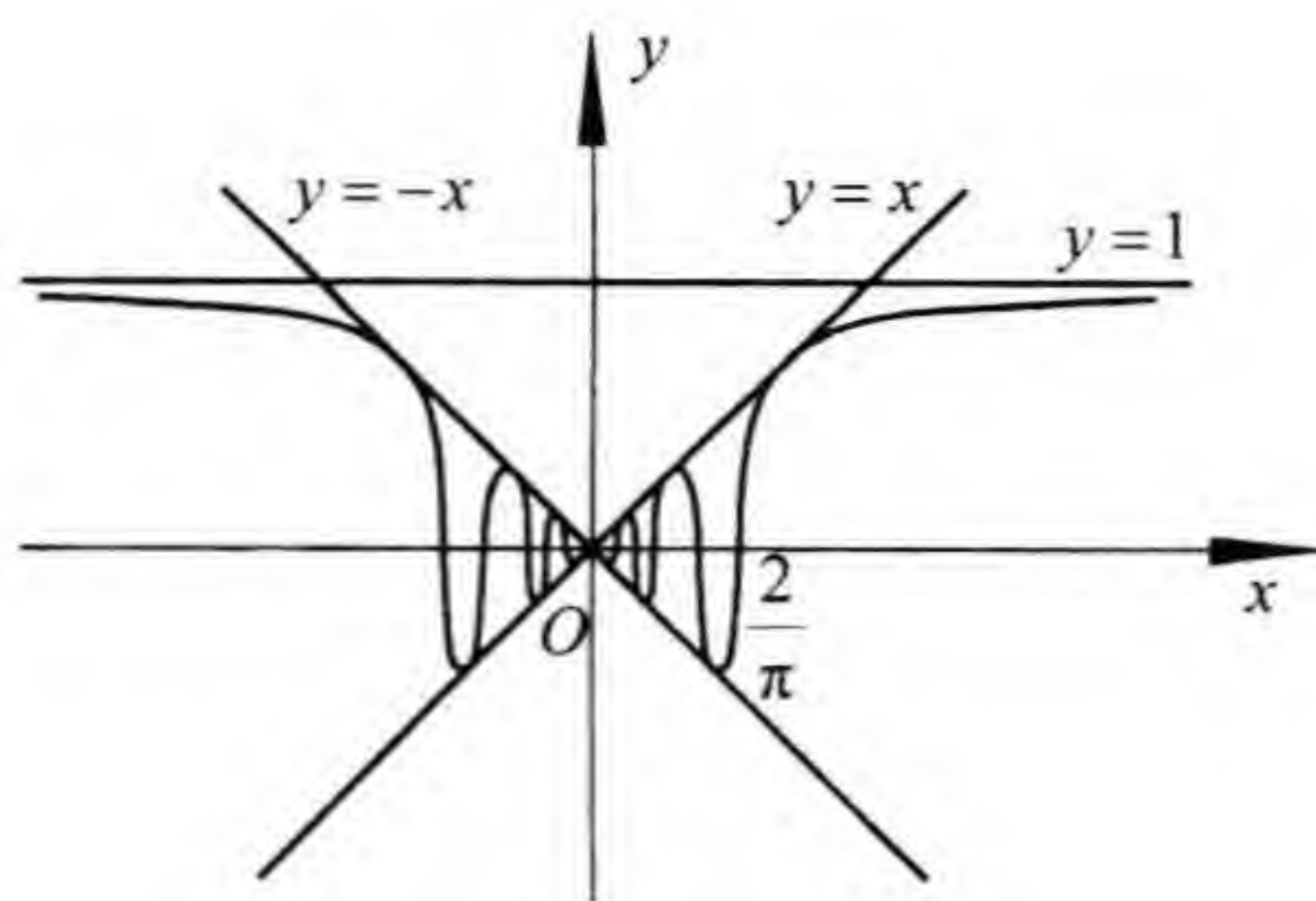


图 1.269

【680】 
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

提示 由连续定义易知函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续.

解  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , 点点连续. 图像关于  $Oy$  轴对称, 如图 1.269 所示.

当  $x \rightarrow \infty$  时  $y \rightarrow 1$ , 且当  $|x| > \frac{2}{\pi}$  时, 有  $0 < y < 1$ .

【681】 
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

提示 注意到  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ , 易知函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续.

解  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ , 点点连续.

图像关于  $Oy$  轴对称, 如图 1.270 所示.

当  $x \rightarrow \infty$  时,  $y \rightarrow 1$ , 且  $0 < y < 1$ .

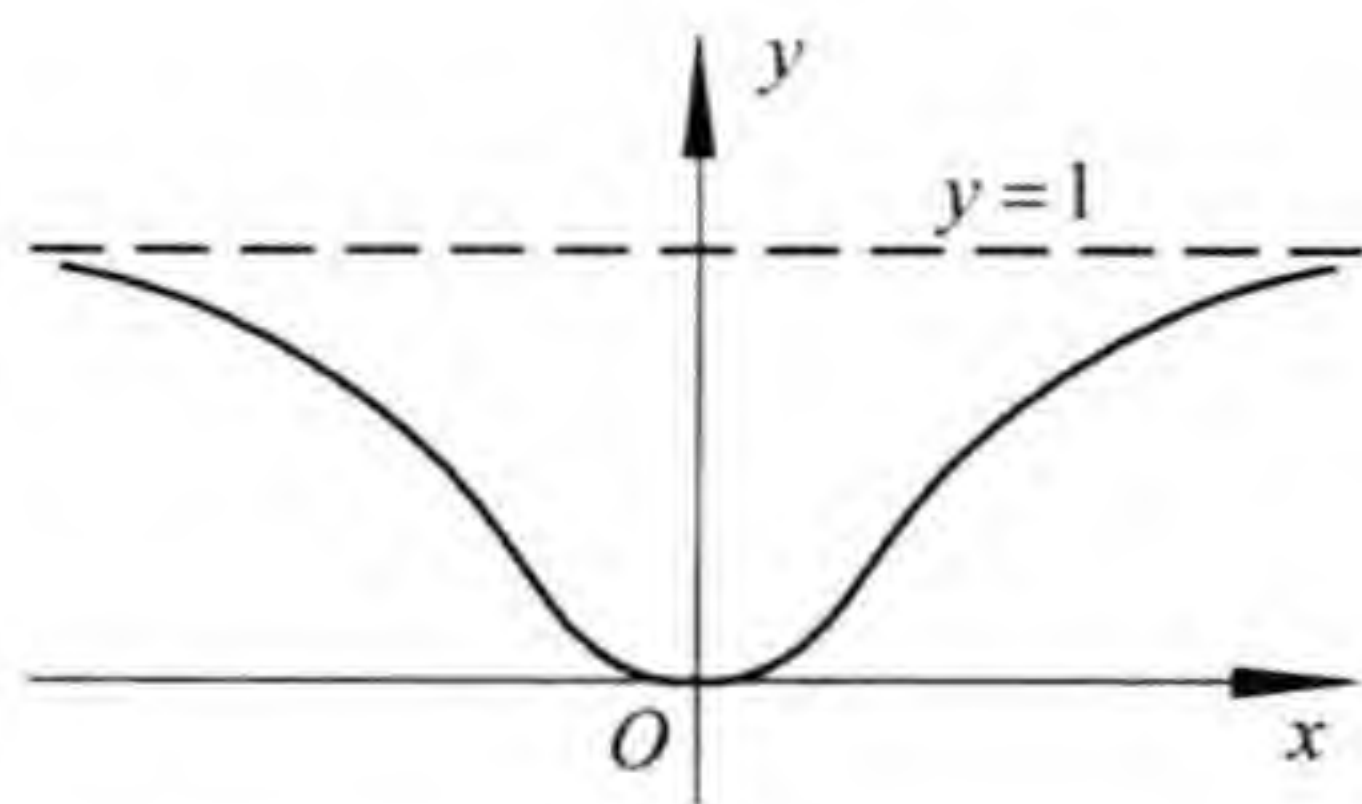


图 1.270

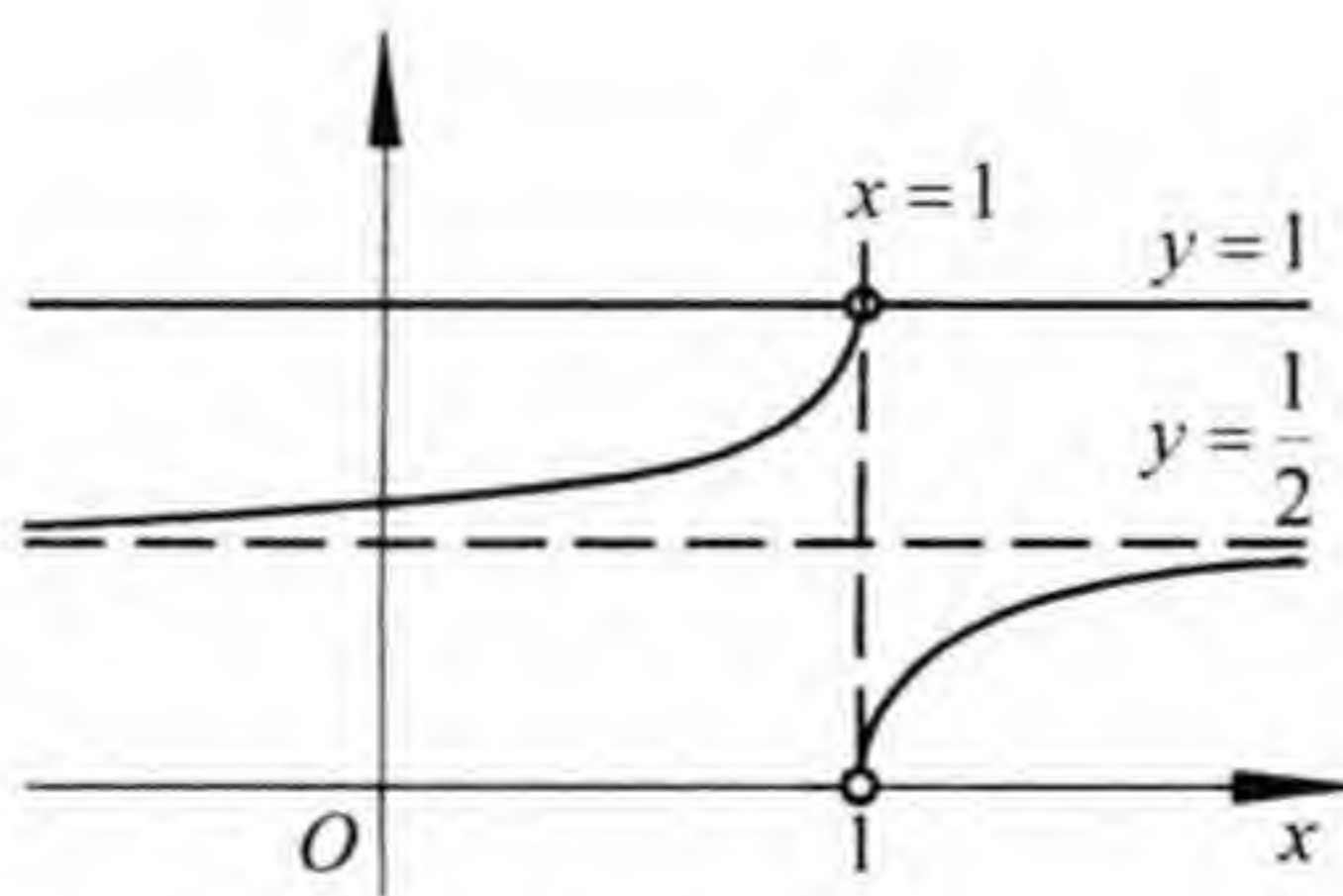


图 1.271

【682】 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}, & x \neq 1, \\ \text{任意值}, & x = 1. \end{cases}$$

提示 注意到  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1$  及  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0$ , 即知函数  $f(x)$  在点  $x=1$  处不连续.

解  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0$ , 除点  $x=1$  外其余点点连续.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{2}$ .

如图 1.271 所示.

【683】 
$$f(x) = \begin{cases} x \ln x^2, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

提示 注意到  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 故应对  $a \neq 0$  及  $a = 0$  分别讨论函数  $f(x)$  的连续性.

解  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x^2 = 0$ .

当  $a = 0$  时, 点点连续; 而当  $a \neq 0$  时, 除点  $x=0$  处不连续, 其余点点连续. 图像关于原点对称. 如图 1.272 所示.



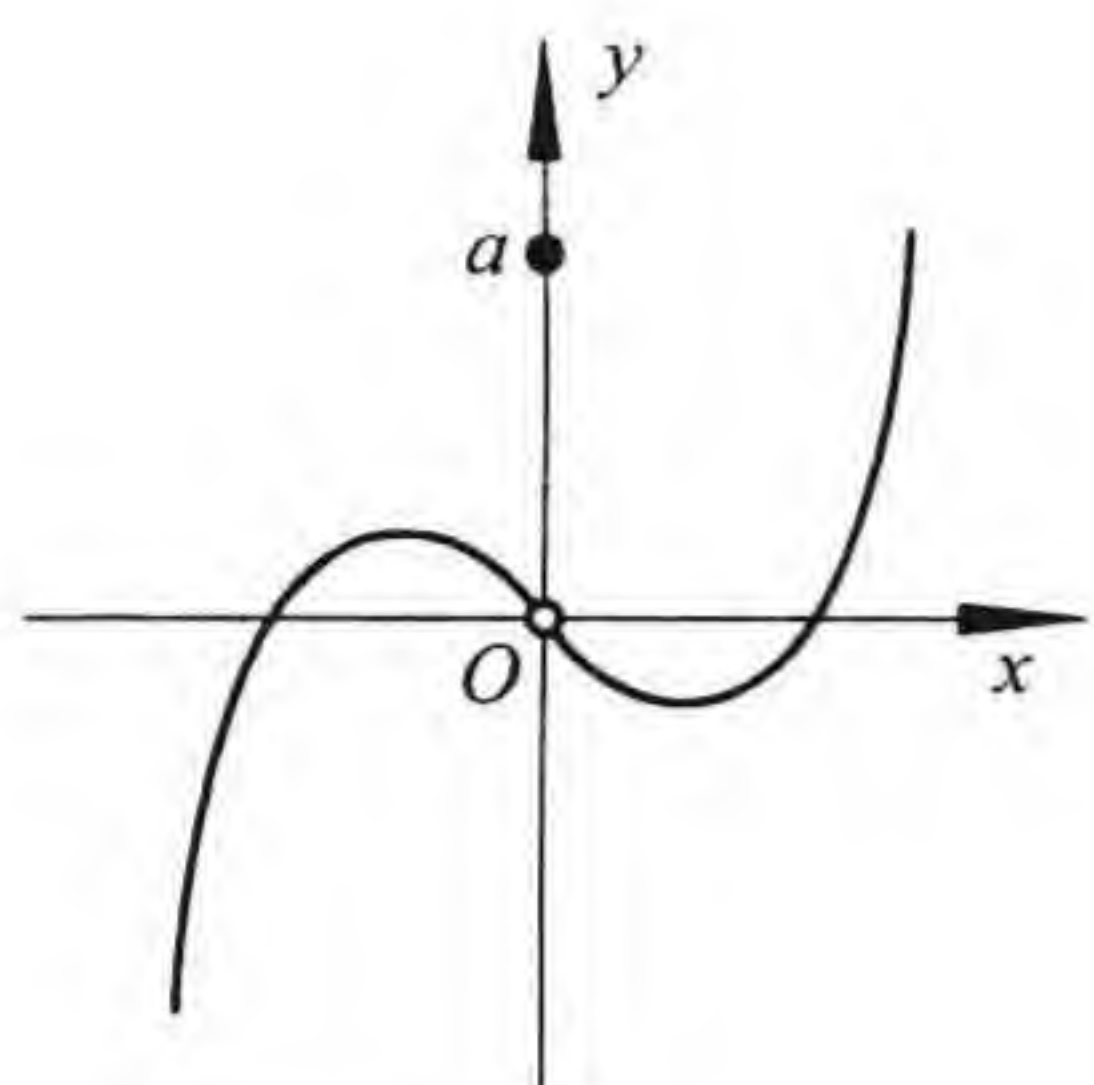


图 1.272

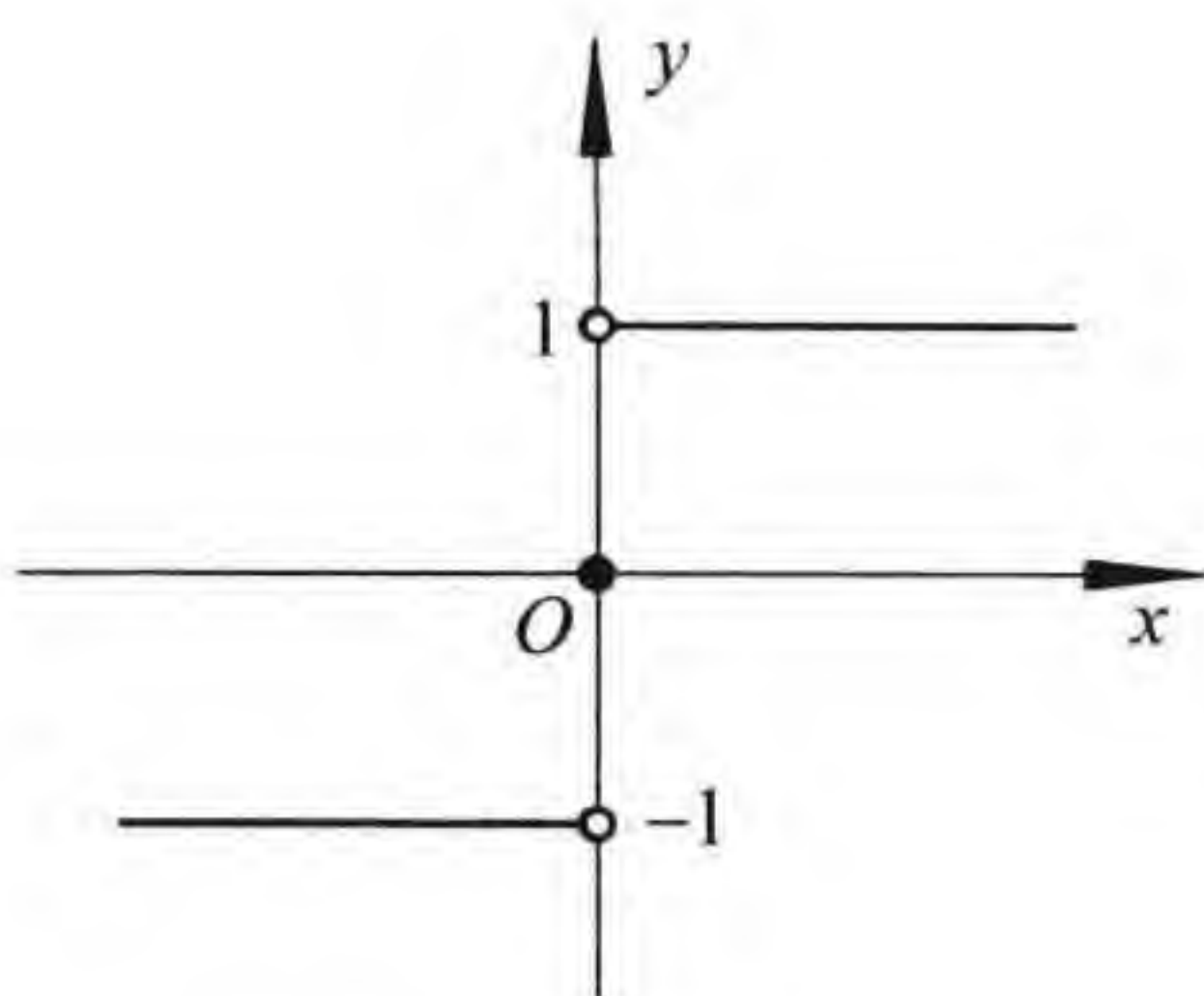


图 1.273

【684】  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ .

解 当  $x < 0$  时,  $f(x) = -1$ ; 当  $x > 0$  时,  $f(x) = 1$ ;

当  $x = 0$  时,  $f(x) = 0$ . 除点  $O$  外, 点点连续.

如图 1.273 所示.

【685】  $f(x) = [x]$ .

解 除当  $x = k$  ( $k$  为整数) 外, 其余点点连续.

如图 1.274 所示.

【686】  $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$ .

解 当  $x = k^2$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 时不连续.

当  $k^2 \leq x < (k+1)^2$  时,  $f(x) = \sqrt{x} - k$ ,  $f[(k+1)^2] = 0$ .

如图 1.275 所示.

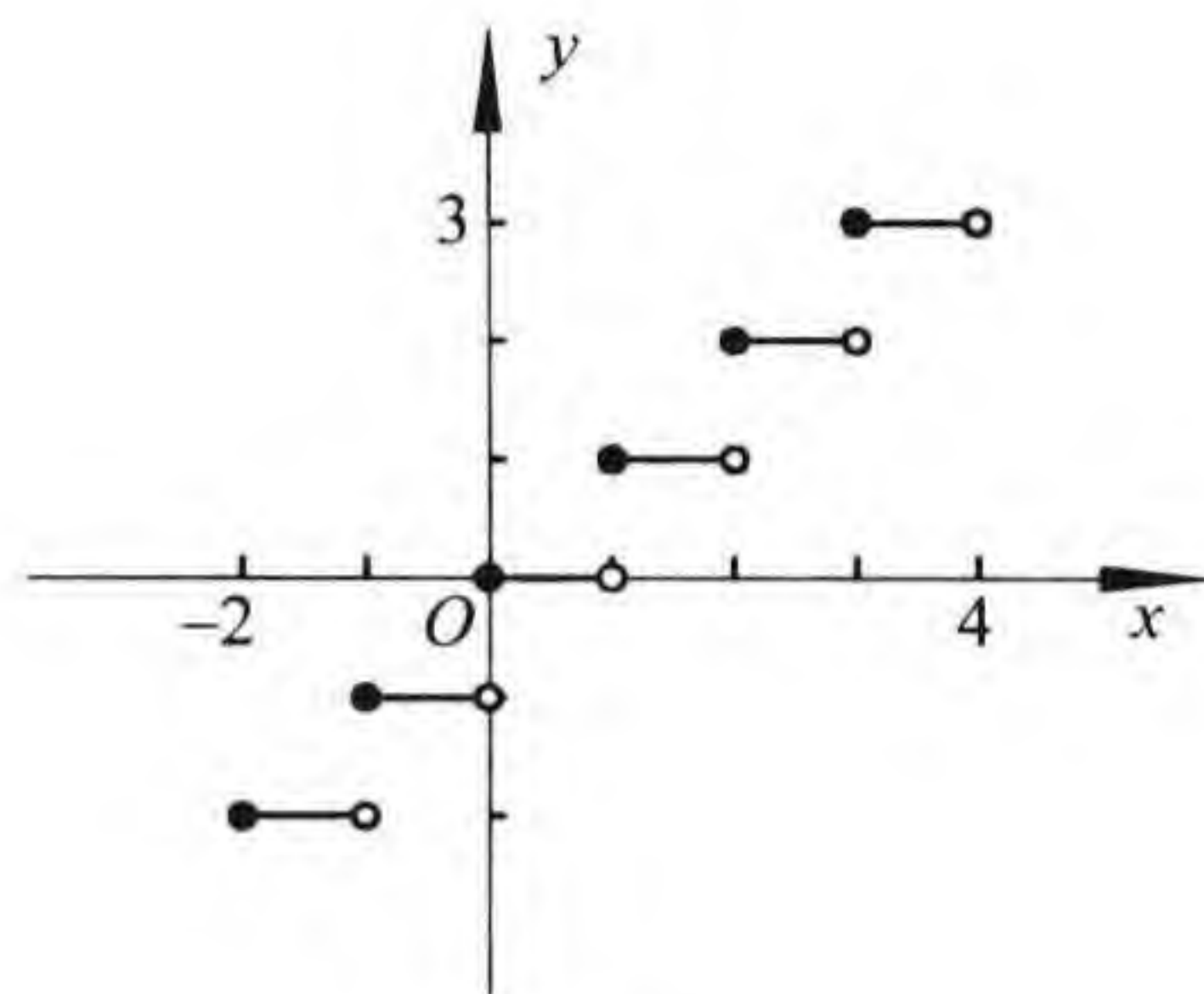


图 1.274

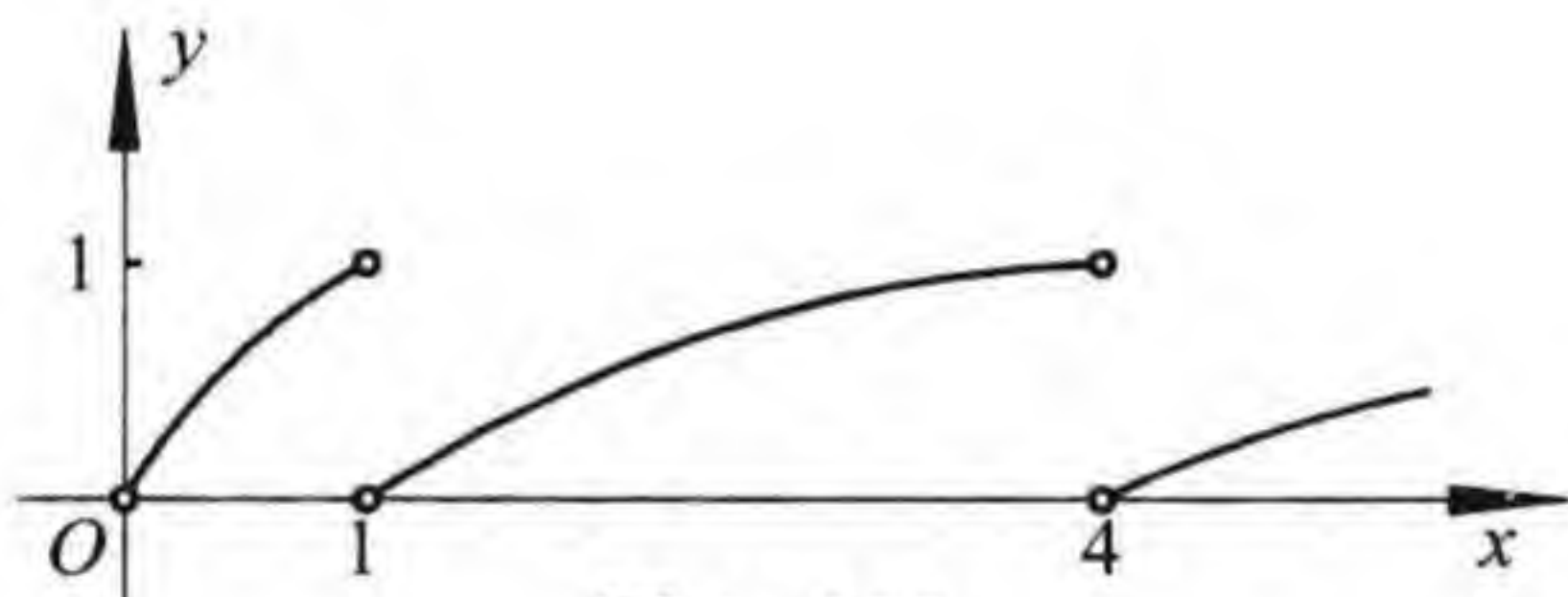


图 1.275

求出下列函数的不连续点, 并研究这些点的性质:

【687】  $y = \frac{x}{(1+x)^2}$ .

解  $x = -1$  为无穷型不连续点.

【688】  $y = \frac{1+x}{1+x^3}$ .

解 因  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3}$ , 故  $x = -1$  为“可去”的不连续点.

【689】  $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2}$ .

解  $\frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+2)}$ ,  $x = 1$  及  $x = -2$  均为无穷型不连续点.

【690】  $y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$ .

解 因为  $\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} y = -1$ , 及  $\lim_{x \rightarrow 1} y = 0$ , 所以,  $x = -1$  为无穷型不连续点, 而  $x = 0$  及  $x = 1$  为“可去”的不连续点.

【691】  $y = \frac{x}{\sin x}$ .



解 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow k\pi} y = \infty$  ( $k$  为不等于零的整数), 所以,  $x=0$  为“可去”的不连续点, 而  $x=k\pi$  ( $k=\pm 1, \pm 2, \dots$ ) 为无穷型不连续点.

**【692】**  $y = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi x}{4 - x^2}}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2\pi \sin^2 \frac{\pi}{2} (2-x)}{\frac{\pi}{2} (2-x) \cdot 2(2+x)}} = 0.$

同理  $\lim_{x \rightarrow -2} y = 0$ , 所以,  $x=2$  及  $x=-2$  为“可去”的不连续点.

**【693】**  $y = \cos^2 \frac{1}{x}.$

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} y$  不存在,  $\therefore$  故  $x=0$  为第二类不连续点.

\* ) 左右极限均不存在.

**【694】**  $y = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right).$

解  $x=0$  为第二类不连续点.

因为  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{k}-0} y = (-1)^k$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{k}+0} y = (-1)^{k-1}$ , 故  $x = \frac{1}{k}$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 为第一类不连续点.

**【695】**  $y = \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{\cos \frac{\pi}{x}}.$

解  $x = \frac{2}{2k+1}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 为“可去”的不连续点.

**【696】**  $y = \arctan \frac{1}{x}.$

解 因  $\lim_{x \rightarrow +0} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ , 故  $x=0$  为第一类不连续点.

**【697】**  $y = \sqrt{x} \arctan \frac{1}{x}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$ ,  $x=0$  为“可去”的不连续点.

**【698】**  $y = e^{x+\frac{1}{x}}.$

解 因为  $\lim_{x \rightarrow +0} y = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} y = 0$ , 所以,  $x=0$  为第二类不连续点.

**【699】**  $y = \frac{1}{\ln x}.$

解 因为  $\lim_{x \rightarrow +0} y = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = +\infty$ , 所以,  $x=0$  为“可去”的不连续点, 而  $x=1$  为无穷型不连续点.

**【700】<sup>+</sup>**  $y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}.$

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} y = +\infty$ , 所以,  $x=1$  为第一类不连续点, 而  $x=0$  为无穷型不连续点.

研究下列函数的连续性并绘出其大略图像.

**【701】**  $y = \operatorname{sgn}(\sin x).$

解  $x = k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 为第一类不连续点. 如图 1.276 所示.



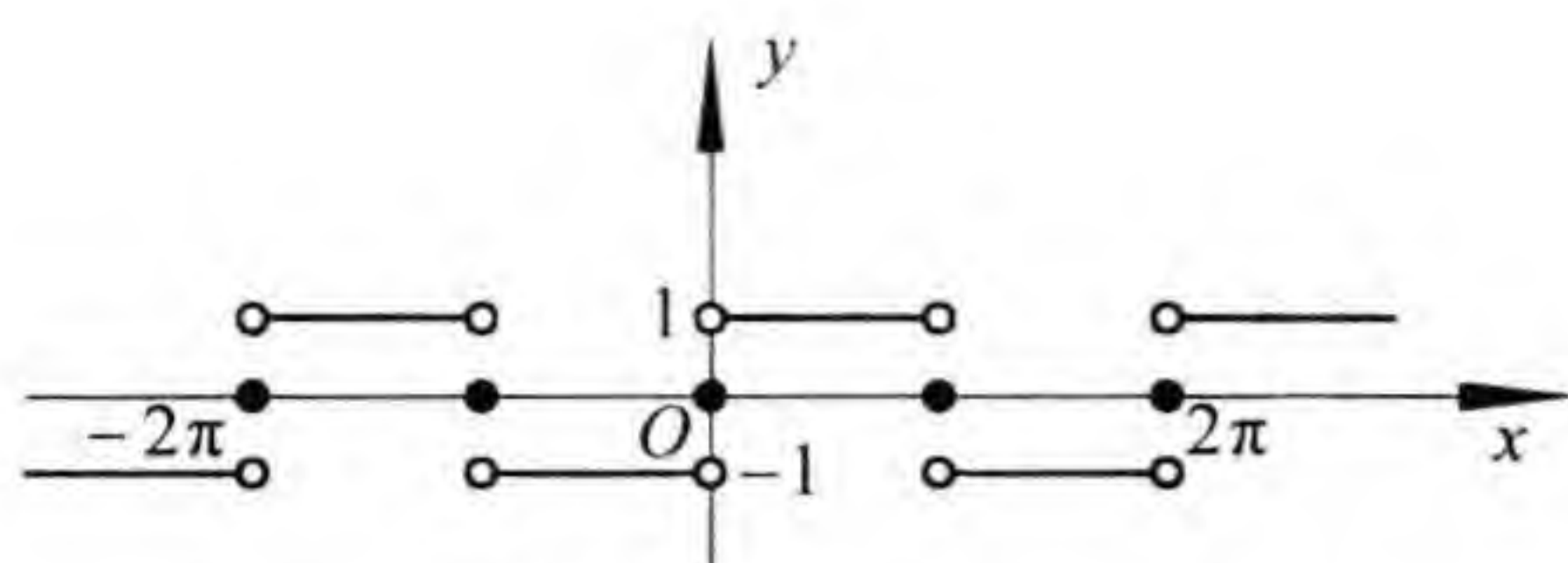


图 1.276

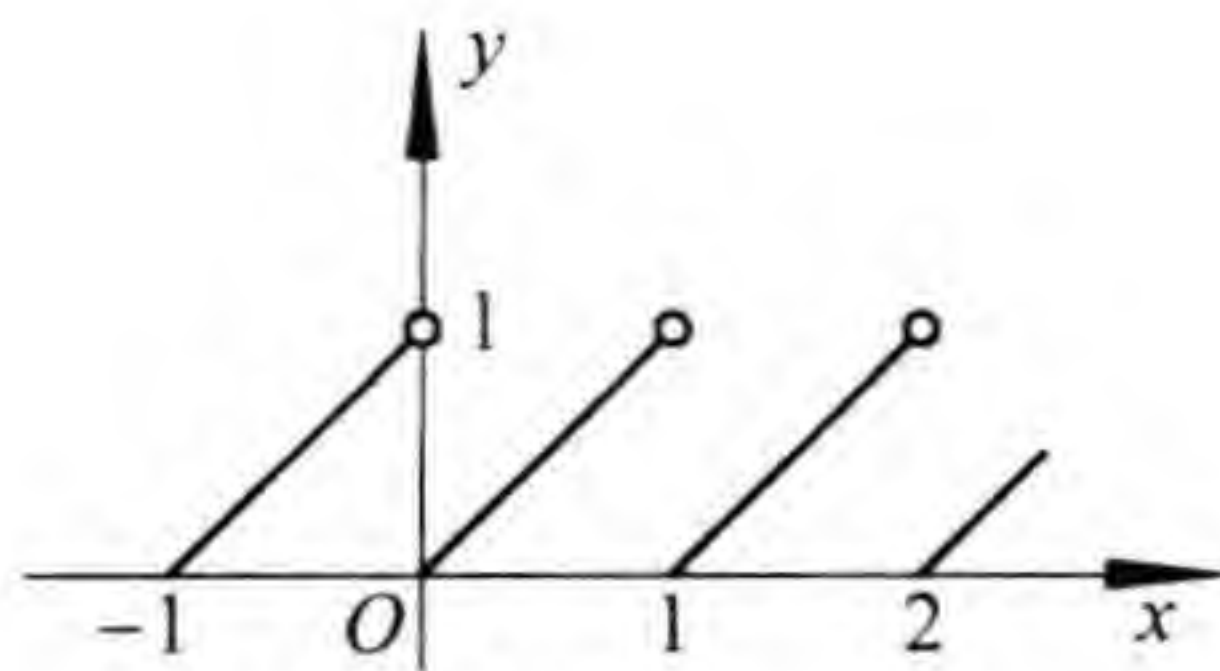


图 1.277

**【702】**  $y = x - [x]$ .

解  $x = k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 为第一类不连续点. 如图 1.277 所示.

**【703】**  $y = x[x]$ .

解  $x = k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 为第一类不连续点. 如图 1.278 所示.

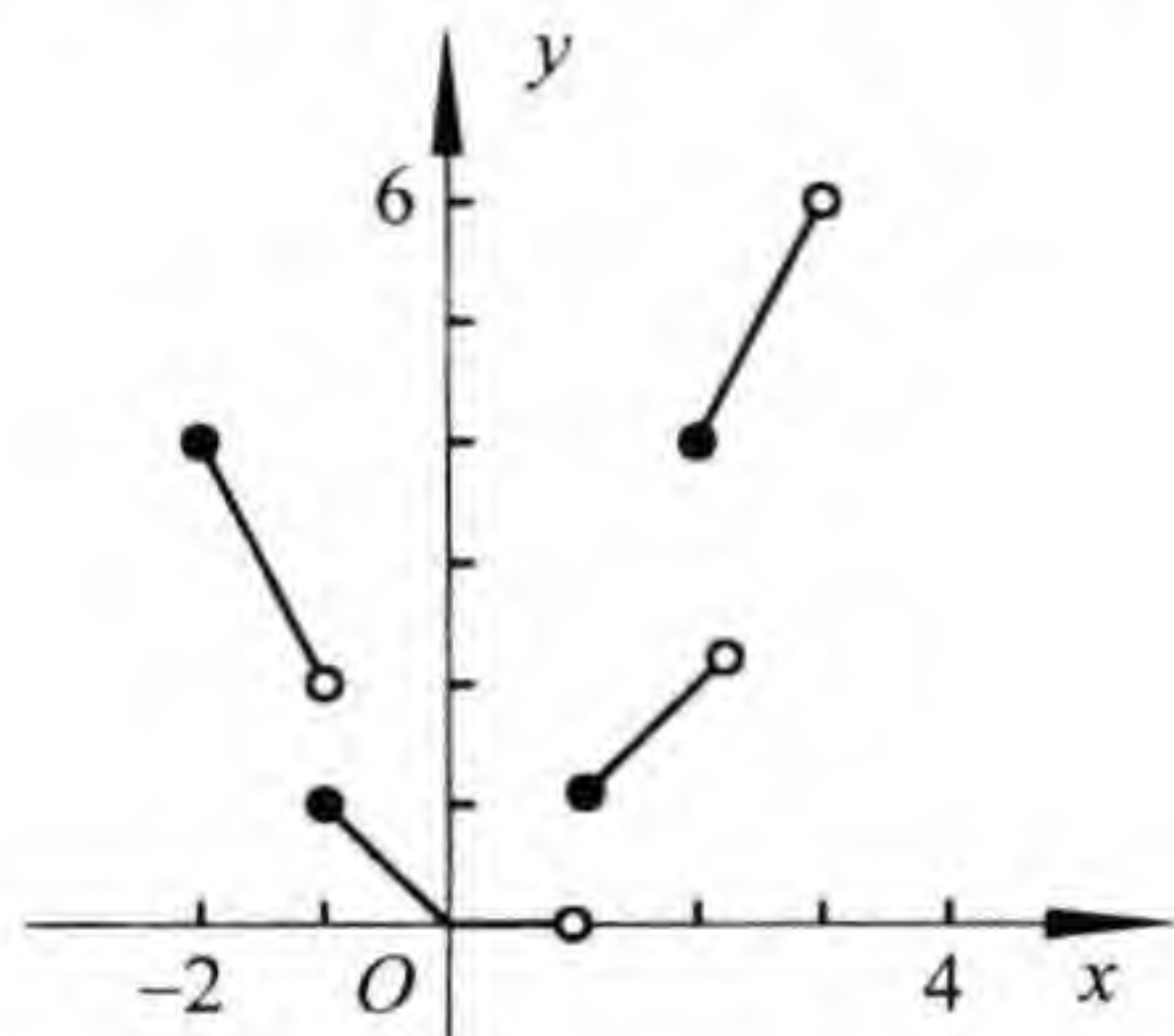


图 1.278

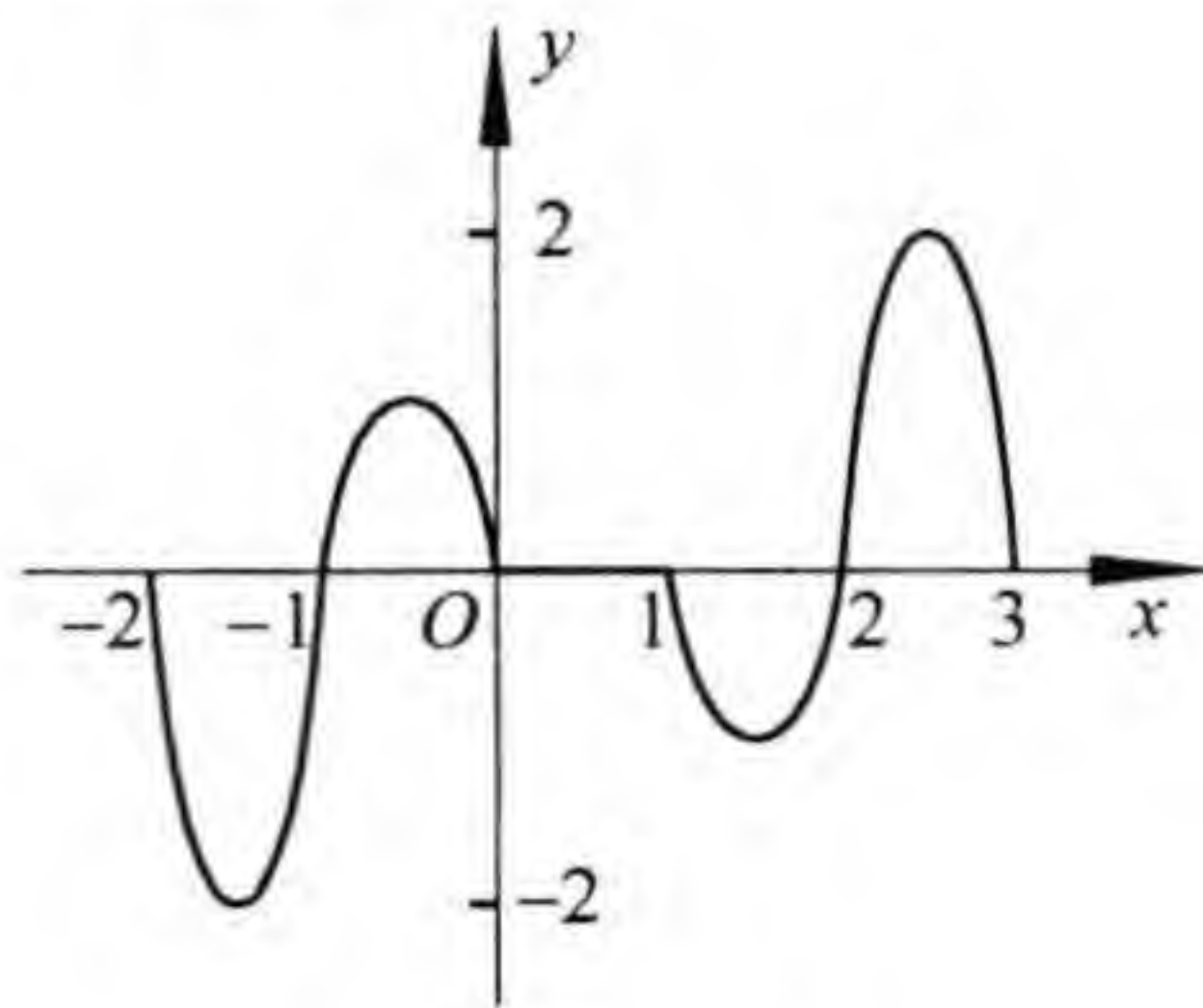


图 1.279

**【704】**  $y = [x] \sin \pi x$ .

解 处处连续. 当  $x = k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时  $y = 0$ . 如图 1.279 所示.

**【705】**  $y = x^2 - [x^2]$ .

解  $x = \pm\sqrt{k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 为第一类不连续点.

图 1.280 仅画了  $x \geq 0$  的部分.

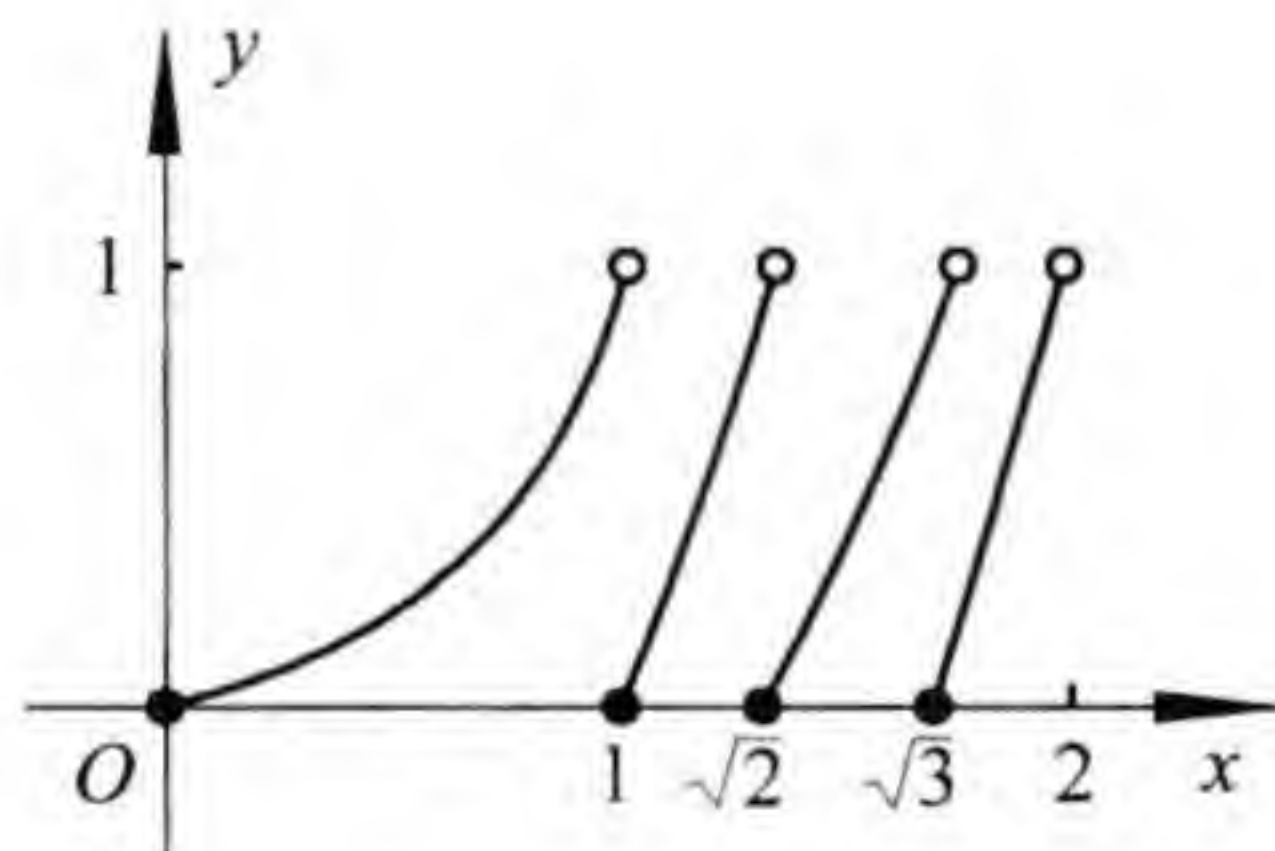


图 1.280

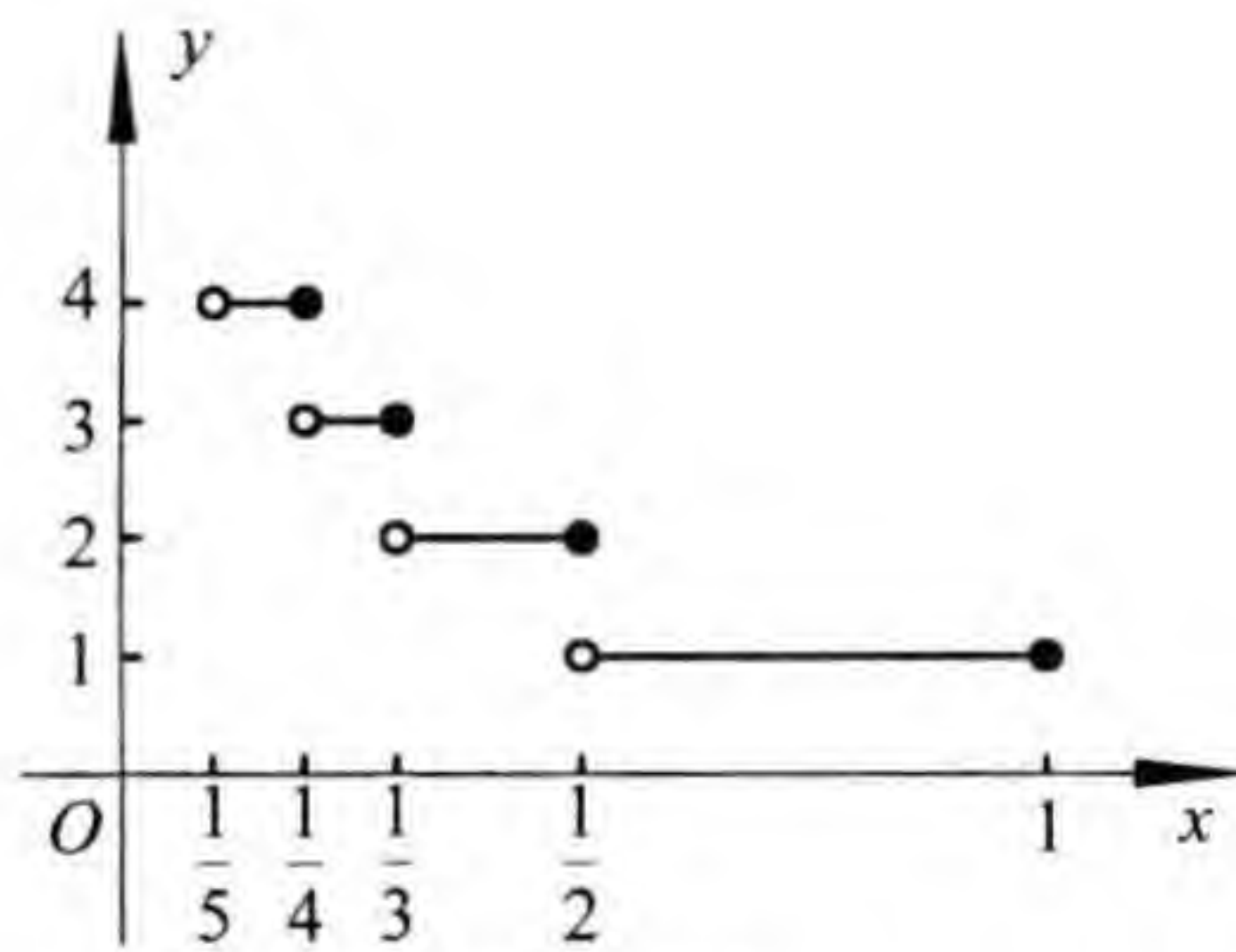


图 1.281

**【706】**  $y = [\frac{1}{x}]$ .

解  $x = 0$  为无穷型不连续点,  $x = \frac{1}{k}$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 为第一类不连续点.

图 1.281 仅画了  $x > 0$  的部分, 并且在图像中两轴比例不一致, 即已经过“压缩”变换.

**【707】**  $y = x[\frac{1}{x}]$ .

解  $x = 0$  为“可去”的不连续点, 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$ .  $x = \frac{1}{k}$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 为第一类不连续点.

图 1.282 仅画了当  $x > 0$  的部分, 并且两轴所取的单位不一致.



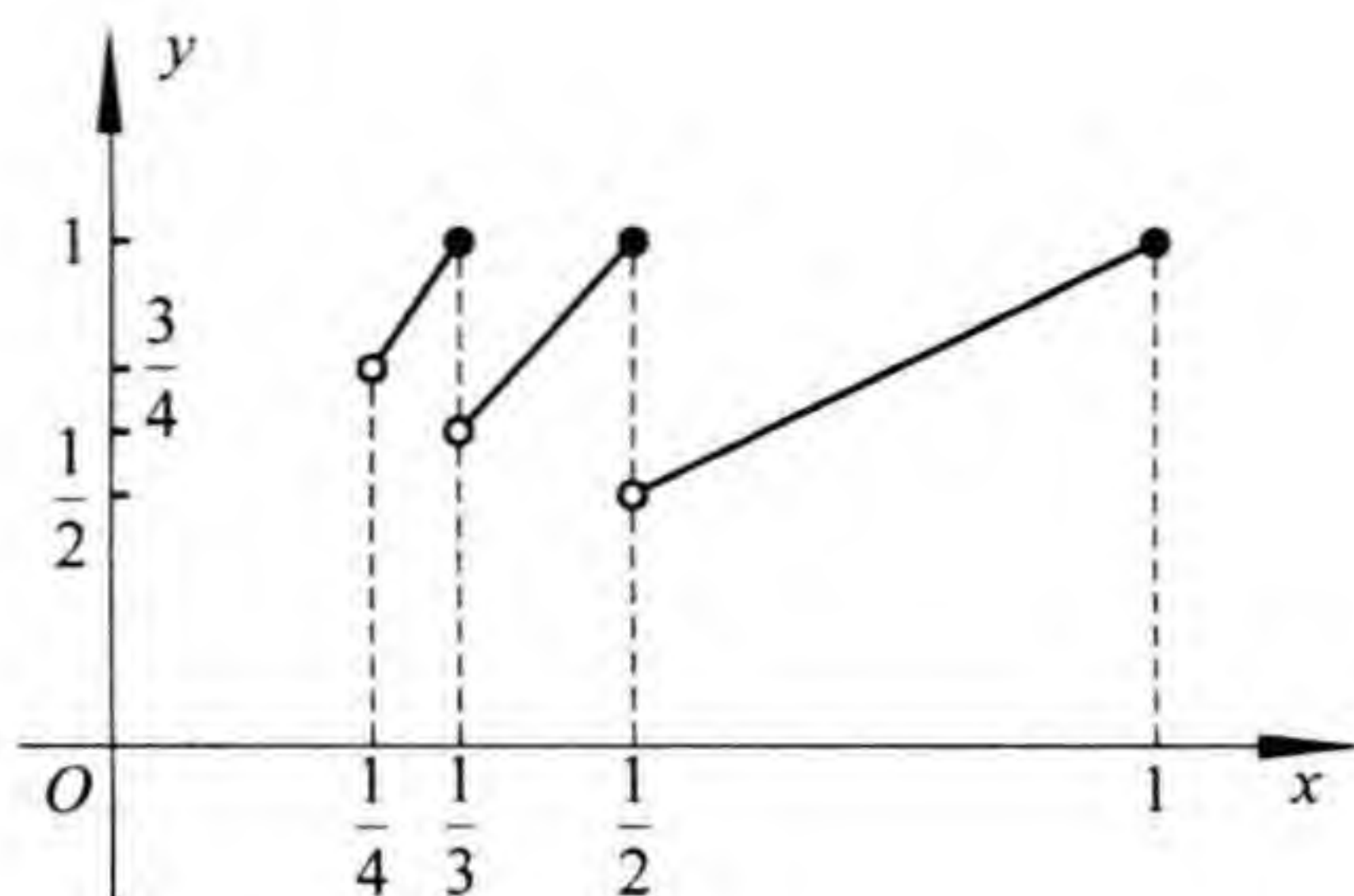


图 1.282

**【708】**  $y = \operatorname{sgn}\left(\cos \frac{1}{x}\right).$

解  $x=0$  为第二类不连续点.

凡使  $\cos \frac{1}{x} = 0$  的点, 即  $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 为第一类不连续点.

图 1.283 仅画了当  $k=0, \pm 1, \pm 2$  时的情形, 图像关于  $Oy$  轴对称.

**【709】**  $y = \left\lceil \frac{1}{x^2} \right\rceil \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right).$

解  $x=0$  为第二类不连续点.

$$x = \pm \frac{1}{k} \quad \text{及} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (k=1, 2, \dots)$$

为第一类不连续点.

图 1.284 的两轴所取的比例单位不同.

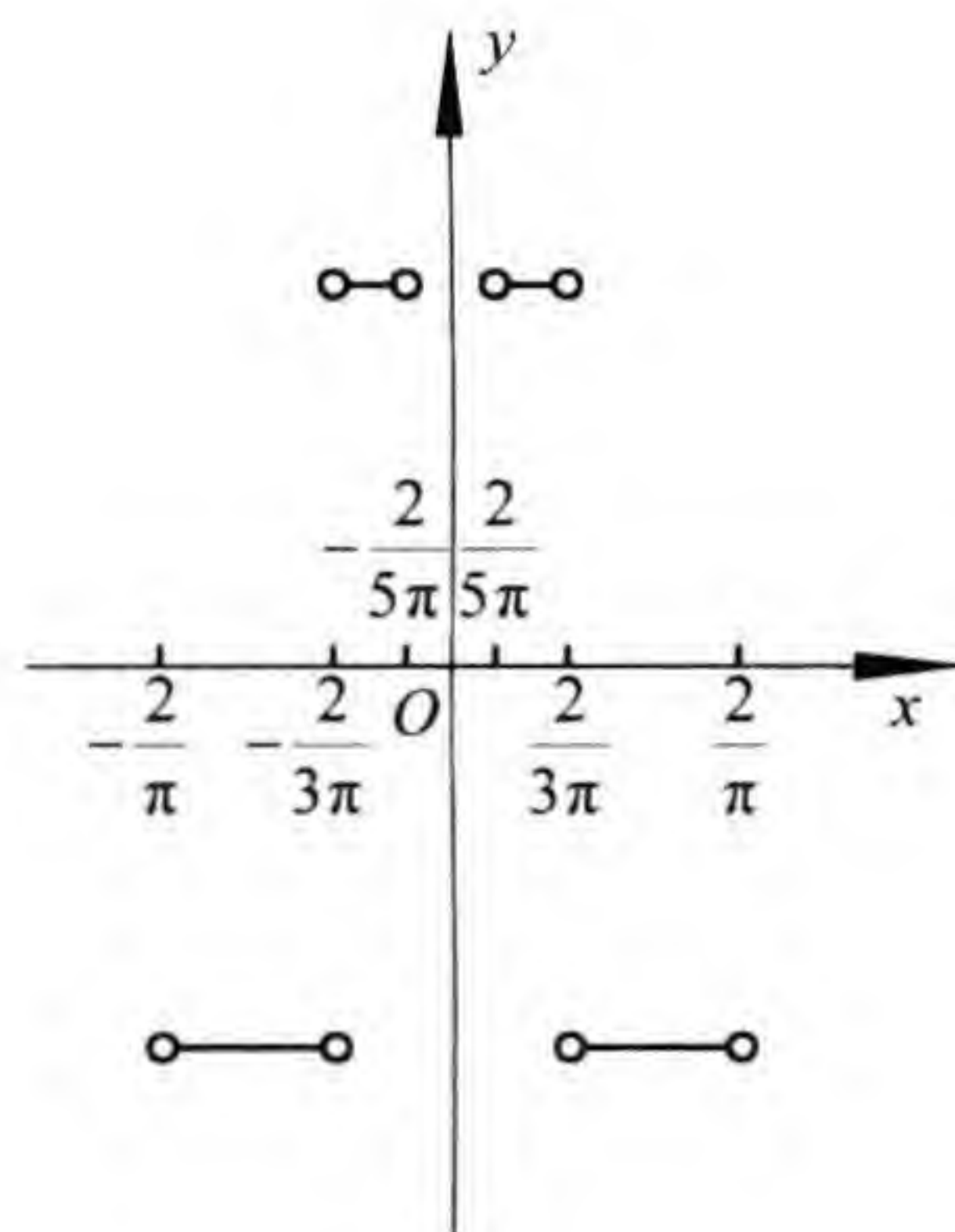


图 1.283

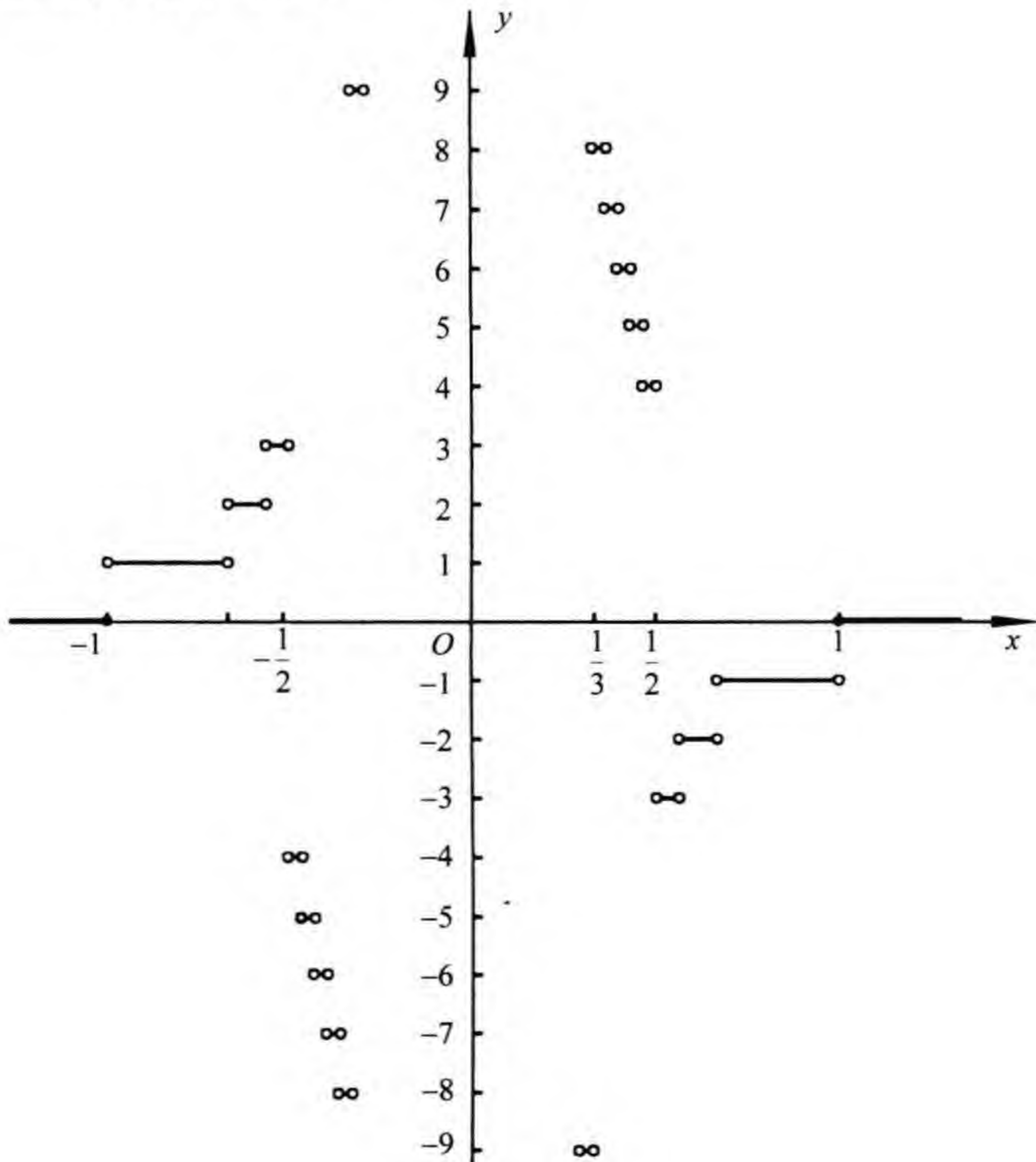


图 1.284



**【710】**  $y = \cot \frac{\pi}{x}$ .

解 凡使  $\sin \frac{\pi}{x} = 0$ , 即  $x = \frac{1}{k} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$  为无穷型不连续点.  $x = 0$  为第二类不连续点.

图像关于原点对称, 如图 1.285 所示.

当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $y \rightarrow -\infty$ ; 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow +\infty$ .

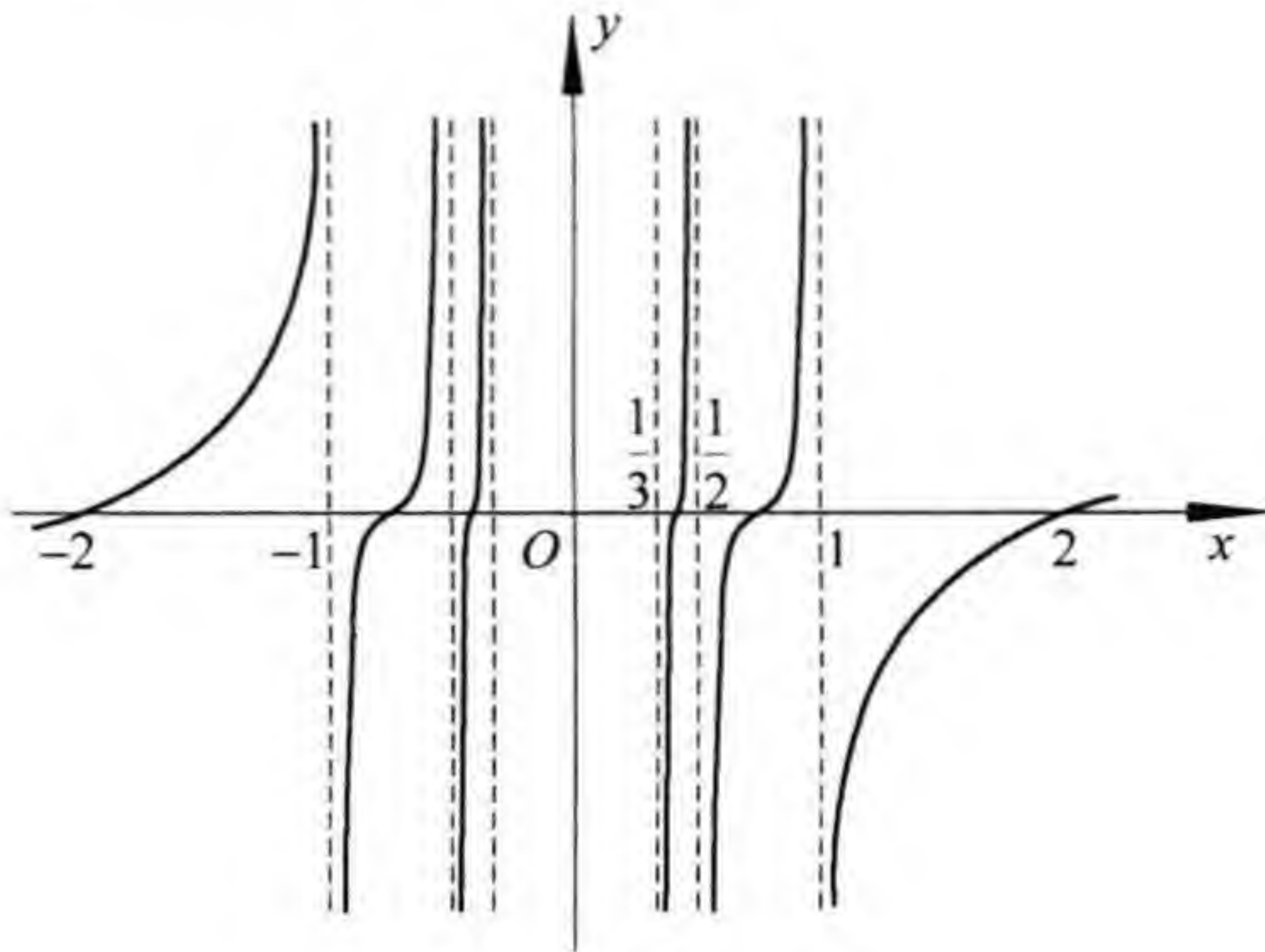


图 1.285

**【711】**  $y = \sec^2 \frac{1}{x}$ .

解  $x = \frac{2}{(2k+1)\pi} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  为无穷型不连续点.  $x = 0$  为第二类不连续点.

图像关于  $Oy$  轴对称, 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow 1$ . 如图 1.286 所示.

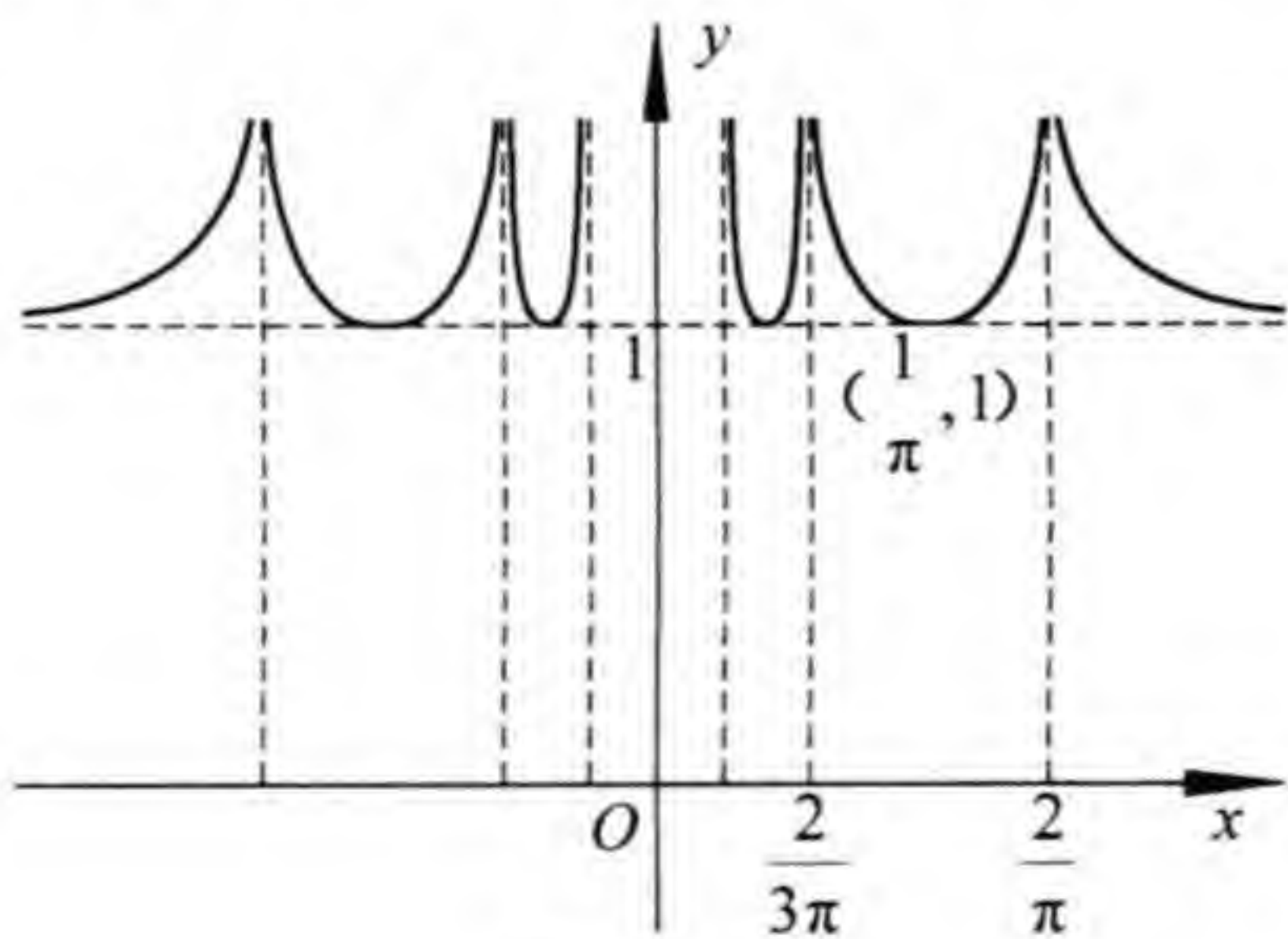


图 1.286

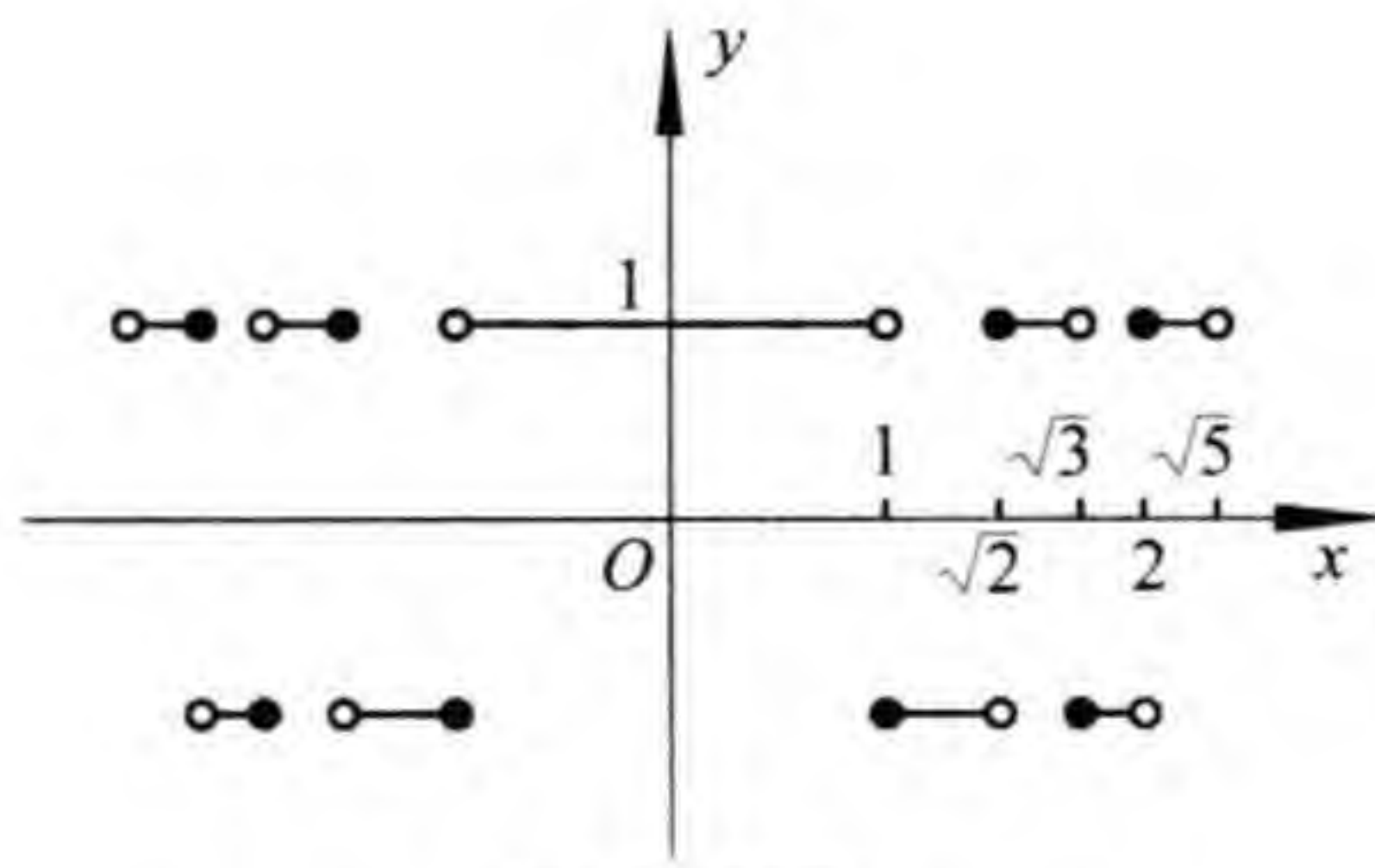


图 1.287

**【712】**  $y = (-1)^{[x^2]}$ .

解  $x = \pm\sqrt{n} (n = 1, 2, \dots)$  为第一类不连续点.

图像关于  $Oy$  轴对称.  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{n}-0} y = (-1)^{n-1}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{n}+0} y = (-1)^n$ . 如图 1.287 所示.

**【713】**  $y = \arctan\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)$ .

解  $x = 0, x = 1$  和  $x = 2$  为第一类不连续点.

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} y = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} y = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} y = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} y = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0. \quad \text{如图 1.288 所示.}$$

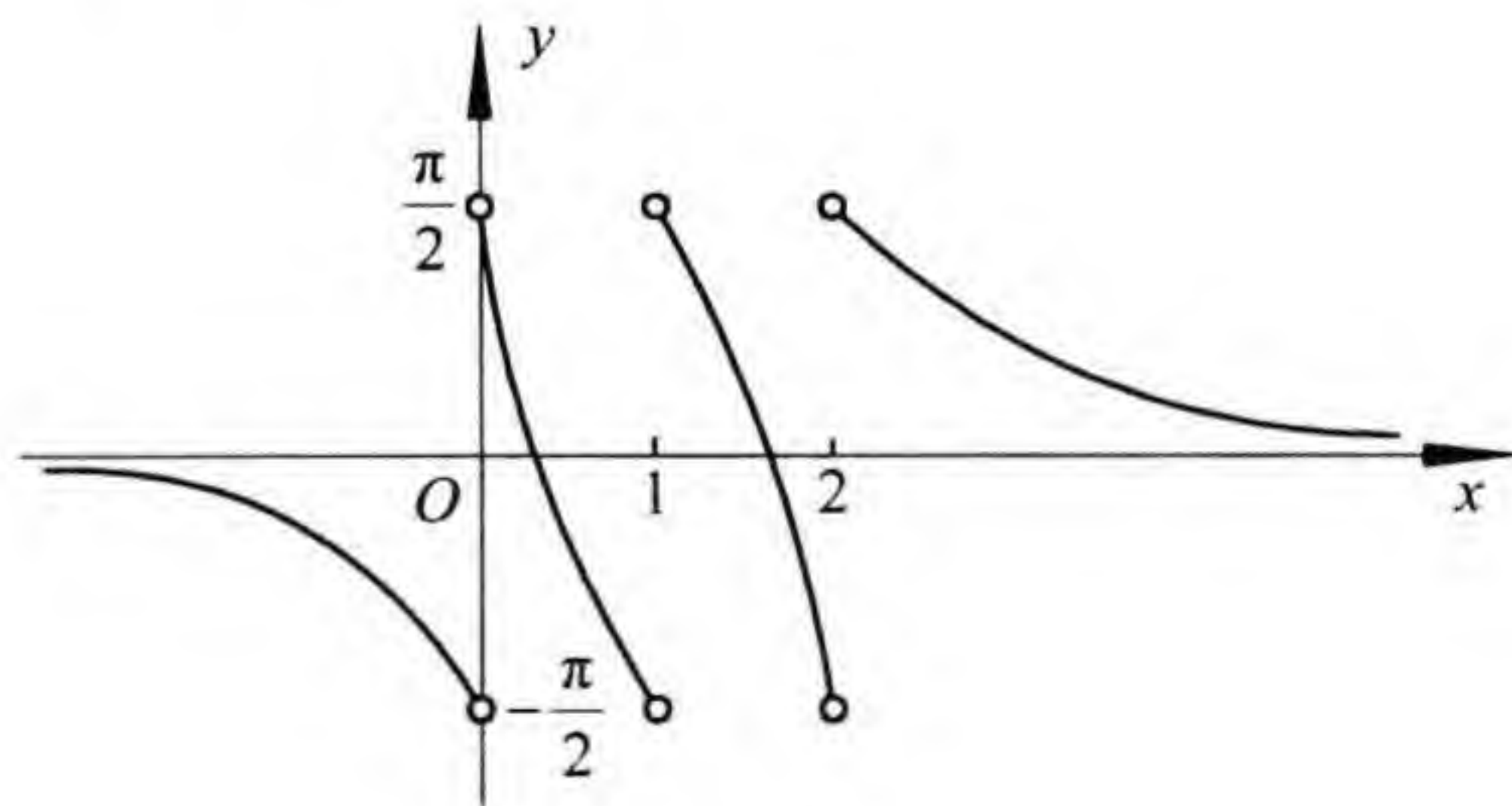


图 1.288



**【714】**  $y = \frac{1}{x^2 \sin^2 x}$ .

解  $x = k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 为无穷型不连续点.

图像关于  $Oy$  轴对称, 如图 1.289 所示.

**【715】**  $y = \frac{1}{\sin(x^2)}$ .

解  $x = \pm \sqrt{k\pi}$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) 为无穷型不连续点.

图像关于  $Oy$  轴对称, 如图 1.290 所示.

图中只画了  $x > 0$  的部分.

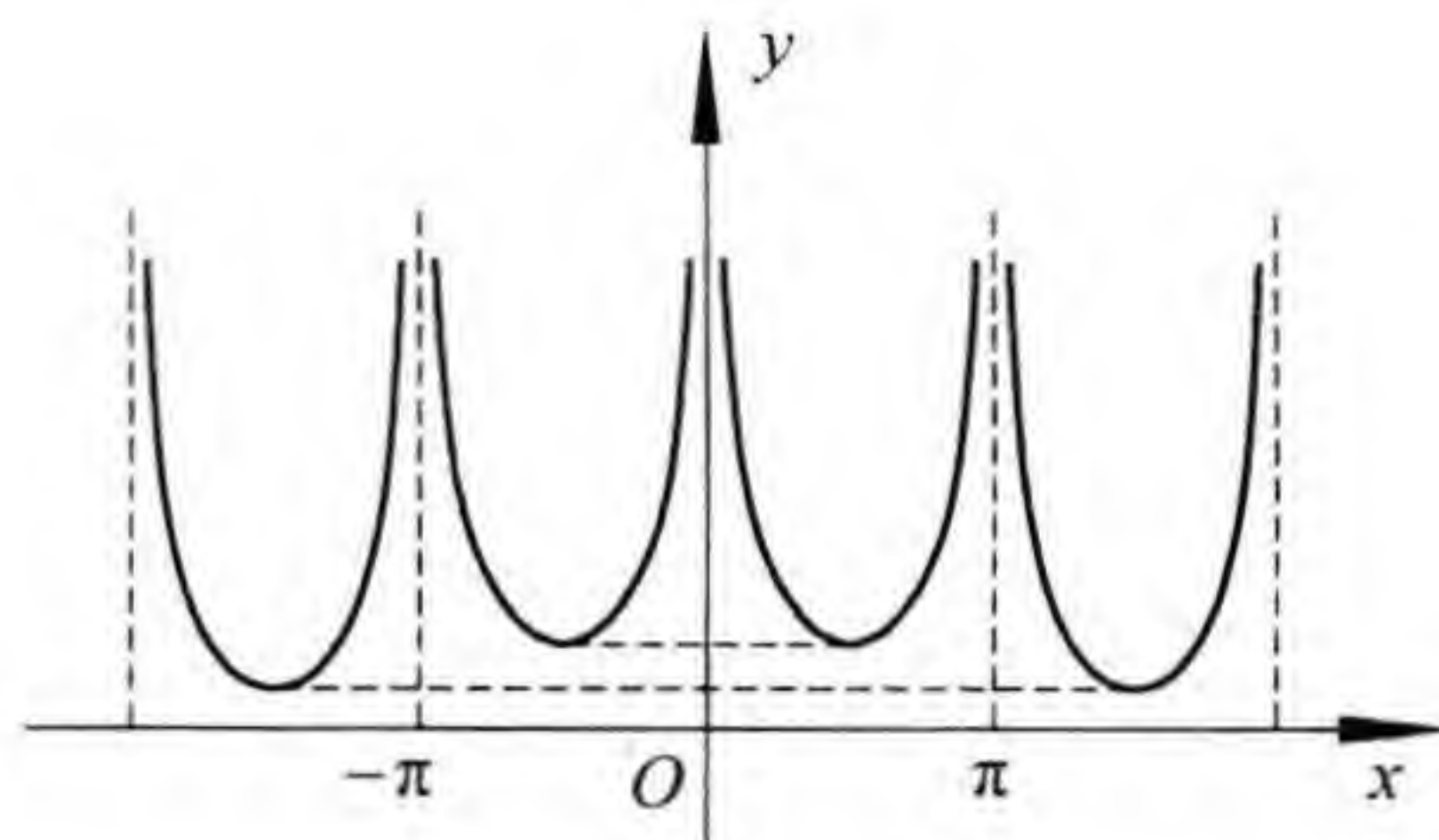


图 1.289

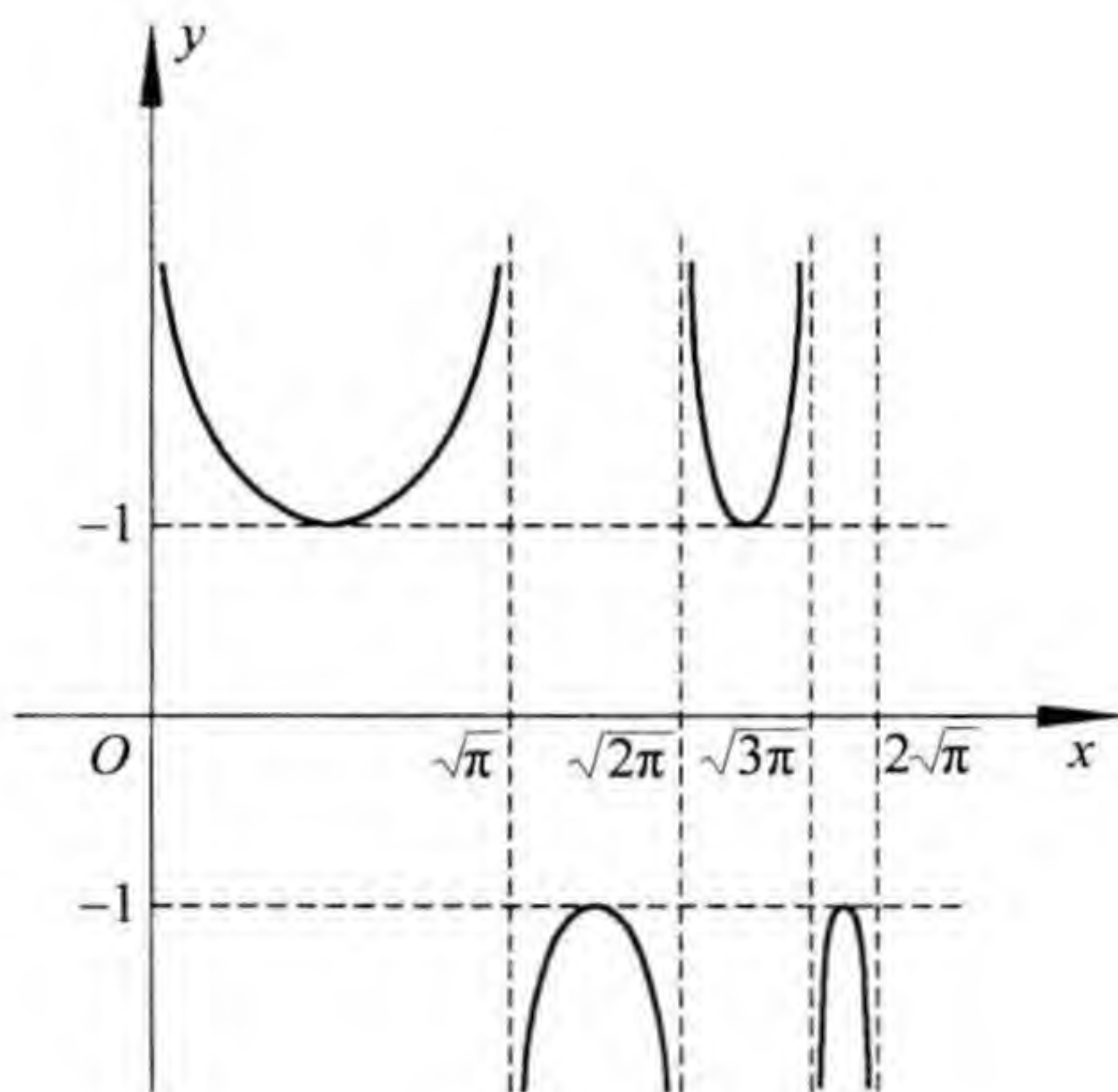


图 1.290

**【716】**  $y = \ln \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}$ .

解  $x = -1$  和  $x = 3$  为无穷型不连续点. 定义域为  $x < -1$  或  $x > 3$ .

当  $x < -\frac{3}{2}$  时,  $0 < \frac{x^2}{x^2 - 2x - 3} < 1$ , 故  $\ln \frac{1}{(x+1)(x-3)} < 0$ .

当  $x > -\frac{3}{2}$  时,  $\frac{x^2}{x^2 - 2x - 3} > 1$ , 故  $\ln \frac{1}{(x+1)(x-3)} > 0$ .

当  $x \rightarrow \infty$  时,  $y \rightarrow 0$ . 如图 1.291 所示.

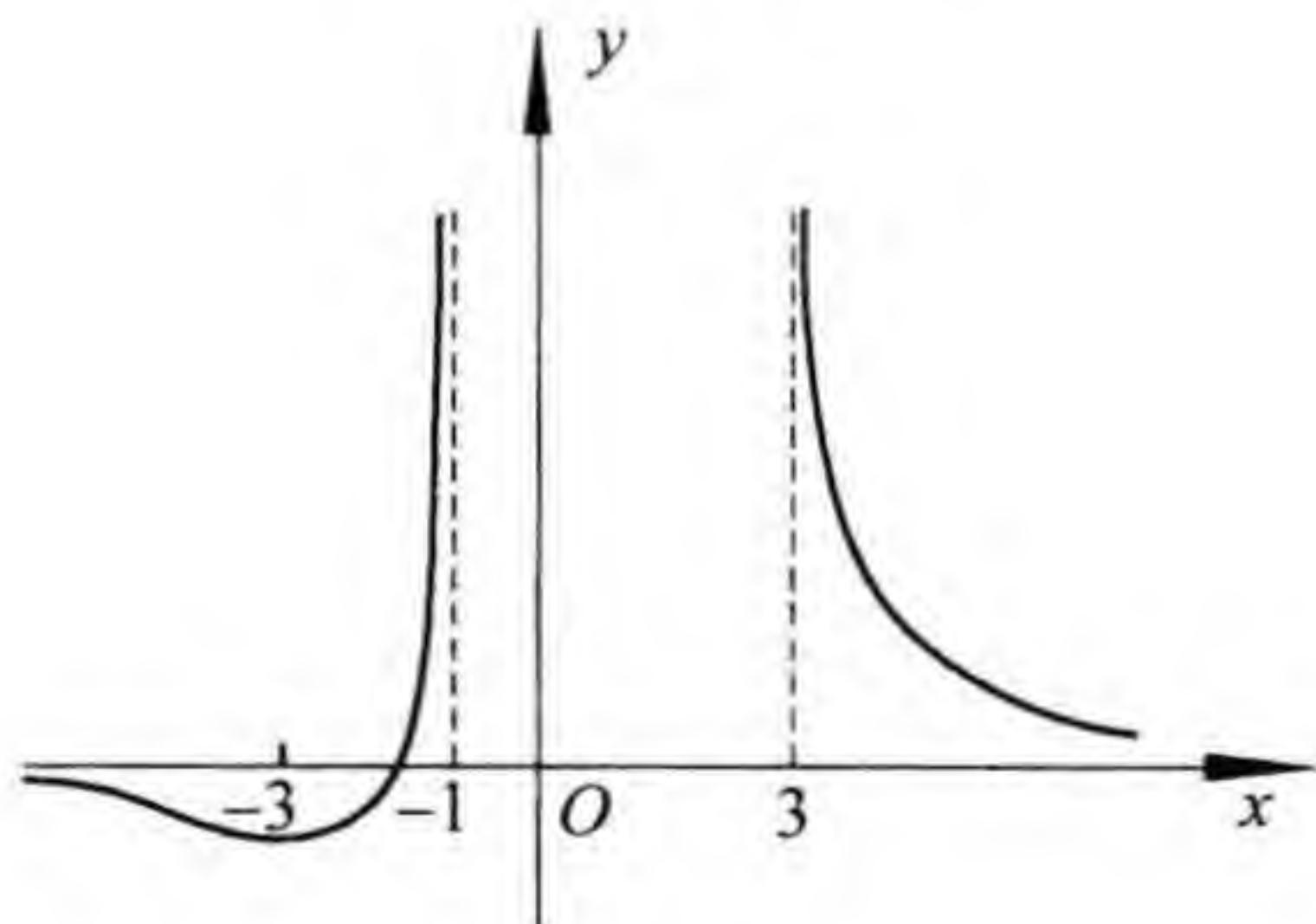


图 1.291

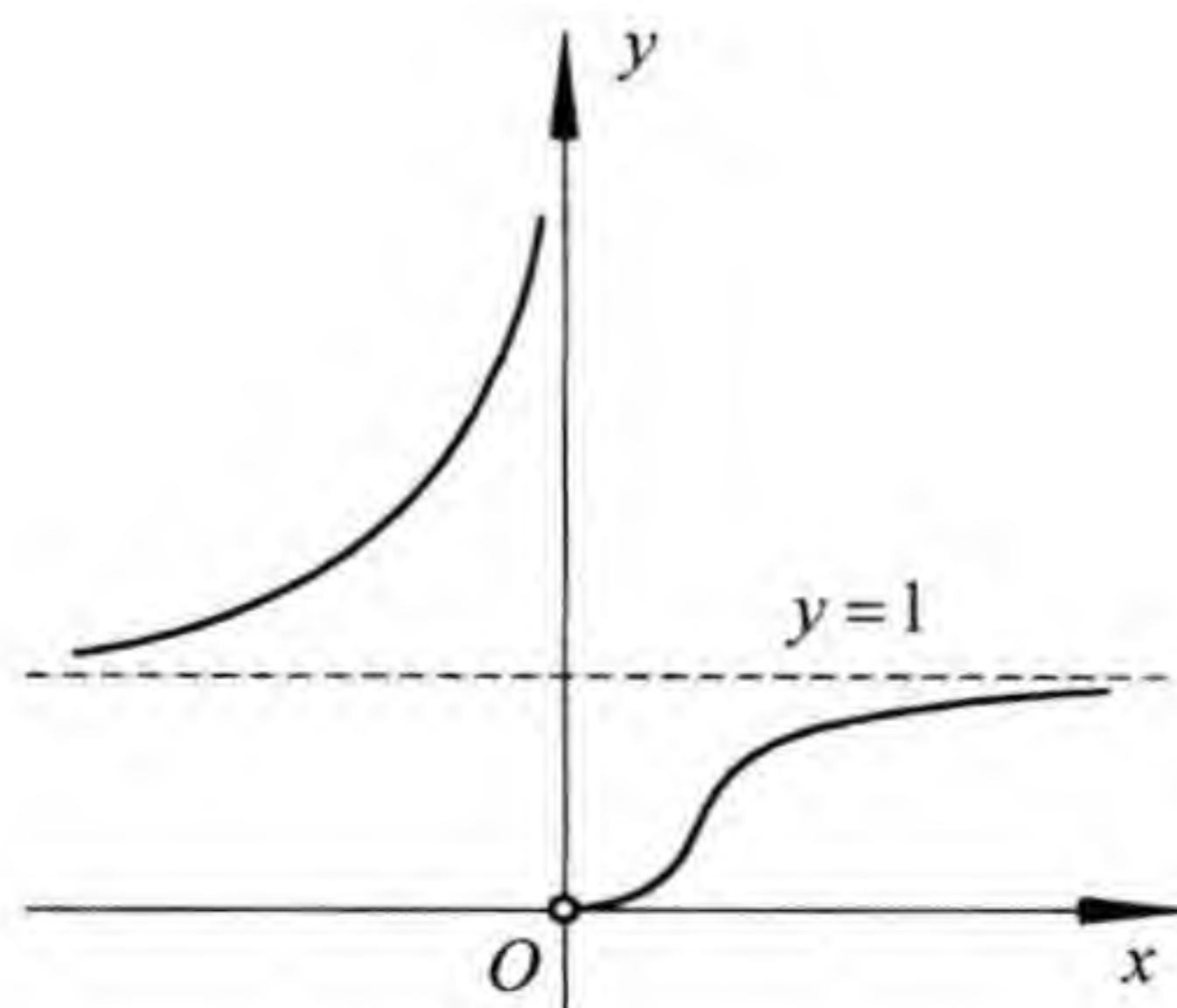


图 1.292

**【717】**  $y = e^{-\frac{1}{x}}$ .

解  $x = 0$  为第二类不连续点.  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} y = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} y = +\infty$ .

如图 1.292 所示.

**【718】**  $y = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}}$ .

解 因  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1$ , 故  $x = 0$  为“可去”的不连续点. 图像关于  $Oy$  轴对称, 如图 1.293 所示.



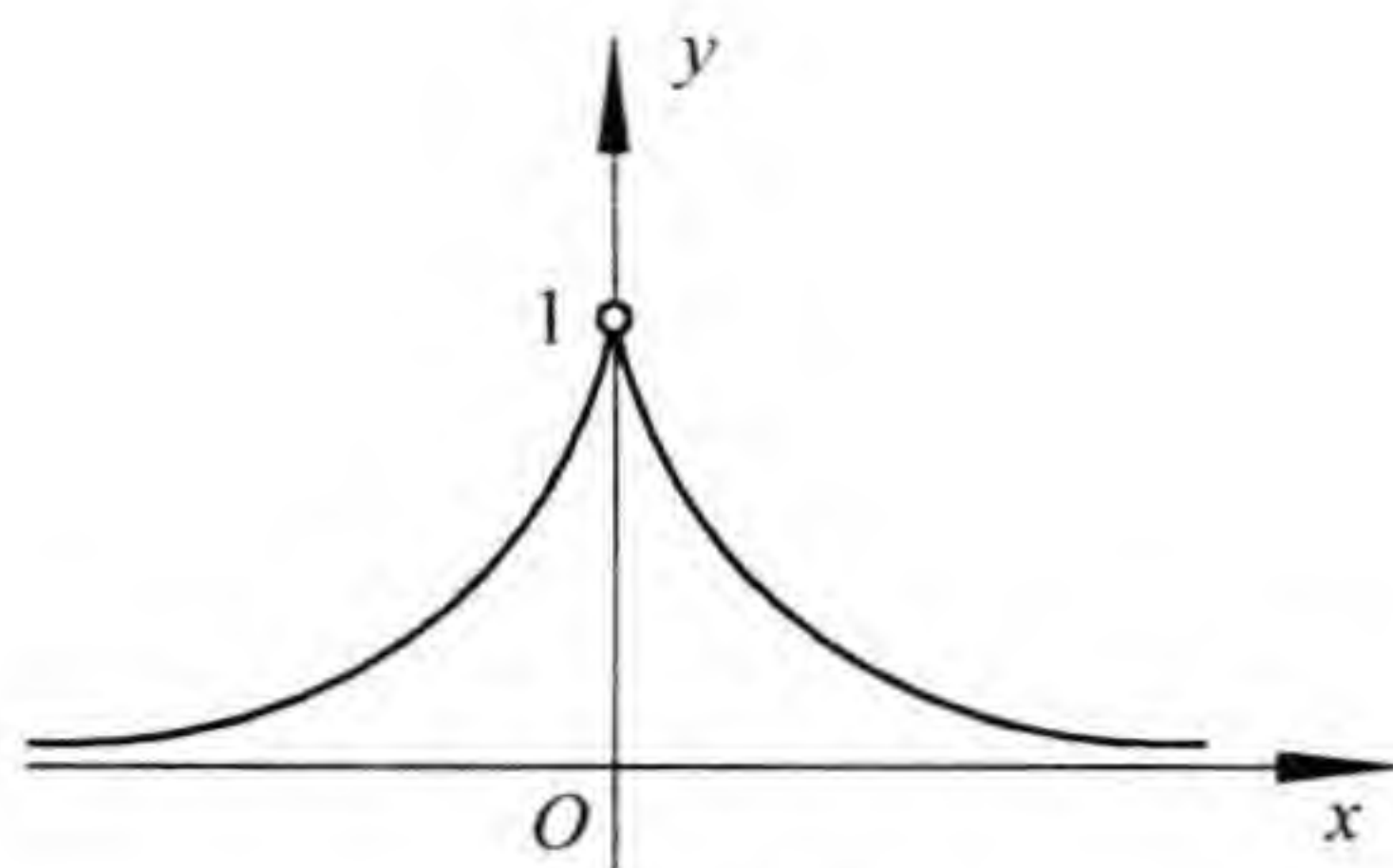


图 1.293

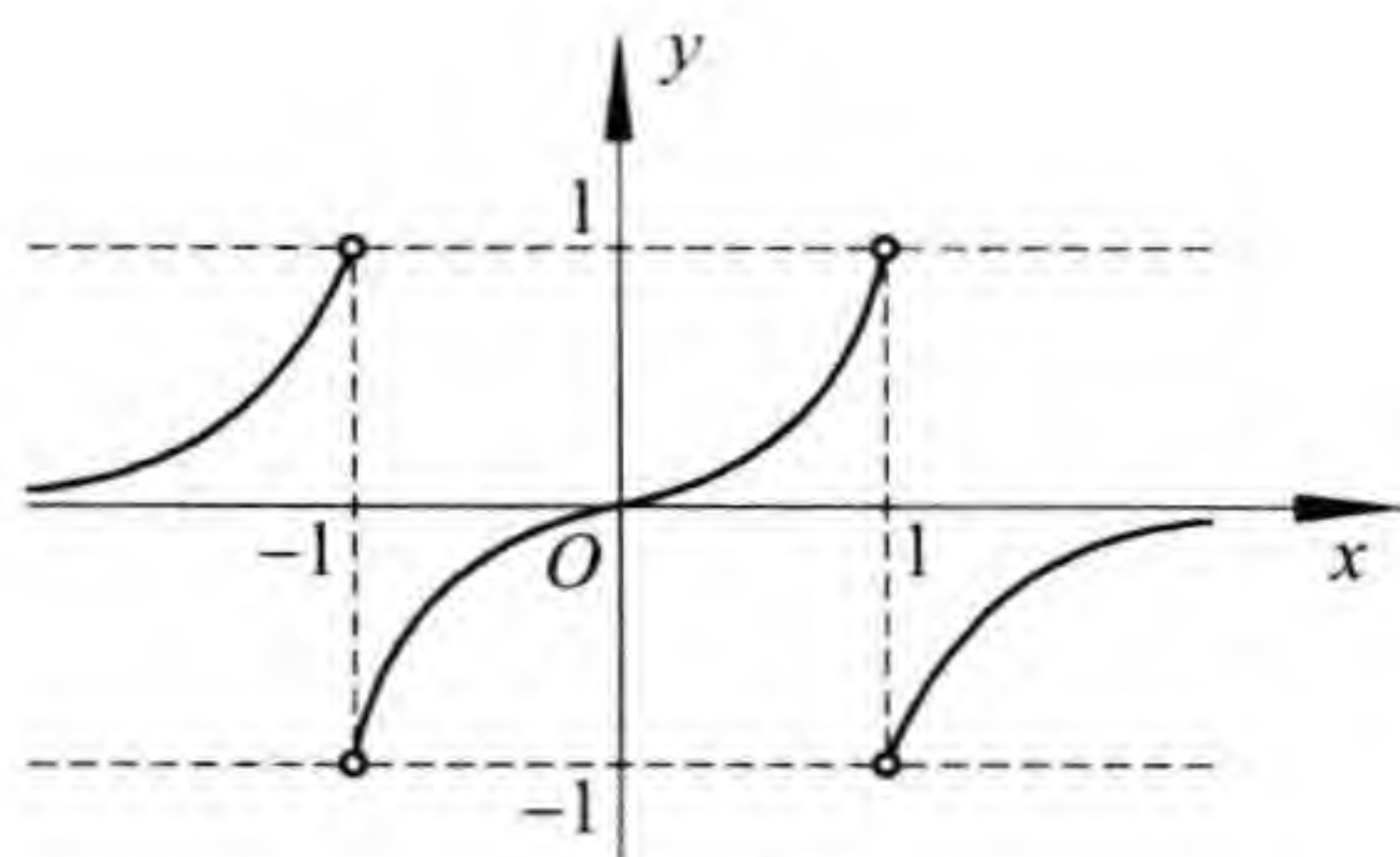


图 1.294

【719】  $y = \text{th} \frac{2x}{1-x^2}$ .

解  $x = \pm 1$  为第一类不连续点.  $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = -1$ .

图像关于原点对称, 如图 1.294 所示.

研究下列函数的连续性并作出其图像:

【720】  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} (x \geq 0)$ .

解  $y = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

$x = 1$  为第一类不连续点.

如图 1.295 所示.

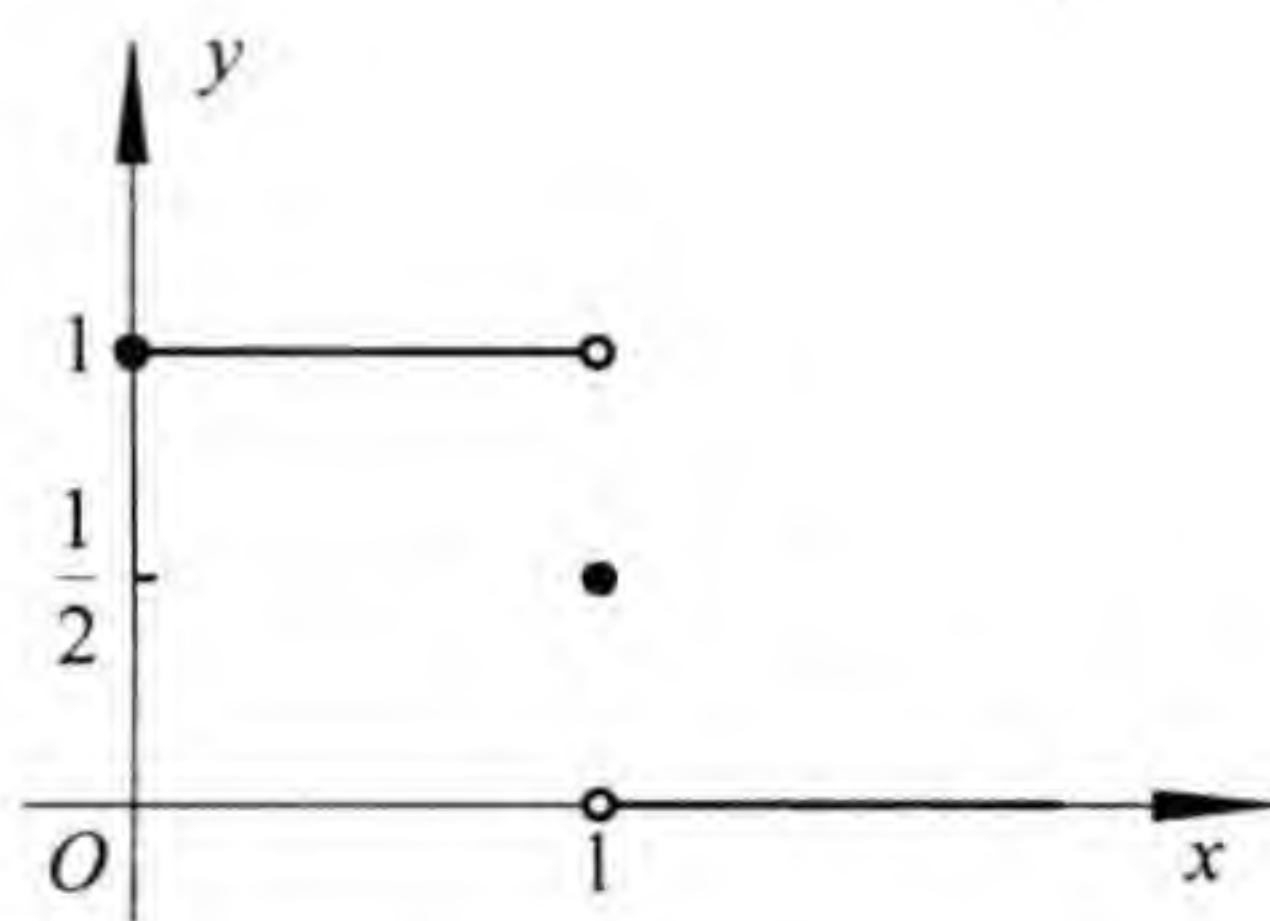


图 1.295

【721】  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$ .

提示 注意到  $y = \text{sgn} x$ , 即知点  $x = 0$  为函数的第一类不连续点.

解  $y = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

即  $y = \text{sgn} x$ .  $x = 0$  为第一类不连续点. 如图 1.296 所示.

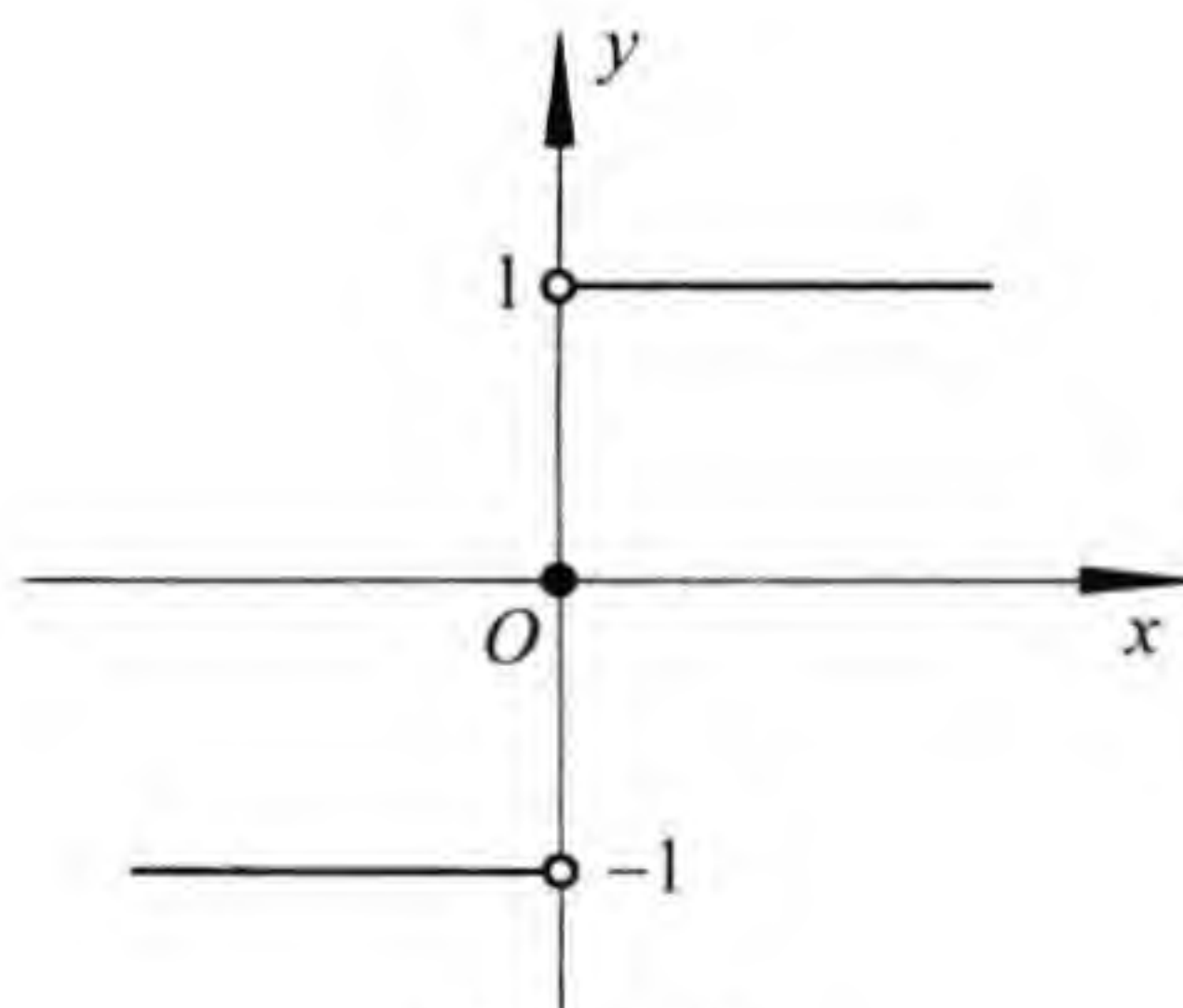


图 1.296

【722】  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$ .

解  $y = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ x^2, & |x| > 1. \end{cases}$  处处连续.

如图 1.297 所示.

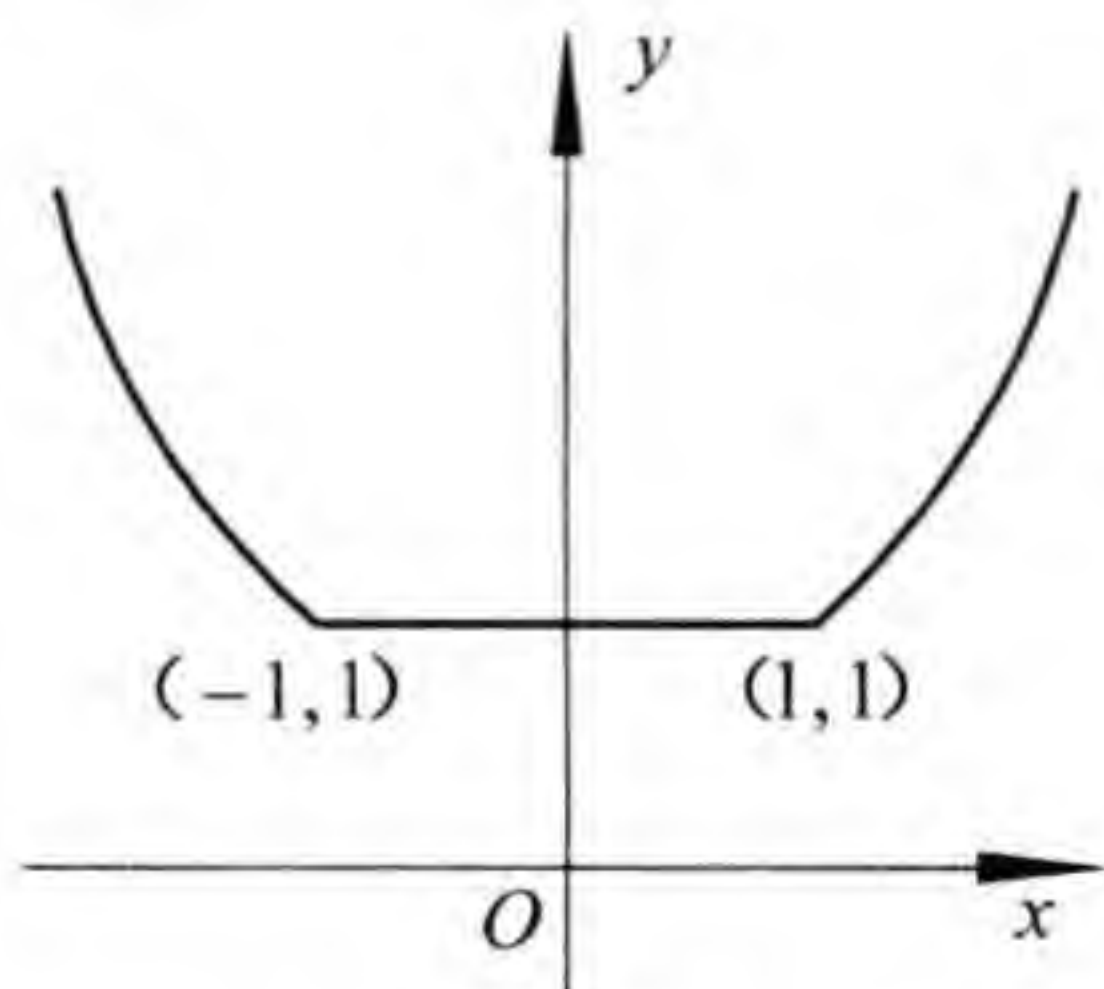


图 1.297

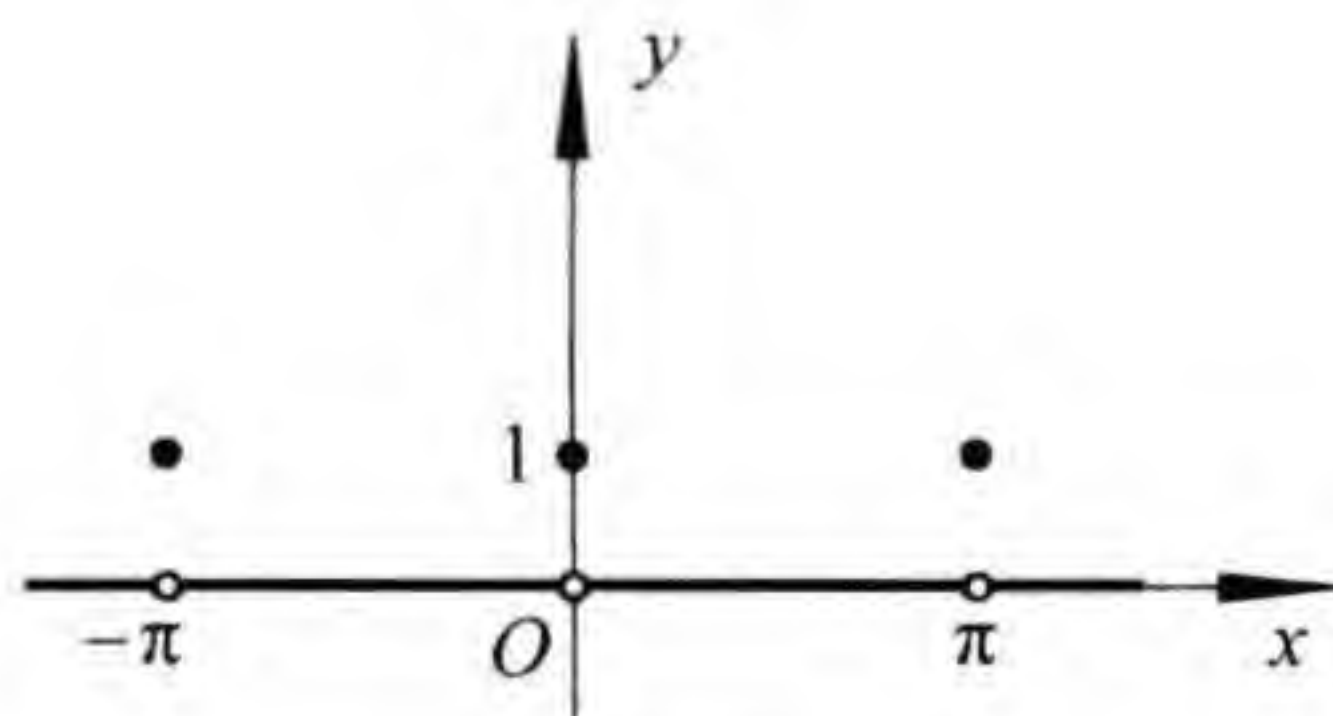


图 1.298

【723】  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x$ .

解  $y = \begin{cases} 1, & x = k\pi, \\ 0, & x \neq k\pi. \end{cases} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$   $x = k\pi$  为第一类不连续点.

如图 1.298 所示.



【724】  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2\sin x)^{2n}}$ .

解  $y = \begin{cases} x, & |x - k\pi| < \frac{\pi}{6}, \\ \frac{x}{2}, & x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, \\ 0, & \frac{\pi}{6} < |x - k\pi| < \frac{5\pi}{6}. \end{cases} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  为第一类不连续点.

如图 1.299 所示.

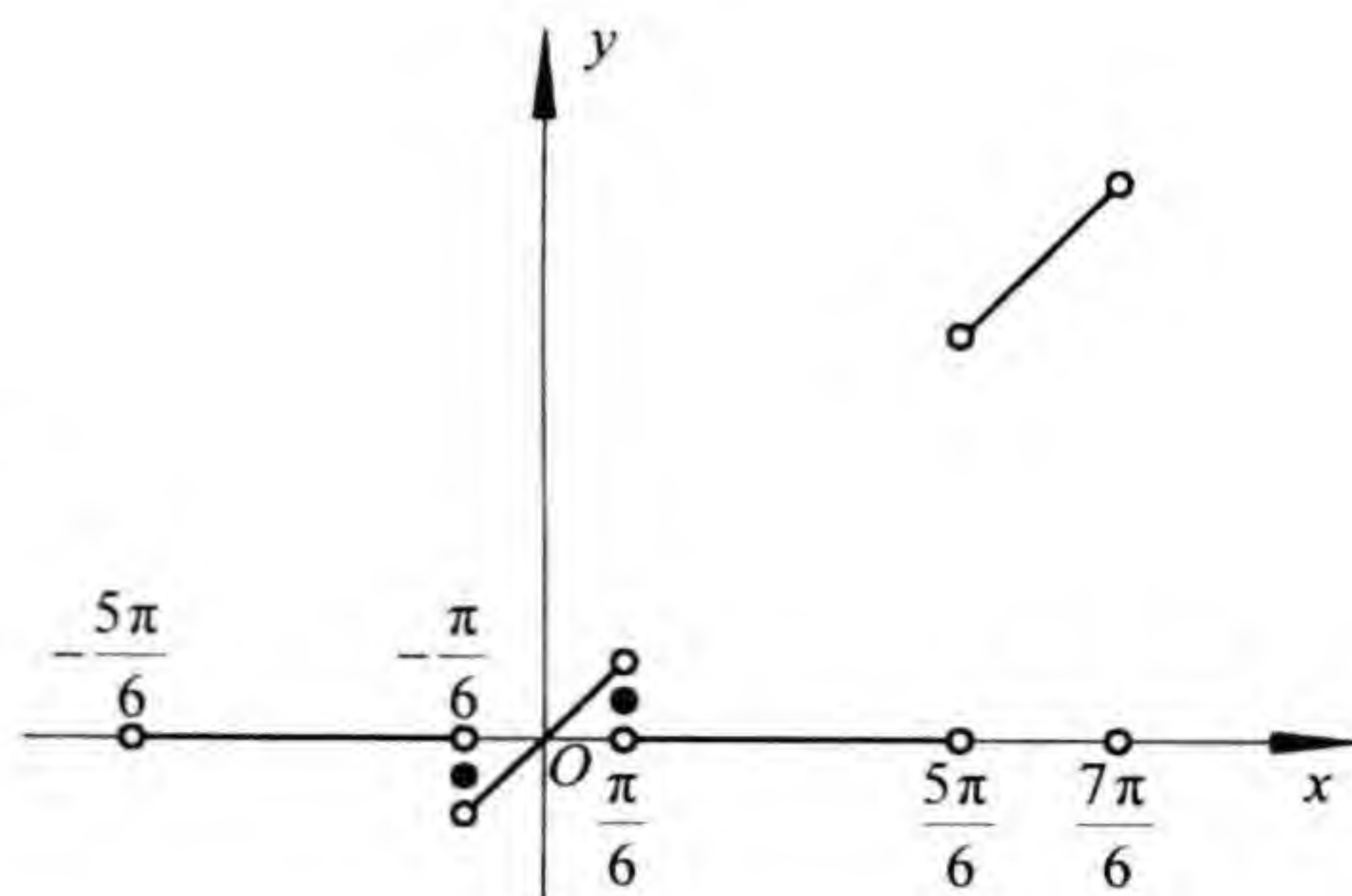


图 1.299

【725】  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} [x \arctan(n \cot x)]$ .

解  $y = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x, & k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2}x, & k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi. \end{cases} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$x = \frac{k\pi}{2} (k \neq 0)$  为第一类不连续点.

如图 1.300 所示.

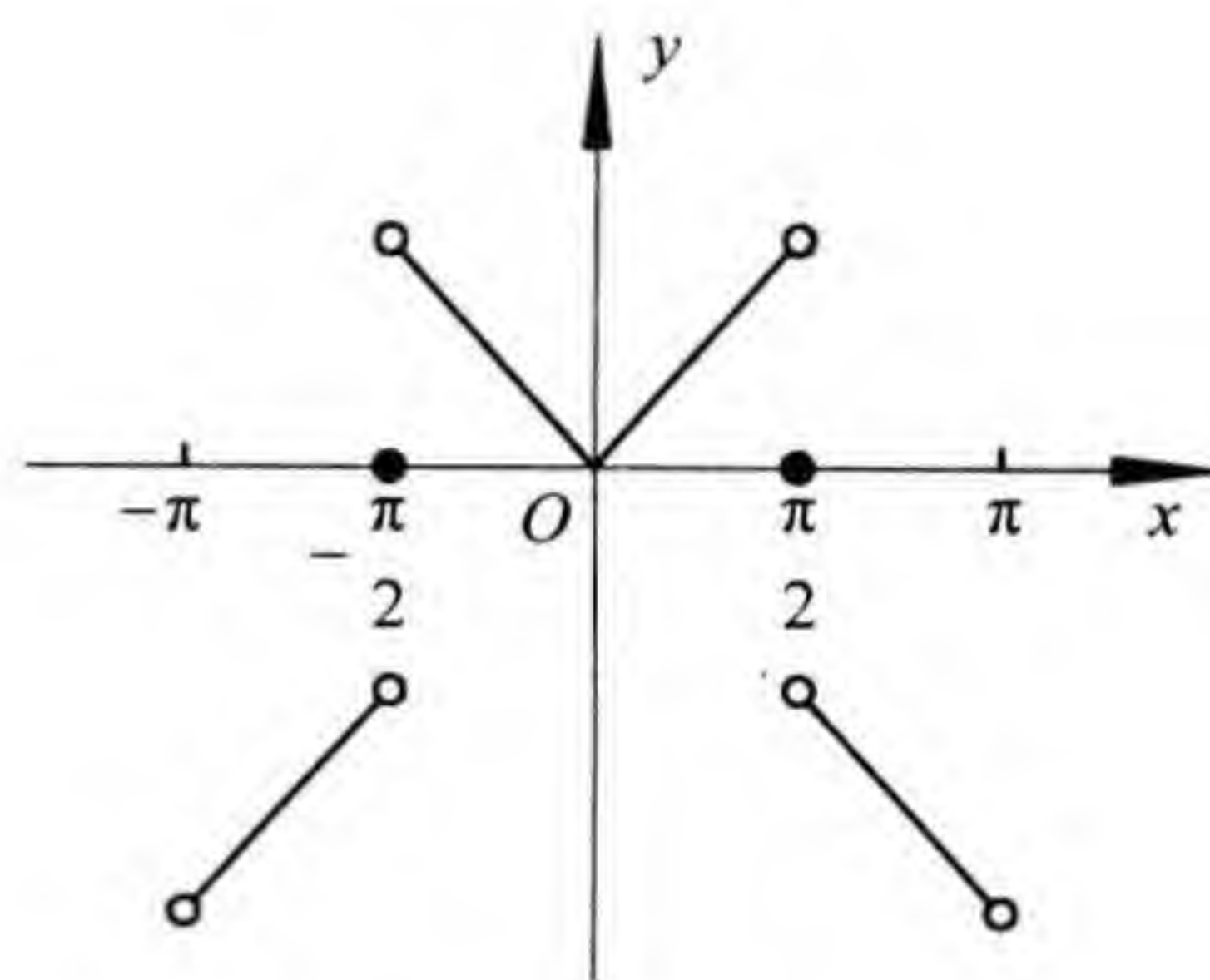


图 1.300

【726】  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$ .

解  $y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$  处处连续, 如图 1.301 所示.

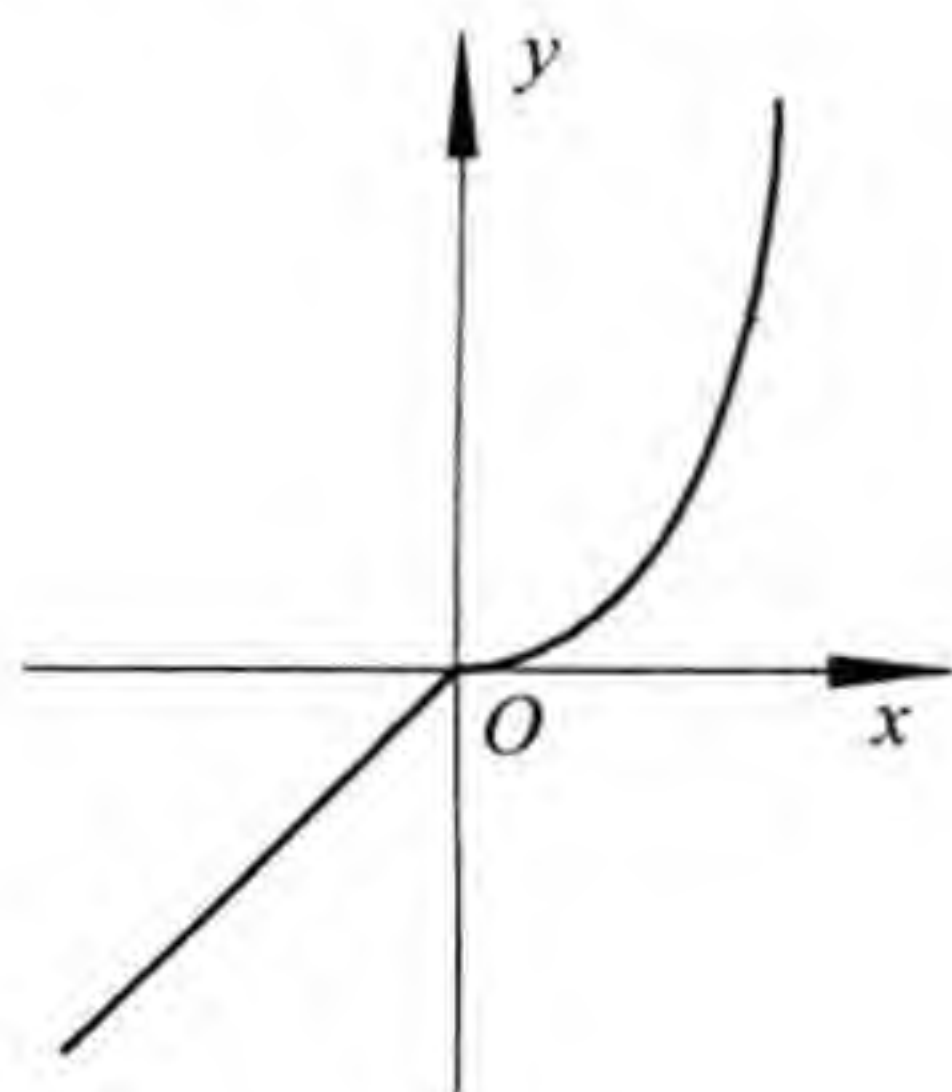


图 1.301

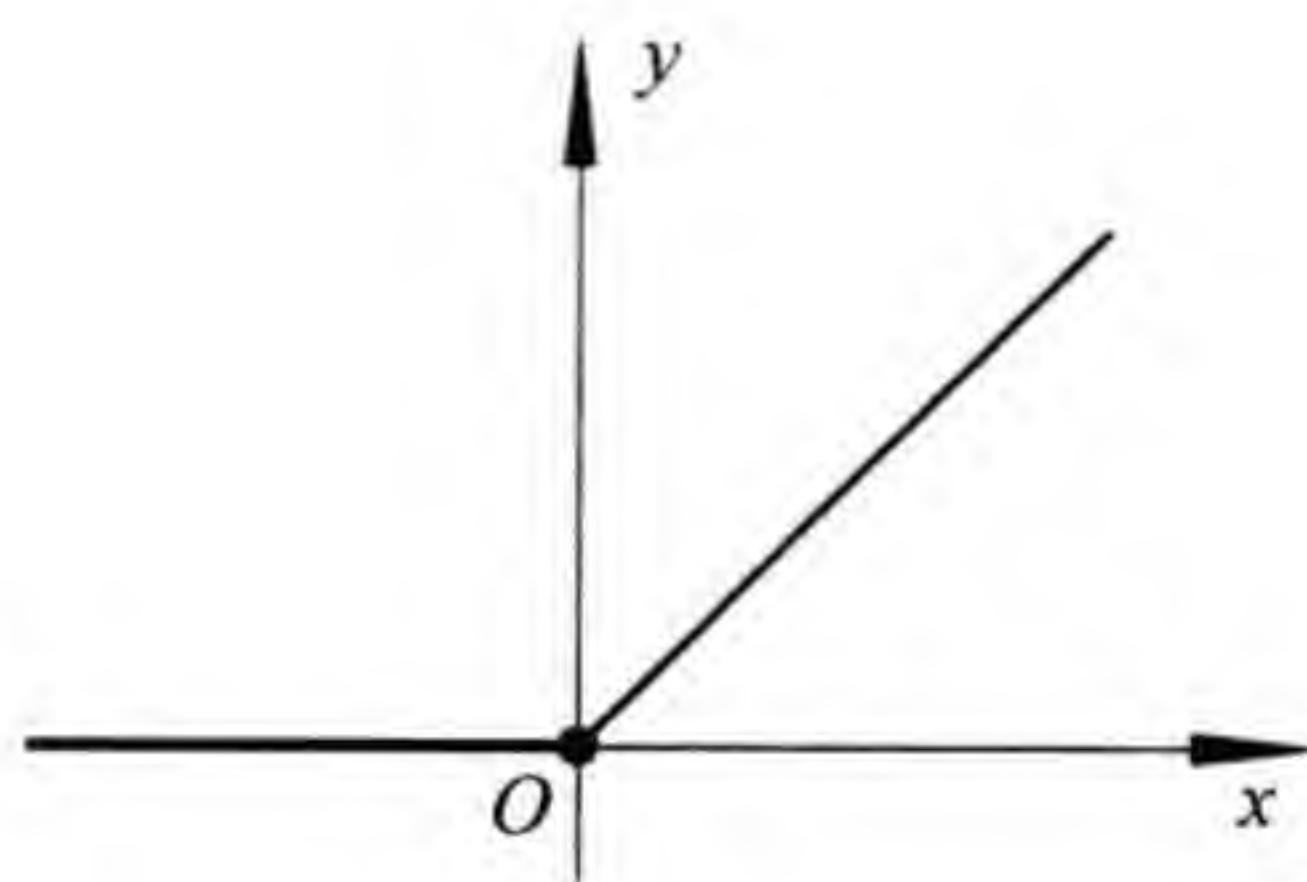


图 1.302

【727】  $y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{xt})}{\ln(1 + e^t)}$ .

解  $y = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$  处处连续, 如图 1.302 所示.

【728】  $y = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1+x) \tanh t x$ .

解  $y = \begin{cases} -(1+x), & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1+x, & x > 0. \end{cases}$

$x=0$  为第一类不连续点, 如图 1.303 所示.

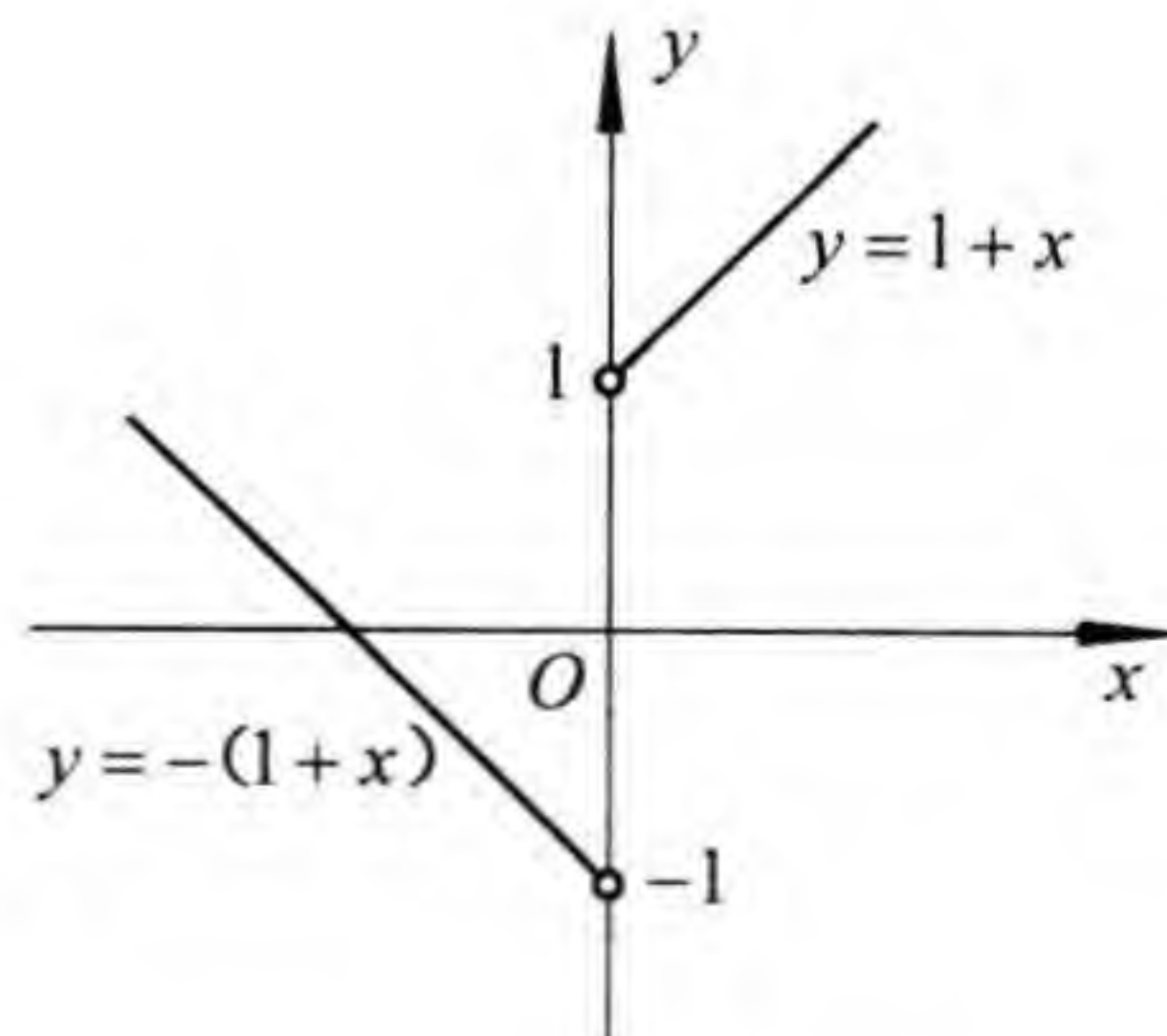


图 1.303



**【729】** 函数  $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$  是否连续?

解  $x=1$  为第一类不连续点, 在  $[0, 2]$  上  $f(x)$  不是连续函数.

如图 1.304 所示.

**【730】** 设  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a+x, & x \geq 0. \end{cases}$  怎样选择数  $a$ , 可使函数  $f(x)$  连续?

提示 注意到  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = a$  及  $f(0) = 0$ , 即知应选择  $a=1$  时, 方能保证函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续.

解 因  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = a$  及  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1$ , 而  $f(0) = a$ , 故当  $a=1$  时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0),$$

此即说明函数  $f(x)$  在  $x=0$  处连续; 至于当  $x \neq 0$  时,  $f(x)$  显然连续.

于是, 我们选择数  $a=1$ , 则函数  $f(x)$  在整个数轴上连续.

如图 1.305 所示.

**【731】** 研究下列函数的连续性并说明不连续点的性质:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2; \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1, \\ |x-1|, & |x| > 1; \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \cot^2 \pi x, & x \text{ 为非整数}, \\ 0, & x \text{ 为整数}; \end{cases}$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

解 (1) 连续函数.

(2)  $x=-1$  为第一类不连续点.

(3)  $x=-1$  为第一类不连续点.

(4)  $x=k$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 为无穷型不连续点.

(5)  $x \neq k$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 为第二类不连续点.

**【732】** 函数  $d=d(x)$  是数轴  $Ox$  上的点  $x$  与由线段  $0 \leq x \leq 1$  及  $2 \leq x \leq 3$  所构成点集间的最短距离. 求函数  $d$  的解析表示式, 作出其图像并研究其连续性.

解

$$d = \begin{cases} -x, & -\infty < x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ x-1, & 1 < x \leq \frac{3}{2}, \\ 2-x, & \frac{3}{2} < x < 2, \\ 0, & 2 \leq x \leq 3, \\ x-3, & 3 < x < +\infty. \end{cases}$$

处处连续, 如图 1.306 所示.

**【733】** 图像  $E$  是由高为 1 底为 1 的等腰三角形及底为 1 高为 2 及 3 的二矩形所构成 (图 1.307).

函数  $S=S(y)$  ( $0 \leq y < +\infty$ ) 是图像  $E$  介于平行线  $Y=0$  及  $Y=y$  之间的那一部分面积; 而函数  $b=b(y)$  ( $0 \leq y < +\infty$ ) 是用平行线  $Y=y$  去截图像所得截痕之长. 求函数  $S$  及  $b$  的解析表示式, 作出它们的图像并研究其连续性.

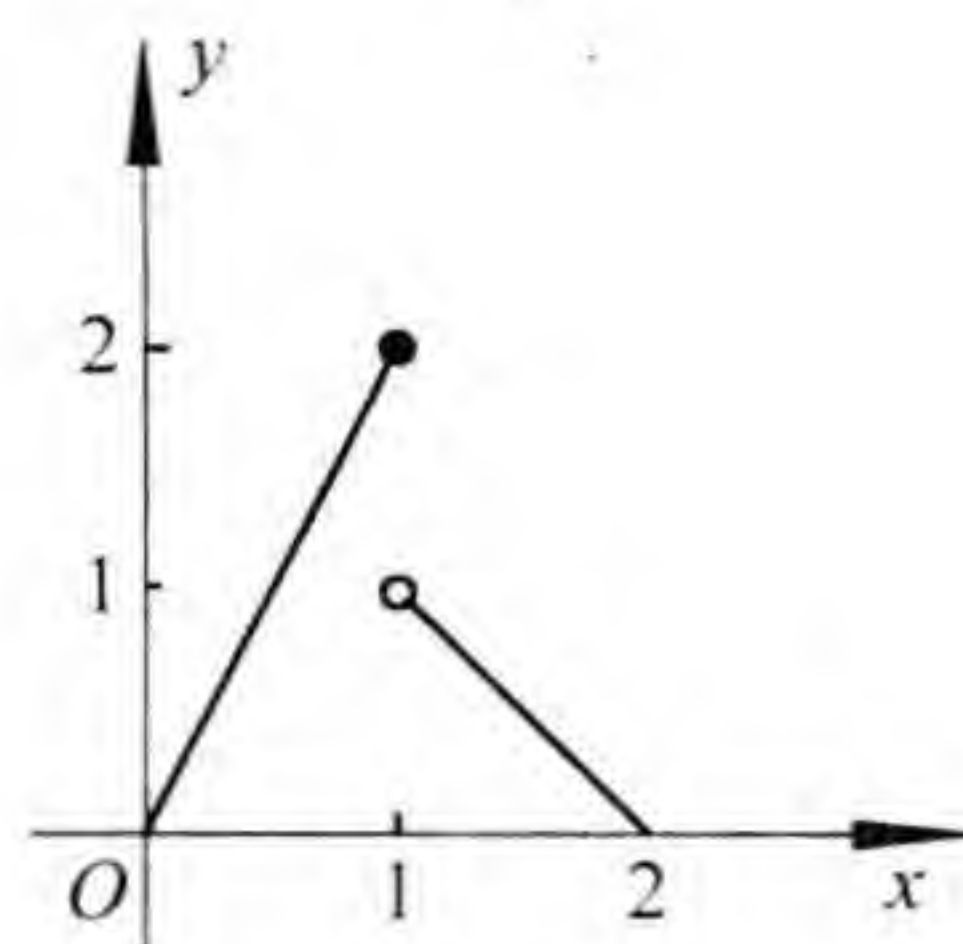


图 1.304

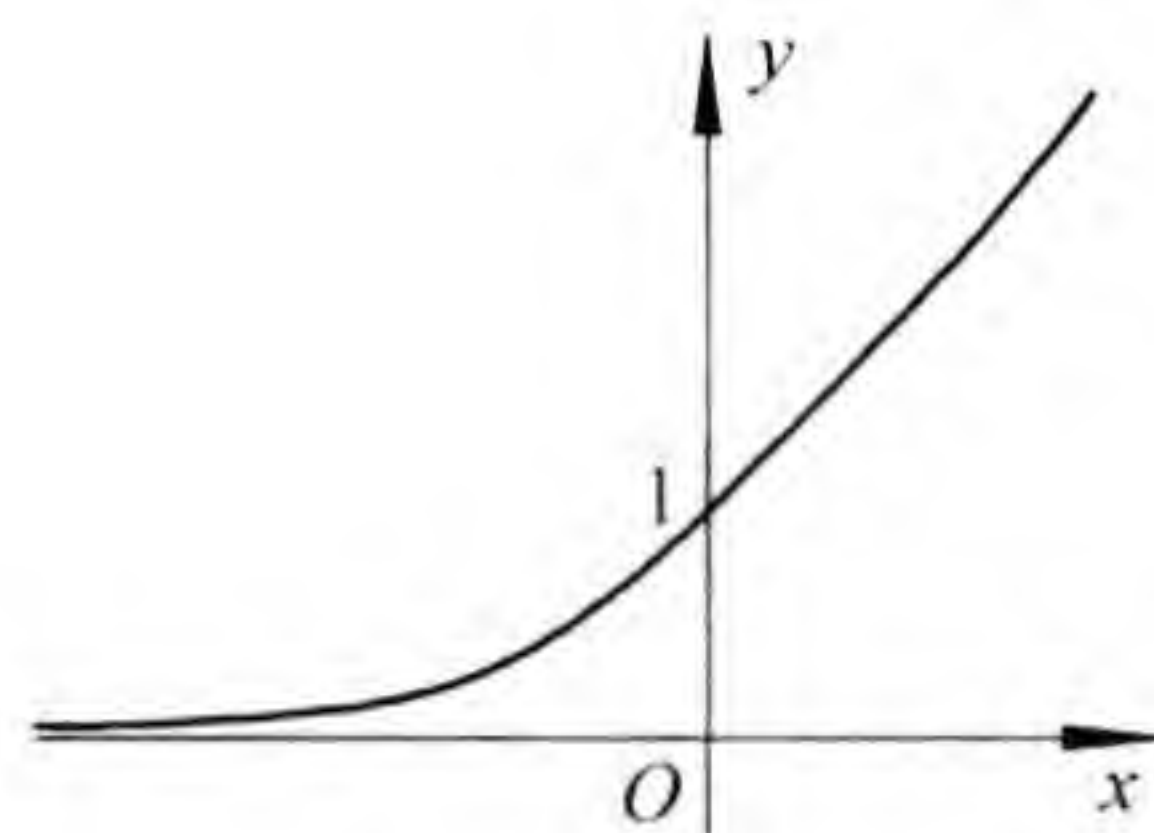


图 1.305

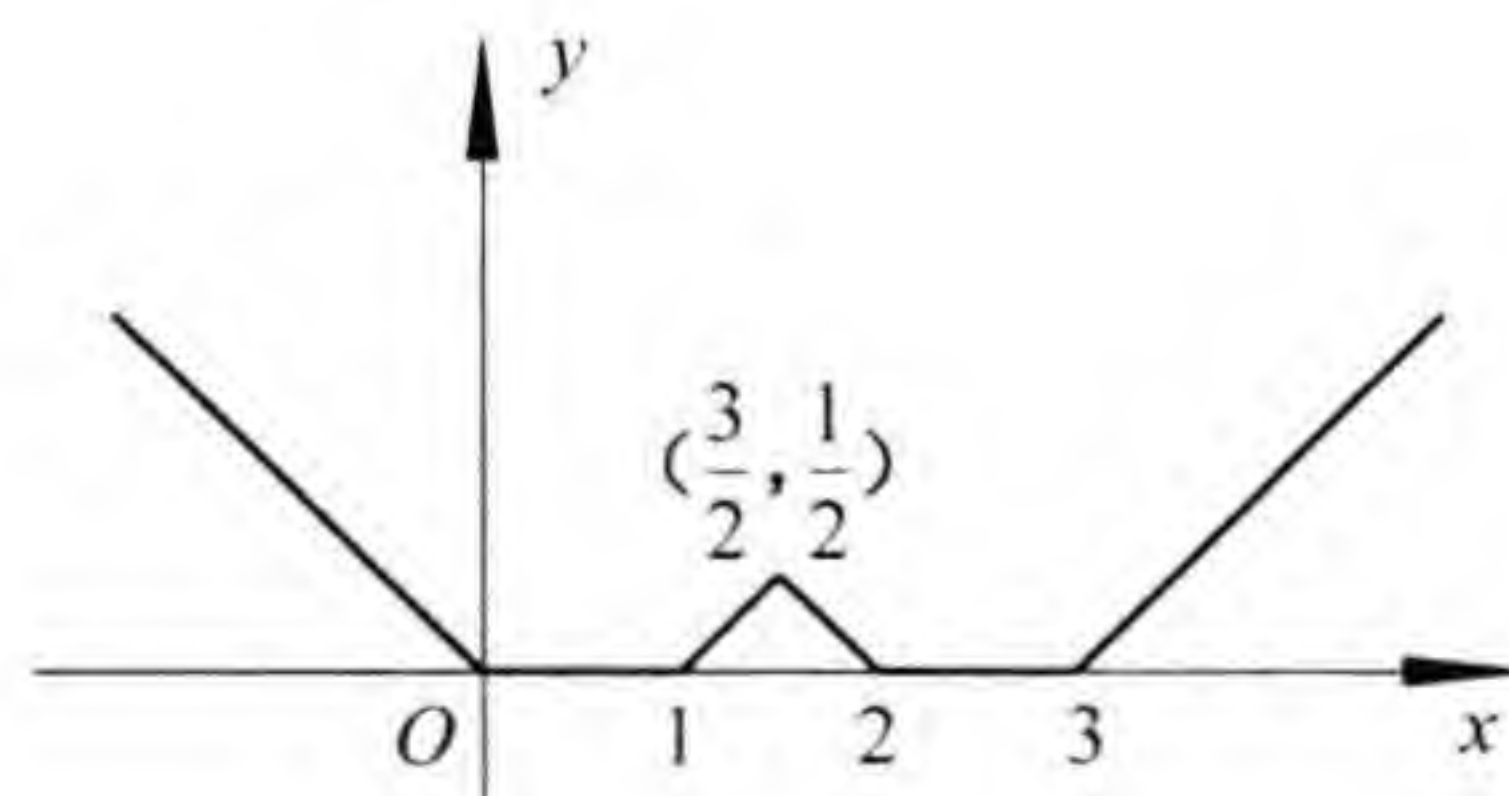


图 1.306



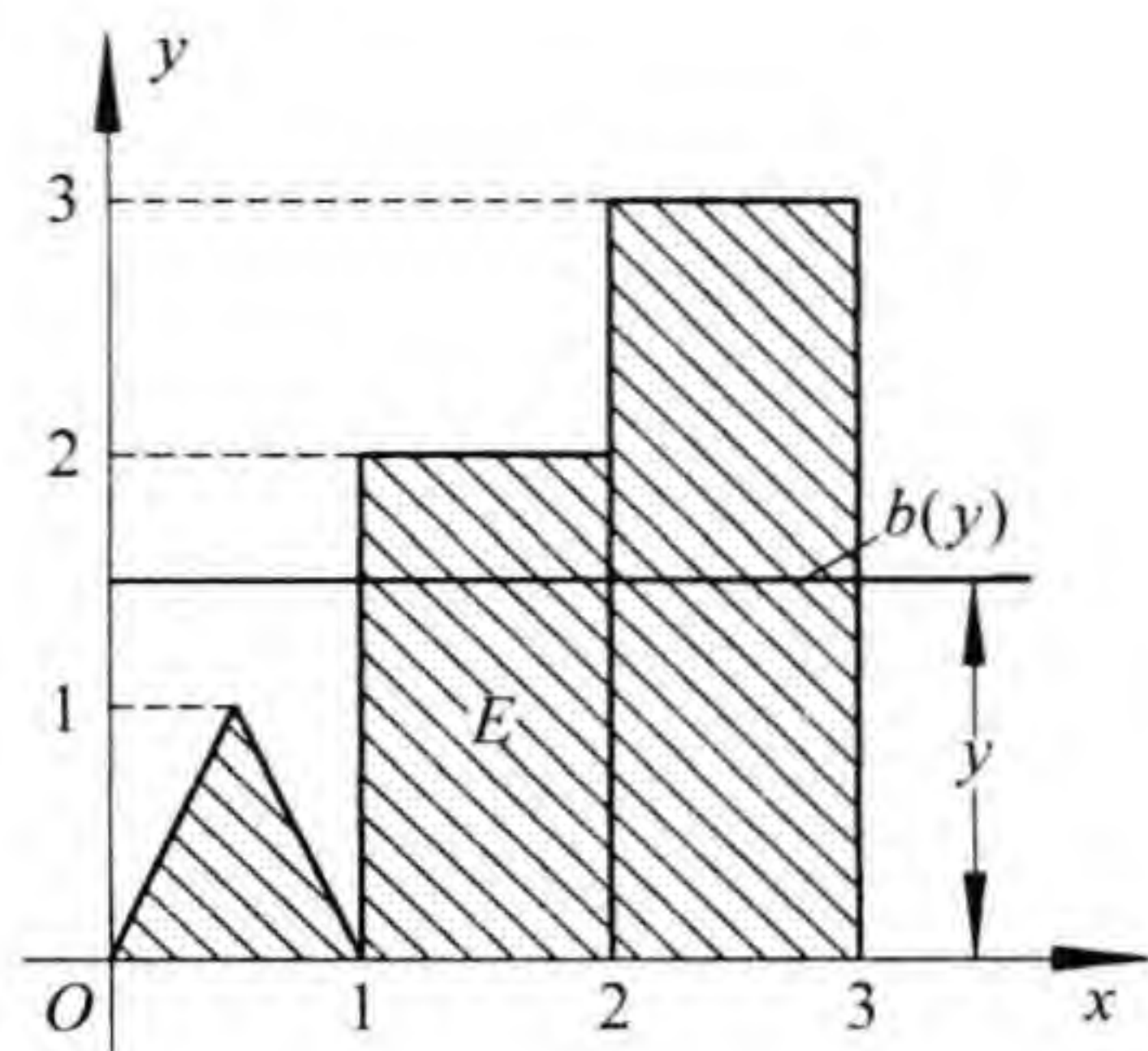


图 1.307

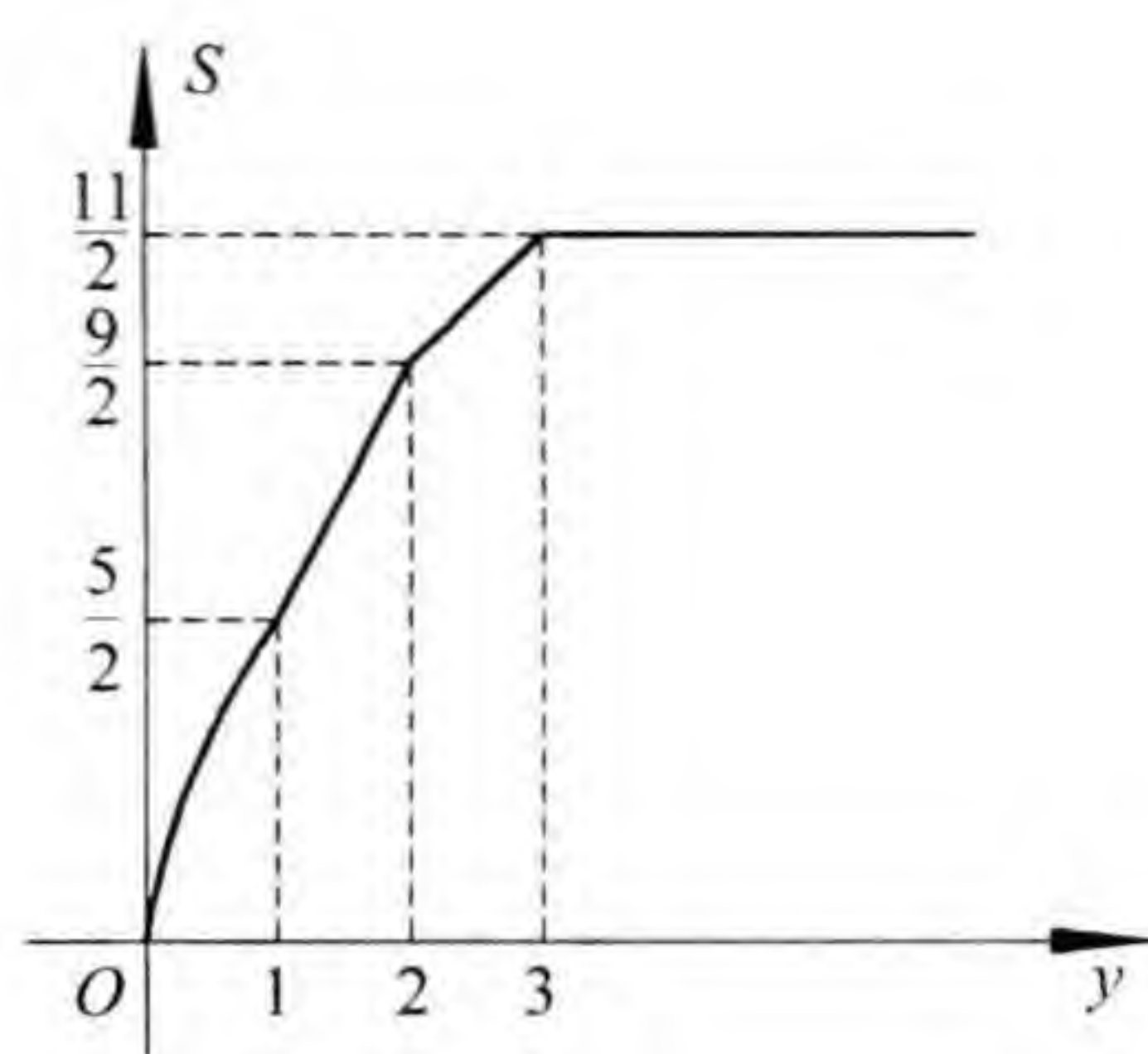


图 1.308

解

$$S = \begin{cases} 3y - \frac{y^2}{2}, & 0 \leq y \leq 1, \\ \frac{1}{2} + 2y, & 1 < y \leq 2, \\ \frac{5}{2} + y, & 2 < y \leq 3, \\ \frac{11}{2}, & 3 < y < +\infty. \end{cases}$$

处处连续,如图 1.308 所示.

对于函数  $b=b(y)$  根据假设,则有如下解析表示式:

$$b = \begin{cases} 3-y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 2, & 1 < y \leq 2, \\ 1, & 2 < y \leq 3, \\ 0, & 3 < y < +\infty. \end{cases}$$

$y=2$  及  $y=3$  为第一类不连续点,如图 1.309 所示.

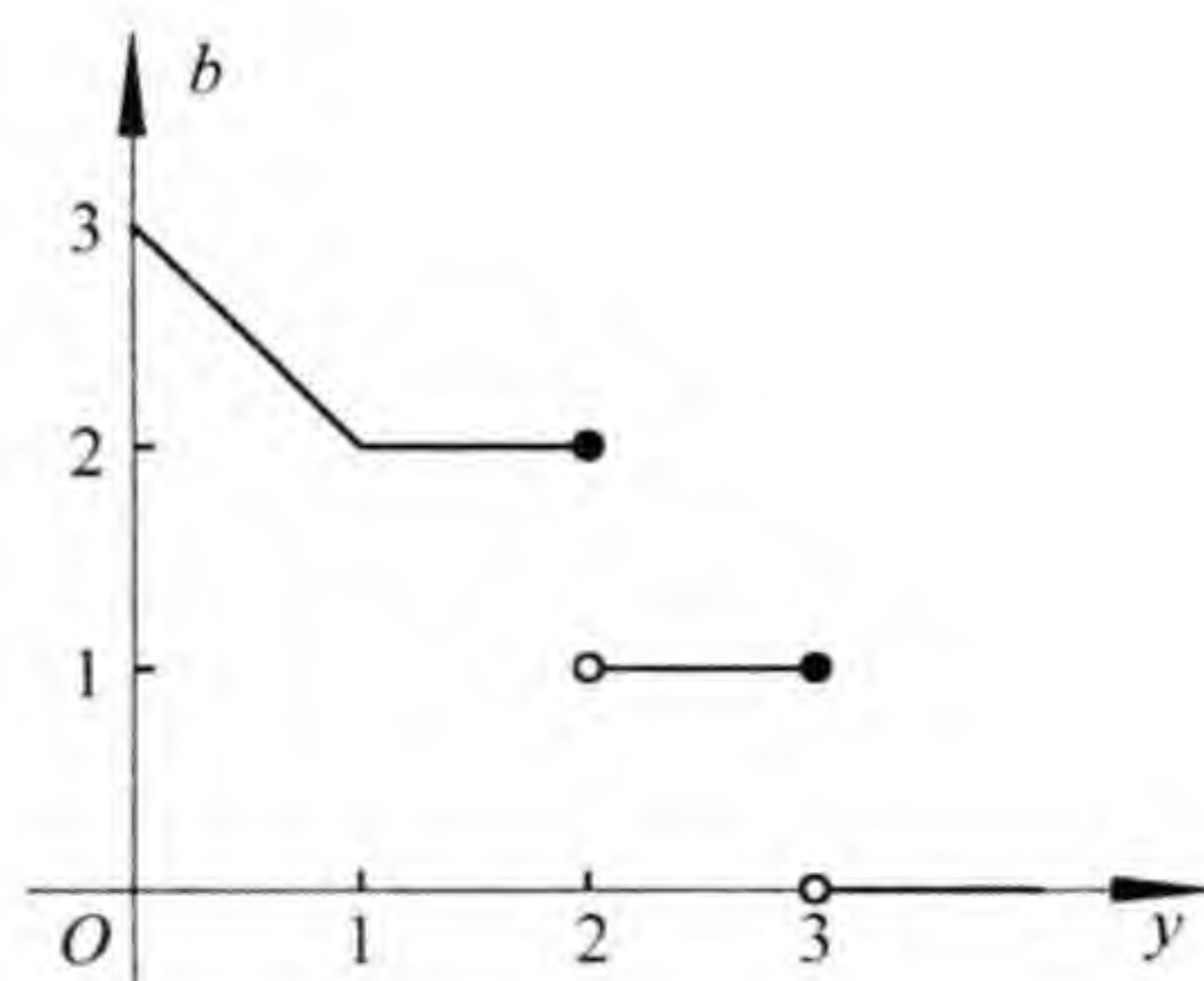


图 1.309

**【734】** 证明:狄利克雷函数

$$\chi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \{ \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x) \}$$

对于每一个  $x$  值都是不连续的.

**证明思路** 令  $f(m,n) = \cos^n(\pi m! x)$ . 当  $x$  为有理数时,即  $x = \frac{q}{p}$  ( $p, q$  为互素的整数,且  $p > 0$ ). 因此,当  $m > p$  时,有  $f(m,n) = 1$ ,于是,  $\chi(x) = 1$ ; 当  $x$  为无理数时,则对任一固定的  $m$ ,有  $|\cos(\pi m! x)| < 1$ ,于是,  $\chi(x) = 0$ . 由此可知

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

设  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 由于  $x_0$  的任何邻域中都有无穷多个有理数和无穷多个无理数,故极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \chi(x)$  不存在,从而  $\chi(x)$  在任一点  $x_0$  均不连续.

**证** 记  $f(m,n) = \cos^n(\pi m! x)$ .

当  $x$  为有理数时,总可认为  $m > p$ , 其中  $x = \frac{q}{p}$  ( $p, q$  为互素的整数). 于是,  $f(m,n) = 1$ , 故此时  $\chi(x) = 1$ ;

当  $x$  为无理数时,则对任一固定的  $m$  而言,  $|\cos(\pi m! x)| < 1$ , 从而,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x) = 0$ , 故此时  $\chi(x) = 0$ .

总之,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

由实数的稠密性可知,对于  $x$  的任意值在其任一邻域内含有无限个有理数和无理数,因而  $\chi(x)$  的值总



在 1 和 0 这两个数中取一个. 这样,  $\chi(x)$  的极限就不存在. 于是, 当  $x$  取任一值时,  $\chi(x)$  都是不连续的.

**【735】** 设有函数  $f(x) = x \cdot \chi(x)$ .

式中  $\chi(x)$  为狄利克雷函数(参阅 734 题), 研究此函数  $f(x)$  的连续性. 作出这函数的草图.

解

$$x \cdot \chi(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数及 } 0. \end{cases}$$

因此,  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \chi(x) = 0$  等于在  $x=0$  处的函数值, 故当  $x \neq 0$  时,  $x \cdot \chi(x)$  不连续, 而当  $x=0$  时,  $x \cdot \chi(x)$  连续, 如图 1.310 所示.

**【736】** 证明: 黎曼函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \text{ 其中 } m \text{ 和 } n \text{ 为互素的数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

当  $x$  取任一个有理值时不连续的, 而当  $x$  取任一个无理值时是连续的. 作出这个函数的略图.

证 不失一般性, 我们仅就区间  $[0, 1]$  讨论, 图 1.311 为  $f(x)$  在  $x \in [0, 2]$  时的略图.

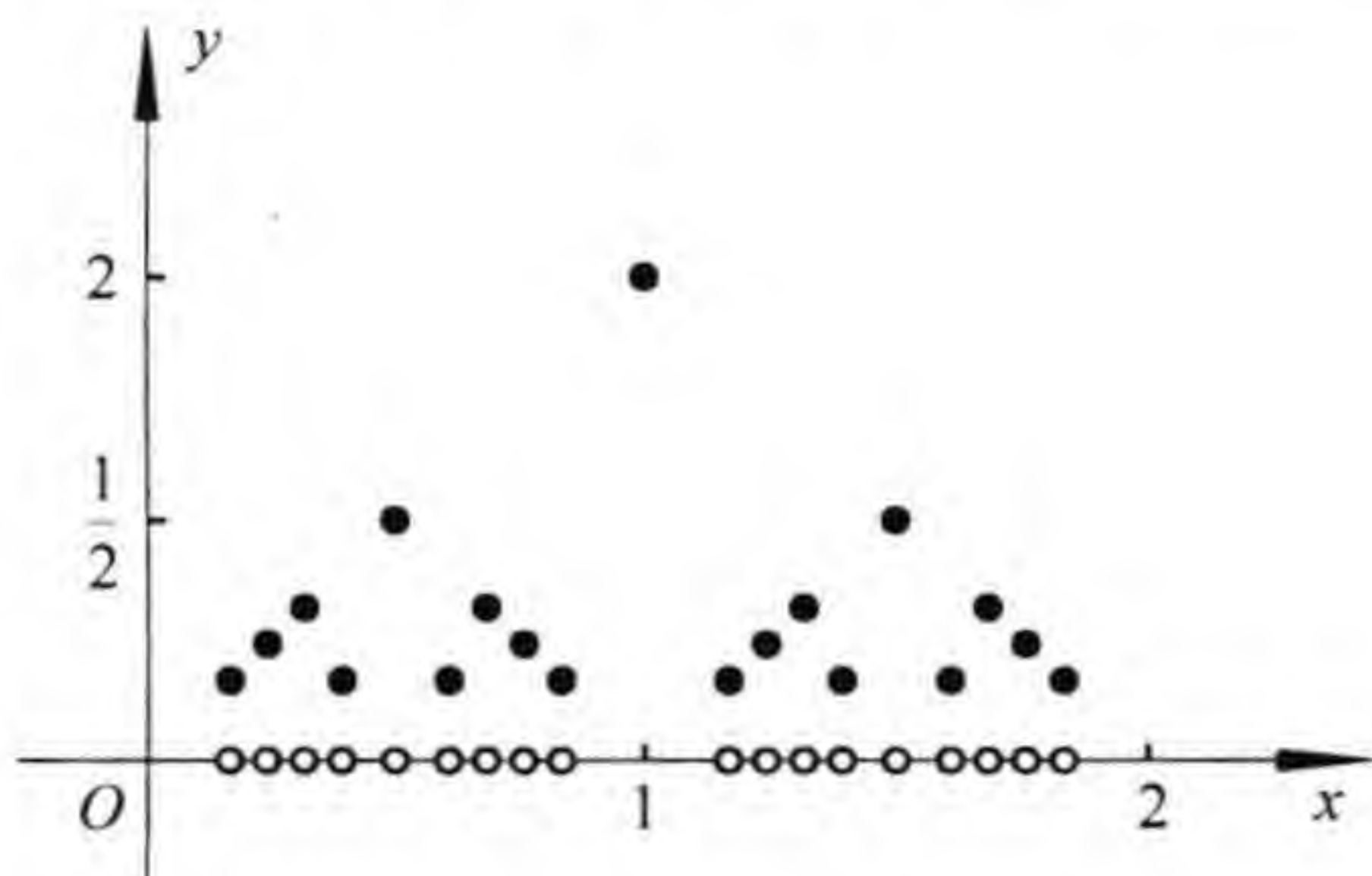


图 1.311

对于任意的  $x_0 \in [0, 1]$  来说, 若任取  $\epsilon > 0$ , 则满足不等式  $n < \frac{1}{\epsilon}$  的正整数  $n$  至多只有有限个, 即在  $[0, 1]$  中至多只有有限个有理数  $\frac{m}{n}$ , 使得  $f(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n} > \epsilon$ . 因而我们可以取  $\delta > 0$ , 使得  $x_0$  的邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内不含有这样的有理数(若  $x_0$  为有理数, 则可能除去  $x_0$ ). 于是, 只要  $0 < |x - x_0| < \delta$ , 不论  $x$  是否为有理数, 都成立  $|f(x)| < \epsilon$ . 即证明了对于  $[0, 1]$  中任意点  $x_0$ , 都成立

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = 0.$$

若  $x_0$  为无理数, 则  $f(x_0) = 0$ , 可见  $f(x)$  在  $x_0$  连续; 若  $x_0$  是有理数, 则  $f(x_0) \neq 0$ , 函数  $f(x)$  在  $x_0$  点有“可去”的间断, 即点  $x_0$  为  $f(x)$  的“可去”的不连续点.

**【737】** 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{nx}{n+1}, & x \text{ 为既约有理分数 } \frac{m}{n} (n \geq 1), \\ |x|, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

的连续性并作出此函数的草图.

证 当  $x < 0$  时,  $f(x)$  显然不连续, 而对于正有理数  $\xi = \frac{m}{n}$ ,  $f(\xi) = \frac{m}{n+1}$ . 若我们取一系列无理数  $x_k$  趋于  $\xi$ , 则  $\lim_{x_k \rightarrow \xi} f(x_k) = \frac{m}{n} \neq \frac{m}{n+1}$ , 故  $f(x)$  在正有理数点也不连续. 当  $\xi$  为正无理数时, 由于对任意的  $\epsilon > 0$ , 满足  $\frac{1}{q} > \epsilon$  的正整数  $q$  至多只有有限个. 与 736 题类似可证  $f(x)$  在点  $x = \xi$  连续. 如图 1.312 所示.

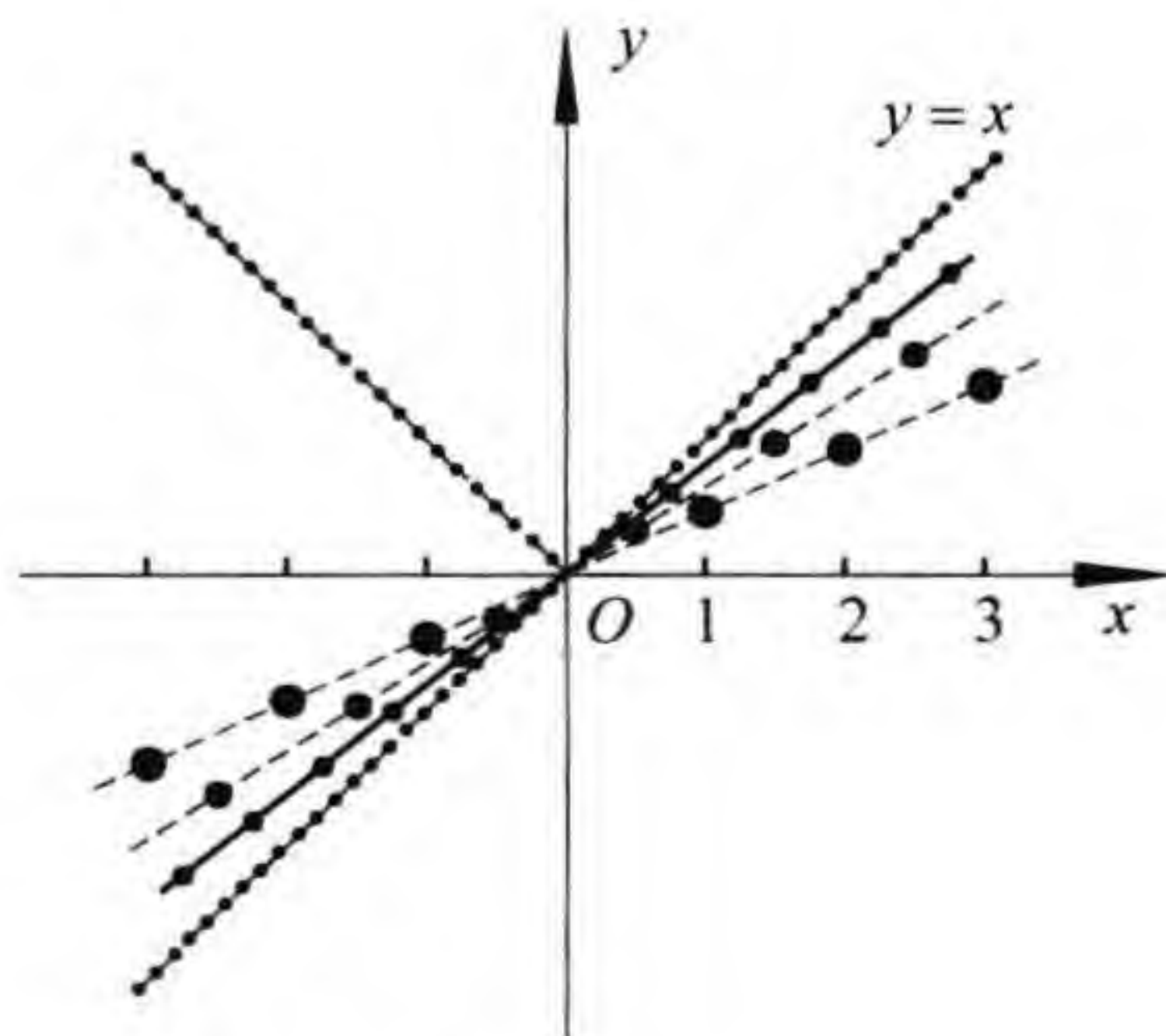


图 1.312



**【738】** 函数  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$  当自变量  $x$  取一切非零值时都有定义. 为了使此函数在  $x=0$  时连续, 应当以什么数值作为函数在点  $x=0$  的值?

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ , 所以, 应取  $f(0) = \frac{1}{2}$ , 那么,  $f(x)$  当  $x=0$  时是连续的.

**【739】** 证明: 无论怎样选取数  $f(1)$ , 函数  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  在  $x=1$  时都是不连续的.

证 因为  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty$ , 所以, 我们无法选择  $f(1)$  使之成为连续的.

**【740】** 下列函数  $f(x)$  当  $x=0$  时没有意义, 定义  $f(0)$  的值, 使得  $f(x)$  在点  $x=0$  连续:

$$(1) f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}; \quad (2) f(x) = \frac{\tan 2x}{x}; \quad (3) f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x};$$

$$(4) f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}; \quad (5) f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad (6) f(x) = x^x (x > 0);$$

$$(7) f(x) = x \ln^2 x.$$

提示 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \frac{3}{2}$ . (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = 2$ .

(3)(4)(5)(6)(7) 均仿(1)及(2).

解 (1) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{(1+x)^2} + \sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{3}{2}$ , 故取  $f(0) = \frac{3}{2}$ .

(2) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = 2$ , 故取  $f(0) = 2$ .

(3) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin \frac{1}{x} = 0$ , 故取  $f(0) = 0$ .

(4) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ , 故取  $f(0) = e$ .

(5) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ , 故取  $f(0) = 0$ .

(6) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$ , 故取  $f(0) = 1$ .

(7) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x = 0$ , 故取  $f(0) = 0$ .

**【741】** 设: (1) 函数  $f(x)$  当  $x=x_0$  时是连续的, 而函数  $g(x)$  当  $x=x_0$  时是不连续的; (2) 当  $x=x_0$  时函数  $f(x)$  和  $g(x)$  二者都是不连续的, 则此二函数的和  $f(x)+g(x)$  在已知点  $x_0$  是否必为不连续的? 举出适当的例子.

提示 (1) 用反证法易证不连续.

(2) 不. 例如,  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$  及  $g(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$

解 (1)  $f(x)+g(x)$  必为不连续的. 事实上, 设  $F(x) = f(x)+g(x)$ .

对于函数  $F(x) - f(x) = g(x)$ , 如果  $F(x)$  在  $x_0$  连续, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [F(x) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F(x_0) - f(x_0) = g(x_0).$$

因此若当  $g(x_0)$  有意义, 则  $g(x_0) = F(x_0) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , 这与假设是矛盾的, 故  $F(x)$  在点  $x_0$  不连续;

若  $g(x_0)$  没有意义, 那么当然它在  $x_0$  点不连续.

(2) 不. 例如,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad \text{及} \quad g(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

它们在点  $x=0$  处均不连续, 但其和  $f(x)+g(x) \equiv 0$  却处处连续.

**【742】** 设: (1) 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 而函数  $g(x)$  在点  $x_0$  不连续; (2) 当  $x=x_0$  时函数  $f(x)$  和  $g(x)$



二者都是不连续的,则此二函数的乘积  $f(x)g(x)$  在已知点  $x_0$  是否必不连续? 举出适当的例子.

提示 (1) 不. 例如,  $f(x)=0$  及  $g(x)=\begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

(2) 不. 例如,  $f(x)=g(x)=\begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

解 (1) 不. 例如,

$$g(x)=\begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{及} \quad f(x)=0.$$

它们满足假设条件,其中  $f(x)$  处处连续,而  $g(x)$  在点  $x=0$  不连续,但  $f(x)g(x) \equiv 0$  处处连续.

(2) 不. 例如

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{及} \quad g(x)=f(x).$$

它们均在点  $x=0$  处不连续,但其乘积  $f(x)g(x) \equiv 1$  却处处连续.

**【743】** 可否断定不连续函数的平方仍为不连续函数? 举出处处不连续但其平方连续的函数的例子.

解 不能. 例如 742 题(2)之例.

又对于函数  $f(x)=\begin{cases} -1, & x \text{ 为有理数}, \\ 1, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$  处处不连续,但平方后所得函数  $f^2(x) \equiv 1$  却处处连续.

**【744】** 研究函数  $f[g(x)]$  及  $g[f(x)]$  的连续性:

(1)  $f(x)=\operatorname{sgn} x$  及  $g(x)=1+x^2$ ;

(2)  $f(x)=\operatorname{sgn} x$  及  $g(x)=x(1-x^2)$ ;

(3)  $f(x)=\operatorname{sgn} x$  及  $g(x)=1+x-[x]$ .

解 (1)  $f[g(x)] \equiv 1$  处处连续; 而  $g[f(x)]=\begin{cases} 2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$  在  $x=0$  点不连续.

(2) 因为  $g(x)=x(1-x^2)$  当  $x < -1$  或  $0 < x < 1$  时为正, 而当  $-1 < x < 0$  或  $x > 1$  时为负, 故

$$f[g(x)]=\begin{cases} 1, & x < -1, \\ 0, & x = -1, \\ -1, & -1 < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ -1, & x > 1. \end{cases}$$

在点  $x=-1, x=0, x=1$  处不连续. 而  $g[f(x)] \equiv 0$  却处处连续.

(3)  $f[g(x)] \equiv 1$  处处连续.  $g[f(x)] \equiv 1$  也处处连续.

**【745】** 设

$$f(u)=\begin{cases} u, & 0 < u \leq 1, \\ 2-u, & 1 < u < 2, \end{cases} \quad \varphi(x)=\begin{cases} x, & x \text{ 为有理数}, \\ 2-x, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

其中  $0 < x < 1$ .

研究复合函数  $y=f(u)$  的连续性, 其中  $u=\varphi(x)$ .

解 当  $x$  为有理数时,  $u=x$ , 且  $0 < u < 1$ , 故  $f(u)=x$ ; 当  $x$  为无理数时,  $u=2-x$  且  $1 < u < 2$ , 故  $f(u)=2-u=x$ . 从而,  $f[\varphi(x)] \equiv x$  处处连续.

**【746】** 证明: 若  $f(x)$  为连续函数, 则下列函数也是连续的:  $F(x)=|f(x)|$ .

证 设  $x_0$  为任一连续点, 则对于任给的  $\epsilon > 0$ , 总存在一个正数  $\delta$ , 使当  $|x-x_0| < \delta$  时, 恒有  $|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$ . 由

$$||f(x)|-|f(x_0)|| \leq |f(x)-f(x_0)| \quad \text{知} \quad ||f(x)|-|f(x_0)|| < \epsilon,$$



故  $F(x)$  在点  $x_0$  也连续, 由点  $x_0$  的任意性可知,  $F(x)$  也是连续的.

**【747】** 证明: 若函数  $f(x)$  是连续的, 则函数

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c, \\ f(x), & |f(x)| \leq c, \\ c, & f(x) > c. \end{cases}$$

(式中  $c$  为任意的正数) 也是连续函数.

提示  $f_c(x) = \frac{1}{2}(|c+f(x)| - |c-f(x)|)$ .

证 易知  $f_c(x) = \frac{1}{2}(|c+f(x)| - |c-f(x)|)$ . 于是, 利用 746 题的结果, 即知  $f_c(x)$  是连续函数.

**【748】** 证明: 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则函数

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\} \quad \text{和} \quad M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$$

在  $[a, b]$  上也是连续的.

证 只证  $m(x)$  在  $[a, b]$  连续.  $M(x)$  连续性之证完全类似. 设  $x_0 \in [a, b]$ . 先证  $m(x)$  在点  $x_0$  右连续. 任给  $\epsilon > 0$ . 由于  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 故存在  $\delta > 0$ , 使当  $|x - x_0| < \delta$  时, 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

于是, 当  $x_0 < x < x_0 + \delta$  时, 有  $f(x) > f(x_0) - \epsilon \geq m(x_0) - \epsilon$ .

而当  $a \leq x \leq x_0$  时,  $f(x) \geq m(x) > m(x_0) - \epsilon$ . 由此可知当  $x_0 < x < x_0 + \delta$  时,  $m(x) \geq m(x_0) - \epsilon$ . 又因  $m(x)$  显然是递减的, 故  $m(x_0) \geq m(x) \geq m(x_0) - \epsilon$  (当  $x_0 < x < x_0 + \delta$  时).

由此可知  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} m(x) = m(x_0)$ , 即  $m(x)$  在  $x_0$  右连续. 下证左连续, 不妨设  $f(x)$  在  $[a, x_0]$  的最小值在点  $x = x_0$  达到, 即  $m(x_0) = f(x_0)$  (否则, 若  $m(x_0) = f(x_1)$ ,  $a \leq x_1 < x_0$ . 则显然知, 当  $x_1 < x < x_0$  时  $m(x) \equiv m(x_0)$ , 从而左连续). 任给  $\epsilon > 0$ . 仿上述, 存在  $\delta > 0$ , 使当  $x_0 - \delta < x < x_0$  时, 恒有

$$f(x) < f(x_0) + \epsilon = m(x_0) + \epsilon,$$

因此,  $m(x) < m(x_0) + \epsilon$ , 从而,  $m(x_0) \leq m(x) < m(x_0) + \epsilon$  (当  $x_0 - \delta < x < x_0$  时). 由此可知  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} m(x) = m(x_0)$ , 即  $m(x)$  在  $x_0$  左连续.

证毕.

**【749】** 证明: 若函数  $f(x)$  和  $g(x)$  是连续的, 则函数  $\varphi(x) = \min[f(x), g(x)]$  和  $\psi(x) = \max[f(x), g(x)]$  也是连续的.

证 由  $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]$ ,

$$\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|],$$

利用 746 题的结果, 即知  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  为连续的.

**【750】** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  有定义并有界, 证明: 函数

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\} \quad \text{和} \quad M(x) = \sup_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\}$$

在闭区间  $[a, b]$  上是左连续的. 而函数

$$\bar{m}(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\} \quad \text{和} \quad \bar{M}(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$$

在闭区间  $[a, b]$  上是右连续的\*).

证 设  $x_0 \in (a, b]$ , 要证  $m(x)$  在  $x_0$  左连续. 由于  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 故  $m(x)$  恒为有限. 任给  $\epsilon > 0$ , 必存在一点  $\xi_0 \in [a, x_0)$ , 使得  $f(\xi_0) < m(x_0) + \epsilon$ . 于是, 当  $\xi_0 < x < x_0$  时, 必有

$$m(x_0) \leq m(x) \leq f(\xi_0) < m(x_0) + \epsilon,$$

由此可知  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} m(x) = m(x_0)$ . 故  $m(x)$  在  $x_0$  点左连续.

同法可证  $M(x)$  在  $[a, b]$  上也为左连续.



\* )  $\bar{m}(x)$  和  $\bar{M}(x)$  在  $[a, b]$  上右连续的结论是错误的, 今举反例证明之. 例如, 对于有界函数

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq p, \\ 0, & p < x \leq b. \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} -1, & a \leq x \leq p, \\ 0, & p < x \leq b. \end{cases}$$

分别有  $\bar{m}(x) = f_1(x)$ ,  $\bar{M}(x) = f_2(x)$ , 显然它们在点  $p$  不是右连续的.

若定义  $\bar{m}(x) = \inf_{x < \xi \leq b} \{f(\xi)\}$ ,  $\bar{M}(x) = \sup_{x < \xi \leq b} \{f(\xi)\}$  则可证明  $\bar{m}(x)$  与  $\bar{M}(x)$  在  $[a, b]$  上右连续.

**【751】** 证明: 若函数  $f(x)$  在区间  $a \leq x < +\infty$  上连续, 且有有限的  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , 则此函数在已知区间上是有界的.

**证** 记  $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , 取  $\epsilon = 1$ , 则存在  $X > a$ , 使当  $x > X$  时, 恒有  $|f(x)| < |A| + 1$ , 又因  $f(x)$  在  $[a, X]$  上连续, 因而有界, 即存在常数  $M_1$ , 使当  $x \in [a, X]$  时, 恒有  $|f(x)| < M_1$ , 取  $M = \max(|A| + 1, M_1)$ , 则当  $x \in [a, +\infty)$  时, 恒有  $|f(x)| < M$ .

**【752】** 设函数  $f(x)$  在区间  $(x_0, +\infty)$  上连续并有界, 证明: 对于任何数  $T$ , 可求得数列  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

**证** 不妨设  $T > 0$ , 记  $g(y) = f(x_0 + (y+1)T) - f(x_0 + yT)$ ,  $y \geq 1$ . 取一数列  $\{\epsilon_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 且当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\epsilon_n \rightarrow 0$ . 易见,  $g(y)$  是  $[1, +\infty)$  上连续且有界的函数, 今按下法取  $x_1 = x_0 + k_1 T$ , 使  $|g(k_1)| < \epsilon_1$ , 如果  $g(1), g(2)$  异号, 则由连续函数介值定理, 存在  $k_1$ , 且  $1 < k_1 < 2$ , 使得  $|g(k_1)| = 0 < \epsilon_1$ , 这时取  $x_1 = x_0 + k_1 T$ . 若  $g(1)$  与  $g(2)$  同号, 且  $g(1), g(2), g(3), g(4) \dots$  都是同号的, 不妨设它们均大于 0, 那么我们可以证明, 必存在一个正整数  $k_1 \geq 1$ , 使  $g(k_1) < \epsilon_1$ . 因为, 若对一切正整数  $n$ ,  $g(n) \geq \epsilon_1$ , 则由  $g(y)$  的定义,

$$\begin{aligned} f(x_0 + 2T) &\geq \epsilon_1 + f(x_0 + T), \\ f(x_0 + 3T) &\geq \epsilon_1 + f(x_0 + 2T), \\ f(x_0 + 4T) &\geq \epsilon_1 + f(x_0 + 3T), \\ &\vdots \\ f(x_0 + nT) &\geq \epsilon_1 + f(x_0 + (n-1)T). \end{aligned}$$

则  $f(x_0 + nT) \geq (n-1)\epsilon_1 + f(x_0 + T)$ , 这与  $f(x)$  在  $(x_0, +\infty)$  内有界矛盾, 故必存在正整数  $k_1$ , 使得  $|g(k_1)| < \epsilon_1$ , 取  $x_1 = x_0 + k_1 T$ . 然后, 取正整数  $p_2 > k_1 + 1$ , 通过考虑  $g(p_2), g(p_2 + 1), \dots$  的符号; 仿上, 可取  $x_2 = x_0 + k_2 T, k_2 > k_1 + 1$ , 使  $|g(k_2)| < \epsilon_2$ . 依此类推, 我们就可得到一数列  $\{x_n\}$  适合要求.

**【753】** 若  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  为定义于  $-\infty < x < +\infty$  的连续周期函数, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0$ . 证明:  $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ .

**证** 先证明  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  的周期相同, 设  $\varphi(x)$  的周期为  $p$ , 则  $\varphi(x+p) = \varphi(x)$ , 由于当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\varphi(x+p) - \psi(x+p) \rightarrow 0$  即得  $\lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x+p)] = 0$  以及

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\psi(x) - \psi(x+p)] = \lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x+p)] - \lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0. \quad (1)$$

我们再来证明  $\psi(x)$  的周期也是  $p$ , 若不然, 则至少存在一个  $x_0$ , 使  $\psi(x_0) \neq \psi(x_0 + p)$ . 且设  $\psi(x)$  周期为  $q$ ,  $N$  为任意正整数,  $x = x_0 + Nq$ , 以及  $\alpha = |\psi(x_0) - \psi(x_0 + p)| > 0$ , 此时恒有  $|\psi(x) - \psi(x+p)| = \alpha$ . 但由 (1) 式, 对充分大的  $x$ , 必成立  $|\psi(x) - \psi(x+p)| < \alpha$ , 这显然是矛盾的.

最后证明  $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ , 若结论不成立, 则至少存在一个  $x_1$ , 使  $\varphi(x_1) \neq \psi(x_1)$ . 记  $\beta = |\varphi(x_1) - \psi(x_1)| > 0$ , 则对任意  $x = x_1 + Np$ , 恒有  $|\varphi(x) - \psi(x)| = \beta$ , 这与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0$  矛盾. 于是,  $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ . 证毕.

**【754】** 证明: 单调有界函数的一切不连续点皆为第一类不连续点.

**证** 不妨设  $f(x)$  为单调增函数, 取其定义域  $A$  中的任意点  $x_0$ , 且设  $x_0$  不是  $A$  的左端点, 由于  $x < x_0$  时显然有  $f(x) \leq f(x_0)$ . 由关于单调函数的极限定理知  $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \leq f(x_0)$ . 可见若  $f(x)$  在  $x_0$  点不连续, 则函数在该点只可能有突跃, 即第一类不连续点.

**【755】** 证明: 若函数  $f(x)$  具有下列性质: (1) 在闭区间  $[a, b]$  上有定义且单调; (2) 取介于  $f(a)$  和  $f(b)$  之间所有的数作为其函数值, 则此函数在  $[a, b]$  上连续.



**证明思路** 用反证法. 设  $x_0 \in [a, b]$ ,  $f(x_0)$  在点  $x_0$  不连续, 利用 754 题的结果得出矛盾.

**证** 用反证法, 不妨设单调函数  $f(x)$  为递增的且在  $x_0$  不连续 ( $x_0 \in [a, b]$ ), 由 754 题知  $x_0$  只能是第一类不连续点, 则  $f(x_0) - f(x_0 - 0)$  及  $f(x_0 + 0) - f(x_0)$  中至少有一个大于零, 例如  $f(x_0) - f(x_0 - 0) > 0$ . 于是, 由函数  $f(x)$  的单调性知,  $f(x)$  无法取到  $f(x_0 - 0)$  和  $f(x_0)$  之间的数值.

这与题设函数  $f(x)$  的性质(2)矛盾, 从而,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

**【756】** 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x-a}, & x \neq a, \\ 0, & x = a \end{cases}$$

在任意闭区间  $[a, b]$  上取介于  $f(a)$  和  $f(b)$  之间的一切中间值, 但在  $[a, b]$  上并不连续.

**证** 事实上, 只要  $a < b$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上取  $[-1, 1]$  之间的一切值, 当然更取  $f(a) = 0$  与  $f(b)$  ( $|f(b)| \leq 1$ ) 之间的一切值. 但显然有  $f(x)$  在  $x = a$  处不连续.

**【757】** 证明: 若函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内连续, 且  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为此区间中的任意值, 则在它们之间可找到一个数值  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$ .

**证** 不妨设  $a < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n < b$ , 此时设  $x_1 \neq x_n$ ; 当  $x_1 = x_n$  结论显然成立.

由于  $f(x)$  在  $[x_1, x_n]$  上连续, 于是,  $f(x)$  在  $[x_1, x_n]$  上取得最大值和最小值:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [x_1, x_n].$$

从而有

$$m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq M.$$

由连续函数的性质, 总存在  $\xi \in [x_1, x_n]$ , 使  $f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ .

**【758】** 设函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  上连续, 且  $l = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  及  $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} f(x)$ .

证明: 对于任意的数  $\lambda$ , 此处  $l \leq \lambda \leq L$ , 则存在数列  $x_n \rightarrow a+0$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda$ .

**证** 当  $\lambda = l$  或  $\lambda = L$  时结论都是显然的. 因此设  $l < \lambda < L$ .

由条件有  $\{a_n\}$  及  $\{b_n\}$ ,  $a_n \rightarrow a+0$ ,  $b_n \rightarrow a+0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = L$ . 于是, 存在正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时, 恒有  $f(a_n) < \lambda$  及  $f(b_n) > \lambda$ .

再由  $f(x)$  的连续性知, 在  $a_n$  及  $b_n$  之间存在  $x_n$ , 使  $f(x_n) = \lambda$  ( $n > N$ ).

这样选取的  $\{x_n\}$ , 由于  $a_n \rightarrow a+0$ ,  $b_n \rightarrow a+0$ , 故  $x_n \rightarrow a+0$ . 从而,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda$ .

## § 8. 反函数. 用参数形式表示的函数

**1° 反函数的存在及其连续性** 若函数  $y = f(x)$  具有下列性质: (1) 在区间  $(a, b)$  上有定义并连续; (2) 在此区间上是严格单调的, 则存在单值的反函数  $x = f^{-1}(y)$ , 此函数在区间  $(A, B)$  上有定义并连续, 而且是严格单调的, 其中

$$A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad \text{和} \quad B = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

连续函数  $y = f(x)$  的多值反函数的一个单值连续分枝, 可被理解为在其有定义的最大区域上满足方程  $f(g(y)) = y$  的任何一个单值连续函数  $x = g(y)$ .

**2° 以参数形式表示的函数的连续性** 若函数  $\varphi(t)$  和  $\psi(t)$  在区间  $(\alpha, \beta)$  上有定义并且连续, 且函数  $\varphi(t)$  在此区间上是严格单调的, 则方程组

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

在区间  $(a, b)$  上把  $y$  定义成  $x$  的单值连续函数:

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)],$$



其中

$$a = \lim_{t \rightarrow a+0} \varphi(t) \quad \text{及} \quad b = \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t).$$

**【759】** 求分式线性函数  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $ad-bc \neq 0$ ) 的反函数. 在怎样的情形下, 反函数与已知函数相同?

解 由  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  解得, 反函数为  $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$  或写成  $x = \frac{-yd+b}{yc-a}$ . 要反函数与已知函数相同, 只要

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-xd+b}{xc-a}.$$

解之得  $a+d=0$ , 此即所求的条件.

**【760】** 设  $y = x + [x]$ , 求反函数  $x = x(y)$ .

解 若当  $k \leq x < k+1$ , 即当  $2k \leq y < 2k+1$  时,  $[x] = k$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 此时  $y = x+k$ , 即反函数为  $x = y-k$ .

**【761】** 证明: 存在唯一的连续函数  $y = y(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 满足开普勒方程  $y - \epsilon \sin y = x$  ( $0 \leq \epsilon < 1$ ).

证 由 640 题知数列

$$y_0 = x, \quad y_1 = x + \epsilon \sin y_0, \quad y_2 = x + \epsilon \sin y_1, \quad \dots \quad y_n = x + \epsilon \sin y_{n-1}, \quad \dots$$

的极限  $y(x)$  为开普勒方程  $y - \epsilon \sin y = x$  的唯一的根. 现在证明  $y = y(x)$  是连续的. 我们只要证明当  $x \rightarrow x_0$  时,  $y(x) \rightarrow y(x_0)$ . 为此, 我们考虑

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_n(x_0)| &= |(x - x_0) + \epsilon [\sin y_{n-1}(x) - \sin y_{n-1}(x_0)]| \\ &\leq |x - x_0| + \epsilon |y_{n-1}(x) - y_{n-1}(x_0)|. \end{aligned}$$

逐次应用此不等式, 即得

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_n(x_0)| &\leq |x - x_0| (1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots + \epsilon^{n-1} + \epsilon^n) \\ &= |x - x_0| \cdot \frac{1 - \epsilon^{n+1}}{1 - \epsilon} \leq \frac{1}{1 - \epsilon} |x - x_0|. \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 便有  $|y(x) - y(x_0)| \leq \frac{1}{1 - \epsilon} |x - x_0|$  ( $0 \leq \epsilon < 1$ ). 于是, 显然有  $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y(x_0)$ . 这就证明了  $y(x)$  的连续性.

**【762】** 证明: 对于每一个实数  $k$  ( $-\infty < k < +\infty$ ), 方程  $\cot x = kx$  在区间  $0 < x < \pi$  中有唯一连续的根  $x = x(k)$ .

证 令  $f(x) = \frac{\cot x}{x}$ . 显然, 在  $(0, \pi)$  上  $\cot x$  和  $\frac{1}{x}$  都是连续的严格减函数, 从而,  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  上也是连续的严格减函数, 并且, 很明显

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = -\infty.$$

由此可知, 对每一个实数  $k$  ( $-\infty < k < +\infty$ ), 恰有一个  $x \in (0, \pi)$ , 使  $f(x) = k$ , 即  $\cot x = kx$ . 另外, 由于  $f(x) = \frac{\cot x}{x}$  在  $(0, \pi)$  上是连续的严格减函数, 故  $k = f(x)$  的反函数  $x = x(k) = f^{-1}(k)$  存在而且是  $-\infty < k < +\infty$  上的连续的严格减函数. 此  $x = x(k)$  即方程  $\cot x = kx$  的根.

综上所述, 可知: 对任何  $-\infty < k < +\infty$ , 方程  $\cot x = kx$  在  $(0, \pi)$  上具有唯一的根  $x = x(k)$ , 而且  $x(k)$  是  $k$  ( $-\infty < k < +\infty$ ) 的连续的严格减函数, 证毕.

**【763】** 非单调的函数  $y = f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 可否有单值的反函数?

提示 可以. 例如, 函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数,} \\ -x, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$

解 可以. 例如, 函数  $y = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数,} \\ -x, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上为单值的, 但不是单调的函数,

而其反函数仍为此函数本身.

**【764】** 在什么情形下, 函数  $y = f(x)$  和反函数  $x = f^{-1}(y)$  是同一个函数?



解 为统一坐标起见,我们把  $y=f(x)$  的反函数记成为  $y=f^{-1}(x)$ .

按题设应有  $f^{-1}(x)\equiv f(x)$ , 即  $x=f(f(x))$ , 这就是所求的条件.

【765】 证明:不连续函数  $y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$  的反函数是连续函数.

证 易见  $\operatorname{sgn}y=\operatorname{sgn}x$  及  $\operatorname{sgn}^2x=\begin{cases} 1, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ , 则  $y\operatorname{sgn}y=(1+x^2)\operatorname{sgn}^2x$ . 于是,反函数在  $|y|\geq 1$  及  $y=0$  有定义:

$$x=\begin{cases} \sqrt{y\operatorname{sgn}y-1}, & y\geq 1, \\ -\sqrt{y\operatorname{sgn}y-1}, & y\leq -1, \\ 0, & y=0. \end{cases}$$

易见上述函数在其定义域内连续.

【766】 证明:若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a,b]$  上有定义并且是严格单调的,且  $\lim_{n\rightarrow\infty}f(x_n)=f(a)$  ( $a\leq x_n\leq b$ ), 则  $\lim_{n\rightarrow\infty}x_n=a$ .

证 不妨设函数  $f(x)$  在  $[a,b]$  上严格单调下降. 如果结论不成立,则在  $(a,b)$  内总存在一个  $a_1$  及数列  $\{x_n\}$  的一个子列  $\{x_{n_k}\}$ , 使  $x_{n_k}>a_1$ .

由于  $f(x)$  严格单调下降,故有

$$f(x_{n_k})<f(a_1)<f(a).$$

于是,  $f(a)=\lim_{k\rightarrow\infty}f(x_{n_k})\leq f(a_1)$ , 得出矛盾,因此,有  $\lim_{n\rightarrow\infty}x_n=a$ .

求下列函数的反函数的连续单值分支:

【767】  $y=x^2$ .

解 反函数的连续单值分枝为  $x=\sqrt{y}$  ( $0\leq y<+\infty$ ) 及  $x=-\sqrt{y}$  ( $0\leq y<+\infty$ ).

【768】  $y=2x-x^2$ .

解 由于  $x^2-2x+y=0$ , 故  $x=\frac{2\pm\sqrt{4-4y}}{2}=1\pm\sqrt{1-y}$ .

于是,连续单值分枝为  $x=1-\sqrt{1-y}$  及  $x=1+\sqrt{1-y}$  ( $-\infty<y\leq 1$ ).

【769】  $y=\frac{2x}{1+x^2}$ .

解 由于  $x^2y-2x+y=0$ , 故  $x=\begin{cases} \frac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{y}, & y\neq 0, \\ 0, & y=0. \end{cases}$

又由于

$$\lim_{y\rightarrow 0}\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}=\lim_{y\rightarrow 0}\frac{y^2}{y(1+\sqrt{1-y^2})}=0, \quad \lim_{y\rightarrow 0}\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}=\infty,$$

故反函数的连续单值分枝为

$$x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \quad (-1\leq y\leq 1) \quad \text{及} \quad x=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \quad (0<|y|\leq 1).$$

【770】  $y=\sin x$ .

解 连续单值分枝为  $x=(-1)^k\arcsin y+k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) ( $|y|\leq 1$ ).

【771】  $y=\cos x$ .

解 连续单值分枝为  $x=2k\pi\pm\arccos y$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) ( $|y|\leq 1$ ).

【772】  $y=\tan x$ .

解 连续单值分枝为  $x=\arctan y+k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) ( $-\infty<y<+\infty$ ).

【773】 证明:连续函数  $y=1+\sin x$  在区间  $0<x<2\pi$  内的值域是闭区间.



**证** 显然, 当  $x \in (0, 2\pi)$  时,  $-1 \leq \sin x \leq 1$  从而,  $0 \leq 1 + \sin x \leq 2$ . 而由于  $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 2$ ,  $y|_{x=\frac{3\pi}{2}} = 0$ . 而  $y = 1 + \sin x$  是  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  上的连续函数, 故由介值定理知当  $x$  从  $\frac{\pi}{2}$  变到  $\frac{3\pi}{2}$  时,  $y$  取 0 到 2 之间的一切数值. 由此可知当  $0 < x < 2\pi$  时,  $y$  的值域是闭区间  $[0, 2]$ .

**【774】** 证明: 等式  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ .

**证** 令  $\varphi = \arcsin x$ , 则得  $\sin \varphi = x$ , 从而,  $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin \varphi = x$ .

因为  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , 故  $0 \leq \frac{\pi}{2} - \varphi \leq \pi$ ; 而在  $[0, \pi]$  内有唯一的数, 它的余弦等于  $x$ , 因此, 得

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \arccos x,$$

即  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ .

**【775】** 证明: 等式  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$  ( $x \neq 0$ ).

**证** 当  $x > 0$  时, 令  $\varphi = \arctan x$ , 则得  $\tan \varphi = x$ , 且  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ . 又  $\cot(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \tan \varphi = x$ , 故

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{1}{x}.$$

因为  $0 < \frac{\pi}{2} - \varphi < \frac{\pi}{2}$ , 而在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内仅有唯一的数, 使其正切等于  $\frac{1}{x}$ , 故  $\frac{\pi}{2} - \varphi = \arctan \frac{1}{x}$ , 即当  $x > 0$  时,  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ .

当  $x < 0$  时, 令  $\varphi = \arctan x$ , 则得  $\tan \varphi = x$ , 且  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$ . 又

$$\cot(-\frac{\pi}{2} - \varphi) = \tan \varphi = x, \quad \text{即} \quad \tan(-\frac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{1}{x},$$

因为  $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - \varphi < 0$ , 而在  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$  内有唯一的数, 使其正切等于  $\frac{1}{x}$ , 故  $-\frac{\pi}{2} - \varphi = \arctan \frac{1}{x}$ , 即当  $x < 0$  时,  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ .

总之, 当  $x \neq 0$  时,  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$ .

**【776】** 证明反正切加法定理:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon \pi,$$

式中  $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$  为取 0, 1, -1 这三个值的函数.

当给定  $x$  的值时, 对于怎样的  $y$  值, 函数  $\varepsilon$  可能不连续? 在  $Oxy$  平面上作出函数  $\varepsilon$  连续的相应区域, 并求此函数在所得区域内的值.

**证** 由于  $-\frac{\pi}{2} < \arctan y < \frac{\pi}{2}$  及  $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ , 故有  $-\pi < \arctan x + \arctan y < \pi$ .

若  $x$  和  $y$  的符号相反, 则  $-\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y < \frac{\pi}{2}$ .

若  $x > 0$  和  $y > 0$ , 则  $0 < \arctan x + \arctan y < \pi$ .

再看这个和是位于  $(0, \frac{\pi}{2})$  还是  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ . 条件  $0 < \arctan x + \arctan y < \frac{\pi}{2}$ , 即  $\arctan x < \frac{\pi}{2} - \arctan y$ , 它相当于  $x < \tan(\frac{\pi}{2} - \arctan y) = \tan(\operatorname{arccot} y) = \frac{1}{y}$ , 也即  $xy < 1$ .



因此,当  $x>0, y>0, xy<1$  时,此和位于  $(0, \frac{\pi}{2})$ . 同法可证,当  $x>0, y>0, xy>1$  时,此和位于  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

仿此,又可证得:当  $x<0, y<0, xy<1$  时,此和位于  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ ;

当  $x<0, y<0, xy>1$  时,此和位于  $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ .

总之,若  $xy<1$ ,则此和位于  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ;若  $x>0, xy>1$ ,则此和位于  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ;若  $x<0, xy>1$ ,则此和位于  $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ .

其次,我们考虑此和的正切  $\tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{x+y}{1-xy}$ .

现令  $u = \arctan x + \arctan y$ ,  $v = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ , 则得  $\tan u = \tan v$ . 因为

$-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ , 故当  $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$  时,  $u = v$ ; 当  $\frac{\pi}{2} < u < \pi$  时,  $v + \pi$

$= u$ ; 当  $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$  时,  $u = -\pi + v$ . 因此,我们证得

$$\arctan x + \arctan y = \begin{cases} \arctan \frac{x+y}{1-xy}, & xy < 1, \\ \pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy}, & x > 0, xy > 1, \\ -\pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy}, & x < 0, xy > 1. \end{cases}$$

当  $x$  固定时,若  $y = \frac{1}{x}$ , 则  $\epsilon$  不连续,因为此时(例如设  $x > 0$ ),当  $y > \frac{1}{x}$  时  $\epsilon \equiv 1$ ,而当  $y < \frac{1}{x}$  时  $\epsilon \equiv 0$ .

如图 1.313 所示,曲线  $xy=1$  为函数  $\epsilon = \epsilon(x, y)$  的不连续域.

当  $xy < 1$  时,  $\epsilon = 0$ ;

当  $x > 0, xy > 1$  时,  $\epsilon = 1$ ;

当  $x < 0, xy > 1$  时,  $\epsilon = -1$ .

**【777】** 证明反正弦加法定理:

$$\arcsin x + \arcsin y = (-1)^\epsilon \arcsin(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}) + \epsilon\pi \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1),$$

$$\text{式中, } \epsilon = \begin{cases} 0, & xy \leq 0 \text{ 或 } x^2 + y^2 \leq 1, \\ \operatorname{sgn} x, & xy > 0 \text{ 和 } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

证 令  $u = \arcsin x + \arcsin y$  ( $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ ), 即得

$$\sin u = x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}.$$

由此,还不能断定

$$u = \arcsin(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}).$$

事实上,  $u$  及  $v = \arcsin(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2})$  可以位在不同的区间内,其中  $v$  始终位在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  内,而  $u$  可有三种情形:

情形 I:  $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ .

若  $xy \leq 0$ ,则不是  $0 \leq x \leq 1$  及  $-1 \leq y \leq 0$  就是  $-1 \leq x \leq 0$  及  $0 \leq y \leq 1$ ,不论哪一种情况,总有

$$0 \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{及} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq 0 \quad (\text{或交换})$$

因而,  $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arcsin y = u \leq \frac{\pi}{2}$ .

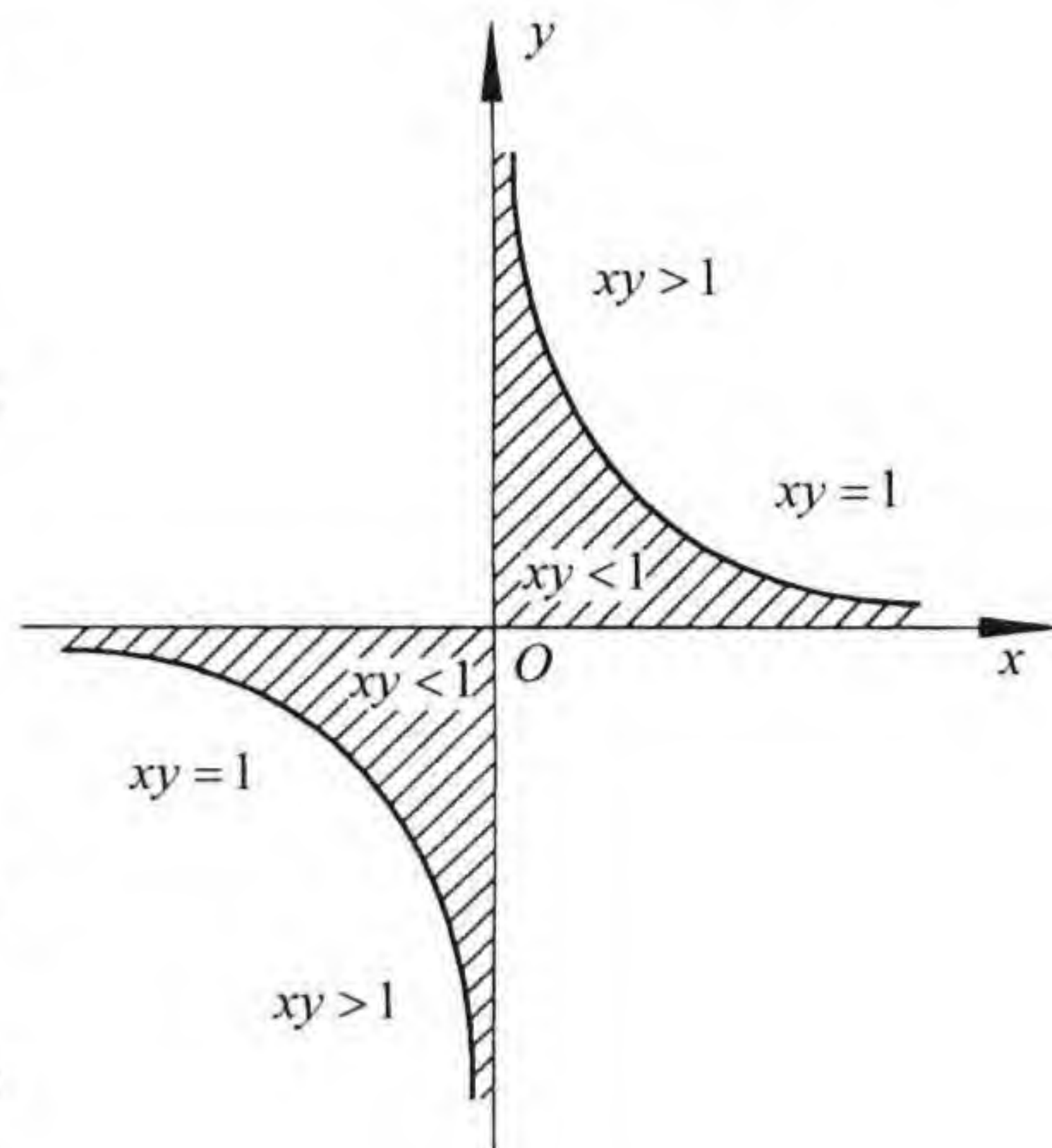


图 1.313



若  $x > 0, y > 0$  时, 显然有  $u \geq 0$ , 条件  $u \leq \frac{\pi}{2}$ , 即  $u = \arcsin x + \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}$ , 相当于

$$\arcsin x \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin y = \arccos y.$$

由于正弦在第一象限内是增函数, 故这又相当于

$$\sin(\arcsin x) \leq \sin(\arccos y),$$

或  $x \leq \sqrt{1-y^2}$ , 即  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

同法可证, 若  $x < 0, y < 0$  时, 必  $u \leq 0$ . 且条件  $-\frac{\pi}{2} \leq u$  相当于  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

情形 II:  $\frac{\pi}{2} < u \leq \pi$ .

在  $\frac{\pi}{2} < u \leq \pi$  时, 必  $x > 0, y > 0$ . 条件

$$\frac{\pi}{2} < \arcsin x + \arcsin y \leq \pi, \quad \text{即} \quad \arcsin x > \frac{\pi}{2} - \arcsin y,$$

两边取正弦, 即得  $x^2 + y^2 > 1$ .

情形 III:  $-\pi \leq u < -\frac{\pi}{2}$ .

在这种情形下必  $x < 0, y < 0$ . 条件

$$-\pi \leq \arcsin x + \arcsin y < -\frac{\pi}{2}, \quad \text{即} \quad \frac{\pi}{2} < \arcsin(-x) + \arcsin(-y) \leq \pi,$$

因此, 即  $x^2 + y^2 > 1$ .

总之, 当  $xy \leq 0$  或  $xy > 0$  但  $x^2 + y^2 \leq 1$  时, 必有  $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ ; 当  $x > 0, y > 0, x^2 + y^2 > 1$  时, 必  $\frac{\pi}{2} < u \leq \pi$ ;

当  $x < 0, y < 0, x^2 + y^2 > 1$  时, 必  $-\pi \leq u < -\frac{\pi}{2}$ .

但当  $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$  时,  $u = v$ ; 当  $\frac{\pi}{2} < u \leq \pi$  时,  $u = \pi - v$ ; 当  $-\pi \leq u < -\frac{\pi}{2}$  时,  $u = -\pi - v$ . 因此, 最后得

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}), & xy \leq 0 \text{ 或 } x^2 + y^2 \leq 1, \\ \pi - \arcsin(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}), & x > 0, y > 0, x^2 + y^2 > 1, \\ -\pi - \arcsin(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}), & x < 0, y < 0, x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

即

$$\arcsin x + \arcsin y = (-1)^\epsilon \arcsin(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}) + \epsilon\pi,$$

$$\text{其中 } \epsilon = \begin{cases} 0, & xy \leq 0 \text{ 或 } x^2 + y^2 \leq 1, \\ \operatorname{sgn} x, & xy > 0 \text{ 和 } x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1)$$

**【778】** 证明反余弦加法定理:

$$\arccos x + \arccos y = (-1)^\epsilon \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}) + 2\epsilon\pi \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1),$$

$$\text{式中, } \epsilon = \begin{cases} 0, & x+y \geq 0, \\ 1, & x+y < 0. \end{cases}$$

证 由基本的不等式

$$0 \leq \arccos x \leq \pi \quad \text{及} \quad 0 \leq \arccos y \leq \pi,$$

有  $0 \leq \arccos x + \arccos y \leq 2\pi$ . 若  $0 \leq \arccos x + \arccos y \leq \pi$ , 则  $\arccos x \leq \pi - \arccos y$ .

由于  $\arccos x$  及  $\pi - \arccos y$  都含在  $[0, \pi]$  内, 而在此区间内余弦是减函数, 故有  $x \geq \cos(\pi - \arccos y) = -y$ , 即  $x+y \geq 0$ .

同法可证得: 若  $\pi < \arccos x + \arccos y \leq 2\pi$ , 则  $x+y < 0$ .

又由于  $\cos(\arccos x + \arccos y) = xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}$ , 故知



$$u = \arccos x + \arccos y \quad \text{及} \quad v = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$$

有同一的余弦. 因  $v$  始终在  $0$  与  $\pi$  之间, 故知:

若  $0 \leq u \leq \pi$ , 则  $u = v$ ; 若  $\pi \leq u \leq 2\pi$ , 则  $u = 2\pi - v$ . 因此, 最后得

$$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), & x+y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), & x+y < 0, \end{cases}$$

此即所要证明的公式.

**【779】** 作函数的图像:

$$(1) y = \arcsin x - \arcsin \sqrt{1-x^2}; \quad (2) y = \arcsin 2x \sqrt{1-x^2} - 2\arcsin x.$$

**解** (1) 利用 777 题的结果得知: 由于  $x^2 + (-\sqrt{1-x^2})^2 = 1$ , 故

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x + \arcsin(-\sqrt{1-x^2}) \\ &= \arcsin(x\sqrt{1-(1-x^2)} - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}) \\ &= \arcsin(x|x| - 1 + x^2). \end{aligned}$$

当  $-1 \leq x \leq 0$  时,  $y = -\frac{\pi}{2}$ ; 当  $0 < x \leq 1$  时,  $y = \arcsin(2x^2 - 1)$ .

可以证明  $\arcsin(2x^2 - 1) - 2\arcsin x = -\frac{\pi}{2}$ , 故有

$$y = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -1 \leq x \leq 0, \\ 2\arcsin x - \frac{\pi}{2}, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

如图 1.314 所示.

(2) 由于

$$2\arcsin x = \arcsin x + \arcsin x = \begin{cases} \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), & |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \pi \operatorname{sgn} x - \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), & |x| > \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

故当  $-1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$  时,  $y = -(\pi + 4\arcsin x)$ ;

当  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  时,  $y = 0$ ; 当  $\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1$  时,  $y = \pi - 4\arcsin x$ .

如图 1.315 所示.

**【780】** 函数  $y = y(x)$  由下面的方程给出:

$$x = \arctan t, \quad y = \operatorname{arccot} t \quad (-\infty < t < +\infty),$$

求此函数. 此函数的定义域是什么?

**解** 由条件  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < y < \pi$  且  $\tan x = t$ ,  $\cot y = t$ , 即得

$$\cot y = \tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

从而, 当  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  时, 有  $y = \frac{\pi}{2} - x$ .

**【781】** 设  $x = \operatorname{ch} t$ ,  $y = \operatorname{sh} t$  ( $-\infty < t < +\infty$ ). 在参量  $t$  的哪些变化域中可以把变量  $y$  看作变量  $x$  的单值函数? 求  $y$  在不同变化域上的表达式.

**解** 由于  $x = \operatorname{ch} t$ ,  $y = \operatorname{sh} t$ , 故  $x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ .

当  $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \geq 0$  时, 即  $e^t \geq e^{-t}$  或  $e^{2t} \geq 1$  或  $t \geq 0$  时,  $y = \sqrt{x^2 - 1}$ ; 当  $t \leq 0$  时,  $y = -\sqrt{x^2 - 1}$ .

不论  $t$  为何值,  $x \geq 1$ , 故  $\sqrt{x^2 - 1}$  有意义.  $t = 0$  是函数  $y = y(x)$  单值区域的分界值.

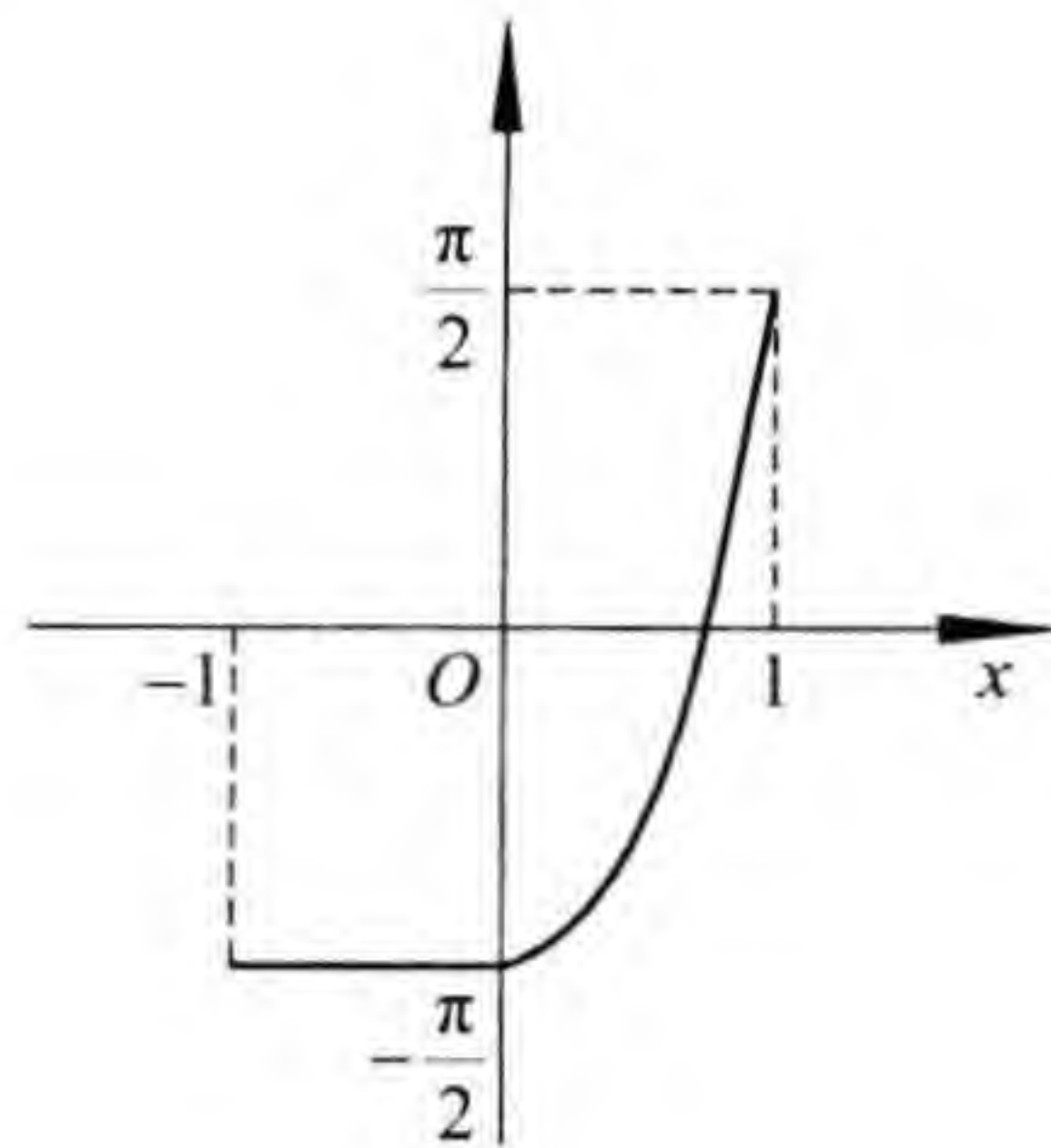


图 1.314

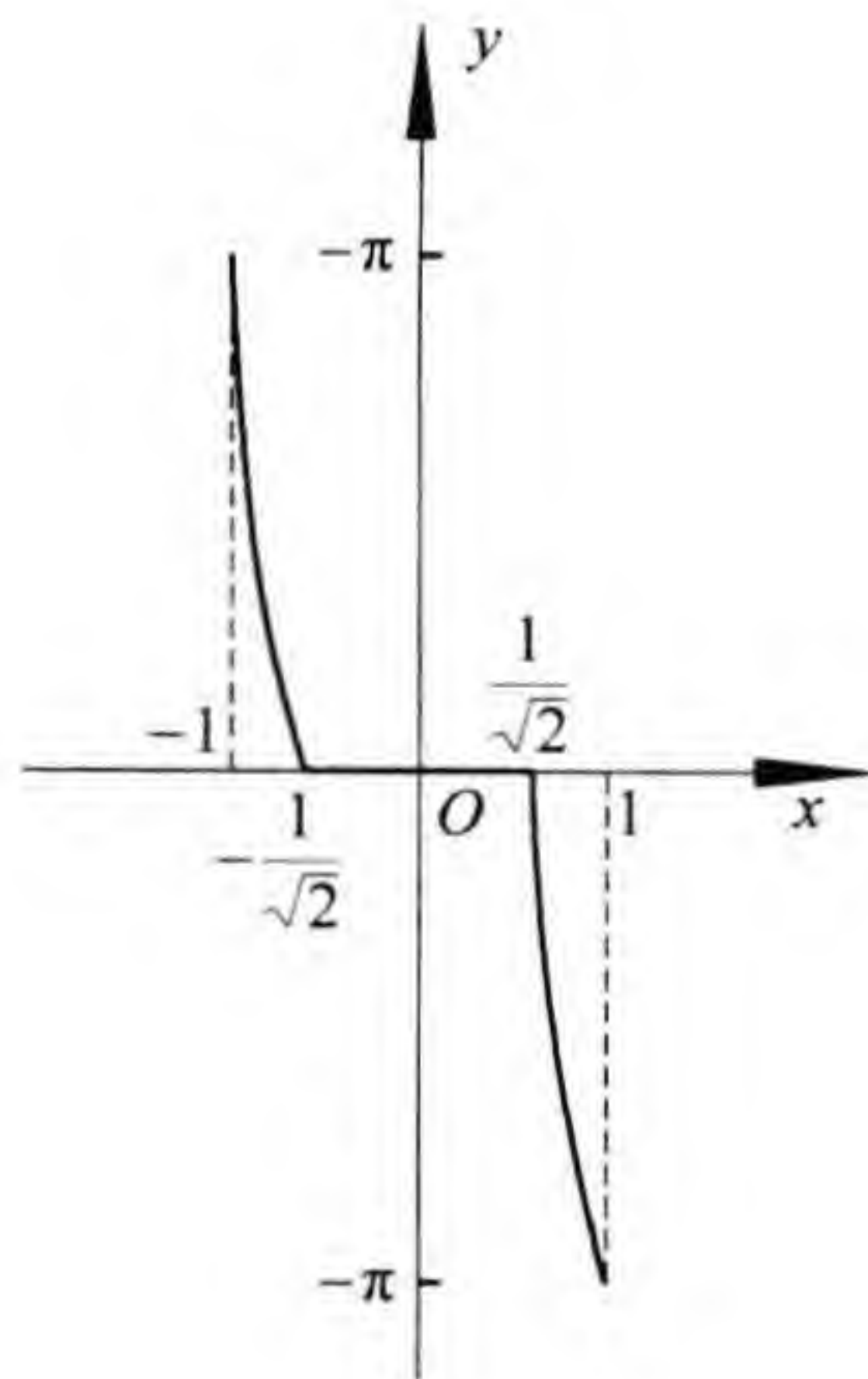


图 1.315



**【782】** 设  $y$  对  $x$  的函数关系由方程组  $x=\varphi(t)$ ,  $y=\psi(t)$  给出, 问  $y=y(x)$  是单值函数的充分必要条件是什么?

**解** 其充分必要条件为, 使  $\varphi(t)=x$  的一切  $t$  值, 函数  $\psi(t)$  应有同一的值. 下面加以证明. 先证必要性. 若不然, 则存在  $x^*$  及  $t_1 \neq t_2$ , 使

$$\varphi(t_1)=\varphi(t_2)=x^* \quad \text{且} \quad \psi(t_1) \neq \psi(t_2).$$

于是, 对于这样的  $x^*$ , 一方面有  $y_1=\psi(t_1)$  及  $y_2=\psi(t_2)$ , 另一方面又有  $y_1 \neq y_2$ , 这样  $y$  就不定义为  $x$  的单值函数. 因此, 使  $\varphi(t)=x$  的一切  $t$  值,  $\psi(t)$  应有同一的值.

再证充分性. 设所述条件满足, 则对于任一  $x^* \in \{\varphi(t)\}$ , 有  $t^*$  使

$$\varphi(t^*)=x^*, \quad \psi(t^*)=y^*$$

有意义, 这样定义的函数  $y=y(x)$  不因  $t^*$  的不同选取而不同, 因此, 它由  $x^*$  唯一确定. 从而,  $y$  定义为  $x$  的单值函数.

**【783】** 在怎样的条件下, 两个方程组

$$x=\varphi(t), y=\psi(t) \quad (a < t < b) \quad \text{及} \quad x=\varphi[\chi(\tau)], y=\psi[\chi(\tau)] \quad (\alpha < \tau < \beta)$$

定义出同一的函数  $y=y(x)$ ?

**解** 当  $\alpha < \tau < \beta$  时, 函数  $\chi(\tau)$  的值域应为区间  $(a, b)$ .

**【784】** 设函数  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  在区间  $(a, b)$  内有定义并且连续, 且

$$A = \inf_{a < x < b} \varphi(x), \quad B = \sup_{a < x < b} \varphi(x).$$

在何种情况下, 存在单值函数  $f(x)$ , 它在区间  $(A, B)$  上有定义, 并且当  $a < x < b$  时,  $\psi(x) = f[\varphi(x)]$ ?

**解** 显然, 要求对于使  $\varphi(x)=u$  的一切  $x$  值 (其中  $u$  为区间  $(A, B)$  中的任一给定的数), 函数  $\psi(x)$  应取同一的值. 满足了这个条件就可以了. 这时, 对  $u \in (A, B)$  可定义

$$f(u) = \psi(x),$$

其中  $x$  为满足  $\varphi(x)=u$  ( $a < x < b$ ) 的任何数. 上述条件保证了这样定义的  $f(u)$  是单值的.

## § 9. 函数的一致连续性

1° **一致连续性的定义** 设函数  $f(x)$  定义在集合  $X=\{x\}$  上 ( $X$  是开区间、闭区间, 等等), 若对于每一个  $\epsilon > 0$  都存在  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , 使得对于任何数值  $x', x'' \in X$ , 由不等式

$$|x' - x''| < \delta$$

可得不等式

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon,$$

则称函数  $f(x)$  在  $X$  上为一致连续的.

2° **康托尔定理** 在有限的闭区间  $[a, b]$  上有定义的连续函数  $f(x)$  在此区间上一致连续.

**【785】** 某工厂的车间制造正方形平板, 其边长  $x$  在 1cm 到 10cm 之间取值. 当边长的允许误差  $\delta$  为何值时, 不论制造多大的平板 (边长在上述范围内), 其面积  $y$  与设计值之差皆小于  $\epsilon$ ? 考虑下列情形:

(1)  $\epsilon = 1\text{cm}^2$ ; (2)  $\epsilon = 0.01\text{cm}^2$ ; (3)  $\epsilon = 0.0001\text{cm}^2$ .

**解**  $y = x^2$ , 由于

$$|x'^2 - x''^2| = |x' - x''| |x' + x''| \leq 20 |x' - x''|,$$

于是, 对于任给的  $\epsilon > 0$ , 要  $|x'^2 - x''^2| < \epsilon$  时, 只要  $|x' - x''| < \frac{\epsilon}{20}$  即可.

于是, 在加工平板边长时, 只要取允许误差  $\delta \leq \frac{\epsilon}{20}$ , 当  $|x' - x''| < \delta$  时, 即可满足要求.

(1) 当  $\epsilon = 1\text{cm}^2$  时,  $\delta \leq \frac{1}{20} = 0.05\text{cm} = 0.5\text{mm}$ ;

(2) 当  $\epsilon = 0.01\text{cm}^2$  时,  $\delta \leq \frac{0.01}{20} = 0.0005\text{cm} = 0.005\text{mm}$ ;



(3) 当  $\epsilon = 0.0001 \text{ cm}^2$  时,  $\delta \leq \frac{0.0001}{20} = 0.000005 \text{ cm} = 0.00005 \text{ mm}$ .

**【786】<sup>+</sup>** 圆柱形套筒的宽为  $\epsilon$ , 长为  $\delta$ , 将套筒套在曲线  $y = \sqrt[3]{x}$  上并使它沿此曲线滑动, 但套筒的轴须保持平行于  $Ox$  轴.  $\delta$  应取何值, 才可以使此筒顺利地经过此曲线上由不等式  $-10 \leq x \leq 10$  所限定的部分? 考虑下列情形: (1)  $\epsilon = 1$ ; (2)  $\epsilon = 0.1$ ; (3)  $\epsilon = 0.001$ ; (4)  $\epsilon$  为任意小数.

解  $y = \sqrt[3]{x}$ . 对于  $y' \neq y''$ , 由于

$$|y' - y''| = \left| \frac{y'^3 - y''^3}{y'^2 + y'y'' + y''^2} \right| = \left| \frac{y'^3 - y''^3}{\frac{3}{4}(y' + y'')^2 + \frac{1}{4}(y' - y'')^2} \right| \leq \frac{|y'^3 - y''^3|}{\frac{1}{4}|y' - y''|^2}$$

即

$$\frac{1}{4}|y' - y''|^3 \leq |y'^3 - y''^3| = |x' - x''| \quad \text{或} \quad |y' - y''| \leq \sqrt[3]{4|x' - x''|}.$$

对于任给的  $\epsilon > 0$ , 要  $|y' - y''| < \epsilon$ , 只要  $4|x' - x''| < \epsilon^3$ , 或  $|x' - x''| < \frac{\epsilon^3}{4}$  即可.

取  $0 < \delta < \frac{\epsilon^3}{4}$ , 则当  $|x' - x''| < \delta$  时, 恒有  $|\sqrt[3]{x'} - \sqrt[3]{x''}| < \epsilon$ .

(1) 当  $\epsilon = 1$  时,  $\delta < \frac{1}{4}$ ;

(2) 当  $\epsilon = 0.1$  时,  $\delta < 2.5 \times 10^{-4}$ ;

(3) 当  $\epsilon = 0.001$  时,  $\delta < 2.5 \times 10^{-10}$ ;

(4) 当  $\epsilon$  为任意小数时,  $\delta < \frac{\epsilon^3}{4}$  ( $\epsilon \leq 1$ ).

**【787】** 以《 $\epsilon - \delta$ 》的语言用肯定的方式表达下述论断意义: 函数  $f(x)$  在某集合 (开区间, 闭区间, 等等) 上连续, 但在此集合上并不一致连续.

解 设集合为  $E$ . 所需论断的《 $\epsilon - \delta$ 》说明如下: 对于任给的  $\epsilon > 0$ , 及  $x_0 \in E$ , 总存在一个数  $\delta(\epsilon, x_0) > 0$ , 使当  $|x - x_0| < \delta(\epsilon, x_0)$  时, 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

同时, 至少存在一个  $\epsilon_0 > 0$ , 使对于任意给定的  $\delta > 0$ , 都可找到  $x_1, x_2 \in E$ , 满足  $|x_1 - x_2| < \delta$ , 但是

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \epsilon_0.$$

**【788】** 证明: 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在区间  $(0, 1)$  上是连续的, 但在此区间上并非一致连续的.

证明思路 连续性是显然的. 考虑  $(0, 1)$  上的两串点  $x_n = \frac{1}{n}$ ,  $x'_n = \frac{1}{n+1}$ , 则当  $0 < \epsilon_0 < 1$  时, 不论  $\delta > 0$  如何选取, 只要  $n$  充分大, 总可以使  $|x_n - x'_n| < \delta$ , 但是,  $|f(x_n) - f(x'_n)| = 1 > \epsilon_0$ .

证 连续性是显然的, 现证其不一致连续. 考虑  $(0, 1)$  上的两串点

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x'_n = \frac{1}{n+1}.$$

则当  $0 < \epsilon_0 < 1$  时, 不论  $\delta > 0$  取得多小, 只要  $n$  取得充分大, 总可以使

$$|x_n - x'_n| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = 1 > \epsilon_0.$$

因而,  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  上并非一致连续.

**【789】** 证明: 函数  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$  在区间  $(0, 1)$  上是连续的并且有界, 但在此区间上并非一致连续的.

证 当  $x \neq 0$  时, 由基本初等函数在其定义域的连续性可知,  $f(x)$  是连续的, 同时, 由于  $|f(x)| \leq 1$ , 因



而它也是有界的.

现考虑 $(0,1)$ 上的两串点  $x_n = \frac{2}{n}, x'_n = \frac{2}{n+1}$ , 则当  $0 < \epsilon_0 < 1$  时, 不论  $\delta > 0$  取得多小, 只要  $n$  充分大, 总可以使

$$|x_n - x'_n| = \frac{2}{n(n+1)} < \delta,$$

但是

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = 1 > \epsilon_0.$$

因而,  $f(x)$  在  $(0,1)$  上并非一致连续.

**【790】** 证明: 函数  $f(x) = \sin x^2$  在无穷区间  $-\infty < x < +\infty$  上是连续的并且有界, 但在此区间上并非一致连续的.

**证明思路** 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上显然有界且连续. 只需证其不一致连续性. 为此, 考虑  $(-\infty, +\infty)$  上的两串点

$$x_n = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}, \quad x'_n = \sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}},$$

下面仿 788 题.

**证** 函数  $f(x)$  的连续性及其有界性是显然的. 现证其不一致连续性.

考虑  $(-\infty, +\infty)$  上的两串点

$$x_n = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}, \quad x'_n = \sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}.$$

则当  $0 < \epsilon_0 < 1$  时, 不论  $\delta > 0$  如何选取, 只要  $n$  充分大, 总可以使

$$|x_n - x'_n| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}} + \sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = 1 > \epsilon_0.$$

因而,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上并非一致连续.

**【791】** 证明: 若函数  $f(x)$  在区域  $a \leq x < +\infty$  上有定义并且连续, 而且有限的  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 则  $f(x)$  在此区域上是一致连续的.

**证** 任给  $\epsilon > 0$ . 由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 故必存在  $X > a$ , 使当  $x' > X, x'' > X$  时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

由于  $f(x)$  在  $[a, X+1]$  上连续, 故一致连续, 从而, 必有正数  $\delta'$  存在, 使当  $x' \in [a, X+1], x'' \in [a, X+1], |x' - x''| < \delta'$  时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

令  $\delta = \min\{\delta', 1\}$ . 现设  $x', x''$  为满足  $a \leq x' < +\infty, a \leq x'' < +\infty, |x' - x''| < \delta$  的任何两点. 由于  $|x' - x''| < \delta$ , 故  $x'$  与  $x''$  或同时属于  $[a, X+1]$ , 或同时满足  $x' > X, x'' > X$ , 因此, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon,$$

故  $f(x)$  在  $a \leq x < +\infty$  上一致连续. 证毕.

**【792】** 证明: 无界函数  $f(x) = x + \sin x$  于全轴  $-\infty < x < +\infty$  上一致连续.

**提示**  $|f(x') - f(x'')| \leq 2|x' - x''| \quad (x', x'' \in \mathbb{R}).$

**证**  $|f(x') - f(x'')| = |(x' - x'') + (\sin x' - \sin x'')| \leq |x' - x''| + |\sin x' - \sin x''| \leq 2|x' - x''|.$

对于任给的  $\epsilon > 0$ , 取  $\delta = \frac{\epsilon}{2} > 0$ , 则当  $-\infty < x' < +\infty, -\infty < x'' < +\infty, |x' - x''| < \delta$  时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon,$$



故  $f(x)$  在  $-\infty < x < +\infty$  上一致连续.

**【793】** 函数  $f(x) = x^2$  在下列区间中是否为一致连续的: (1)  $(-l, l)$ , 这里  $l$  为任意大的正数; (2) 在区间  $(-\infty, +\infty)$  上?

**解题思路** (1)  $|f(x') - f(x'')| \leq 2l|x' - x''|$  ( $x', x'' \in (-l, l)$ ).

(2) 考虑  $x'_n = n + \frac{1}{n}$ ,  $x''_n = n$ . 下面仿 788 题.

**解** (1) 当  $x_1, x_2 \in (-l, l)$  时,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2l|x_1 - x_2|.$$

对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \frac{\varepsilon}{2l}$ , 则当  $|x_1 - x_2| < \delta$ , 且  $x_1, x_2 \in (-l, l)$  时, 恒有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ , 故  $f(x)$  在  $(-l, l)$  上一致连续.

(2) 取  $\varepsilon_0 = 1$ , 不论  $\delta > 0$  取得多小, 只要  $n$  充分大, 我们总可以使  $x'_n = n + \frac{1}{n}$ ,  $x''_n = n$  的距离

$$|x'_n - x''_n| = \frac{1}{n} < \delta, \text{ 但是,}$$

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = 2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 > \varepsilon_0.$$

可见  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上非一致连续.

**研究下列函数在给定区域上的一致连续性:**

**【794】**  $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ).

$$\text{解 } |f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{x_1}{4-x_1^2} - \frac{x_2}{4-x_2^2} \right| = \left| \frac{4+x_1x_2}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)} \right| |x_1 - x_2|.$$

由于  $\left| \frac{4+x_1x_2}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)} \right| < \frac{4+1}{3 \cdot 3} = \frac{5}{9} < 1$ , 故对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon$ , 则对满足  $|x_1 - x_2| < \delta$  的  $x_1, x_2$  ( $x_1, x_2$  属于  $[-1, 1]$ ) 值, 均有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

因此,  $f(x)$  在区间  $[-1, 1]$  上一致连续.

**【795】**  $f(x) = \ln x$  ( $0 < x < 1$ ).

**解** 考虑  $x_n = \frac{1}{n}$ ,  $x'_n = \frac{1}{2n}$ , 则当  $0 < \varepsilon_0 < \ln 2$  时, 不论  $\delta$  如何选取, 只要  $n$  充分大, 我们总可以使

$$|x_n - x'_n| = \frac{1}{2n} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = \ln 2 > \varepsilon_0.$$

因此,  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  内非一致连续.

**【796】**  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  ( $0 < x < \pi$ ).

**解** 由于  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 我们定义函数

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x=0, \\ \frac{\sin x}{x}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x=\pi. \end{cases}$$

易见  $F(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续, 由康托尔定理知,  $F(x)$  在  $[0, \pi]$  上一致连续. 从而,  $f(x)$  也在  $(0, \pi)$  上一致连续.

**【797】**  $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}$  ( $0 < x < 1$ ).



解 取  $\varepsilon_0=1$ , 令  $x_n=\frac{2}{(2n+1)\pi}$ ,  $x'_n=\frac{1}{n\pi}$  ( $n$  为正整数), 显然  $x_n, x'_n$  均属于  $(0,1)$ . 不论  $\delta>0$  取得多么小, 只要  $n$  充分大, 总有

$$|x_n - x'_n| = \frac{1}{(2n+1)n\pi} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = e^{\frac{1}{n\pi}} > 1 = \varepsilon_0.$$

因此,  $f(x)=e^x \cos \frac{1}{x}$  在  $(0,1)$  上非一致连续.

**【798】**  $f(x)=\arctan x$  ( $-\infty < x < +\infty$ ).

解 由于  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 1]$ ,  $[0, +\infty)$  上连续, 且有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$$

由 791 题知  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  及  $(-\infty, 1]$  上均一致连续.

于是, 对于任给的  $\varepsilon>0$ , 存在  $\delta_1(\varepsilon)>0$ , 当  $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ ,  $|x_1 - x_2| < \delta_1(\varepsilon)$  时, 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

成立.

又存在  $\delta_2(\varepsilon)>0$ , 当  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ,  $|x_1 - x_2| < \delta_2(\varepsilon)$  时, 恒有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$  成立.

今取  $\delta(\varepsilon) = \min\{1, \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ , 则当  $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ ,  $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$  时,  $x_1$  与  $x_2$  必或同时属于  $(-\infty, 1]$ , 或同时属于  $[0, +\infty)$ , 故恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

即  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致连续.

**【799】**  $f(x)=\sqrt{x}$  ( $1 \leq x < +\infty$ ).

解 考虑  $[1, +\infty)$  内任意两点  $x_1, x_2$ .

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \left| \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{2}.$$

于是, 对于任给的  $\varepsilon>0$ , 取  $\delta=2\varepsilon$ , 则当  $|x_1 - x_2| < \delta$ ,  $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$  时, 恒有

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \frac{1}{2} \cdot 2\varepsilon = \varepsilon.$$

因此,  $f(x)=\sqrt{x}$  在区间  $[1, +\infty)$  上一致连续.

**【800】**  $f(x)=x \sin x$  ( $0 \leq x < +\infty$ ).

解 考虑点  $x_n=2n\pi + \frac{1}{n}$ ,  $x'_n=2n\pi$ , 则  $|x_n - x'_n| = \frac{1}{n}$ . 而

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = \left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{1}{n} = 2n\pi \sin \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} = 0, \quad \text{及} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2n\pi \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\pi \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = 2\pi,$$

所以,  $|f(x_n) - f(x'_n)| \rightarrow 2\pi$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

现取  $\varepsilon_0=2\pi-1$ , 于是, 不论  $\delta>0$  取得多么小, 只要  $n$  充分大, 总有  $|x_n - x'_n| < \delta$ , 并且

$$|f(x_n) - f(x'_n)| > \varepsilon_0 = 2\pi - 1.$$

因此,  $f(x)=x \sin x$  在区间  $[0, +\infty)$  上非一致连续.

**【801】** 证明: 函数  $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$  在每个区间  $J_1=(-1 < x < 0)$  及  $J_2=(0 < x < 1)$  上是一致连续的,



但在它们的和  $J_1 + J_2 = \{0 < |x| < 1\}$  上并非一致连续的.

证 在  $J_1 = (-1 < x < 0)$  上  $f(x) = -\frac{\sin x}{x}$ , 在  $J_2 = (0 < x < 1)$  上  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ , 它们的一致连续性由 796 题可知.

由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = -1,$$

故必存在  $\eta > 0$  ( $\eta < 1$ ), 使当  $0 < x_1 < \eta$ ,  $-\eta < x_2 < 0$  时恒有  $|f(x_1) - f(x_2)| > 1$ . 现取  $\epsilon_0 = 1$ , 则不论  $\delta > 0$  取得多么小, 都可取两点  $x'_1$  和  $x'_2$ , 使  $0 < x'_1 < \min\left\{\eta, \frac{\delta}{2}\right\}$ ,  $-\min\left\{\eta, \frac{\delta}{2}\right\} < x'_2 < 0$ . 于是,  $|x'_1 - x'_2| < \delta$ , 但是,

$$|f(x'_1) - f(x'_2)| > \epsilon_0 = 1.$$

由此可知  $f(x)$  在  $J_1 + J_2 = \{0 < |x| < 1\}$  上非一致连续.

【802】 对于  $\epsilon > 0$ , 求使下列函数  $f(x)$  在所给区间上满足一致连续条件的  $\delta = \delta(\epsilon)$  (任意的!):

(1)  $f(x) = 5x - 3 \quad (-\infty < x < +\infty);$

(2)  $f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad (-2 \leq x \leq 5);$

(3)  $f(x) = \frac{1}{x} \quad (0.1 \leq x \leq 1);$

(4)  $f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x < +\infty);$

(5)  $f(x) = 2\sin x - \cos x \quad (-\infty < x < +\infty);$

(6)  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq \pi).$

解 (1)  $|f(x_1) - f(x_2)| = 5|x_1 - x_2|$ . 只需取  $\delta = \frac{\epsilon}{5}$  即行.

(2)  $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2 - 2|$ . 由于  $-2 \leq x \leq 5$ , 故  $|x_1 + x_2 - 2| \leq 8$ , 于是只需取  $\delta = \frac{\epsilon}{8}$  即行.

(3)  $|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} \leq \frac{|x_1 - x_2|}{0.01}$ . 只需取  $\delta = 0.01\epsilon$ .

(4) 对于  $a \geq 0, b \geq 0$ , 显然有不等式  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$  成立.

对于任给的  $\epsilon > 0$ , 取  $\delta = \epsilon^2$ , 则当  $|x_1 - x_2| < \delta, x_1, x_2 \in [0, +\infty)$  时,

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2 + \delta} \leq \sqrt{x_2} + \sqrt{\delta} = \sqrt{x_2} + \epsilon.$$

同理可有

$$\sqrt{x_2} < \sqrt{x_1 + \delta} \leq \sqrt{x_1} + \sqrt{\delta} = \sqrt{x_1} + \epsilon.$$

则恒有  $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \epsilon$ .

$$\begin{aligned} (5) \quad |f(x_1) - f(x_2)| &\leq 2|\sin x_1 - \sin x_2| + |\cos x_1 - \cos x_2| \\ &\leq 2|x_1 - x_2| + \left| \left( \frac{\pi}{2} - x_1 \right) - \left( \frac{\pi}{2} - x_2 \right) \right| = 3|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

只需取  $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ .

(6) 任给  $\epsilon > 0$ , 当  $x_1, x_2 \in \left[ \frac{\epsilon}{3}, \pi \right]$  时, 有

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| = \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_1 \sin \frac{1}{x_2} + x_1 \sin \frac{1}{x_2} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \\ &\leq |x_1| \cdot \left| \sin \frac{1}{x_1} - \sin \frac{1}{x_2} \right| + |x_1 - x_2| \cdot \left| \sin \frac{1}{x_2} \right| \leq |x_1| \cdot \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| + |x_1 - x_2| \\ &= \left( \frac{1}{x_2} + 1 \right) \cdot |x_1 - x_2| \leq \frac{3 + \epsilon}{\epsilon} |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

取  $\delta = \min \left\{ \frac{\epsilon}{3}, \frac{\epsilon^2}{3 + \epsilon} \right\}$ . 现设  $x_1, x_2 \in [0, \pi]$  满足  $|x_1 - x_2| < \delta$ , 下证必有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ .



不妨设  $x_1 < x_2$ , 若  $x_1 \geq \frac{\epsilon}{3}$ , 则  $x_1, x_2$  均属于  $[\frac{\epsilon}{3}, \pi]$ , 故由上述, 知

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{3+\epsilon}{\epsilon} \cdot |x_1 - x_2| < \frac{3+\epsilon}{\epsilon} \cdot \frac{\epsilon^2}{3+\epsilon} = \epsilon.$$

若  $0 \leq x_1 < \frac{\epsilon}{3}$ , 则  $x_2 = x_2 - x_1 + x_1 < \delta + \frac{\epsilon}{3} \leq \frac{2\epsilon}{3}$ . 于是,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \leq |x_1| + |x_2| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon \quad (\text{当 } x_1 > 0 \text{ 时}),$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| 0 - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \leq |x_2| < \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon \quad (\text{当 } x_1 = 0 \text{ 时}),$$

综上所述, 只要  $x_1, x_2 \in [0, \pi]$ ,  $|x_1 - x_2| < \delta$ , 就有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ .

**【803】** 将闭区间  $[1, 10]$  等分为多少段, 就足以让函数  $f(x) = x^2$  在每一段上的振幅小于 0.0001?

解 设等分为  $n$  段, 则对于每段中的任意两点均有  $|x_1 - x_2| \leq \frac{9}{n}$ . 于是,

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2| |x_1 - x_2| \leq \frac{(10+10)9}{n} = \frac{180}{n}.$$

按题设, 我们只需  $\frac{180}{n} < 0.0001$ , 也即  $n > 1800000$ .

因此, 应把  $[1, 10]$  等分成至少为 1800000 个等长的线段, 就能满足要求.

**【804】** 证明: 有限个在区间  $(a, b)$  上一致连续函数的和与它们的乘积在此区间上仍是一致连续的.

证 由于有限个函数相加或相乘可逐次分解成两个函数相加或相乘, 故我们只需考虑两个函数的情况.

设  $f(x)$  与  $g(x)$  都在有限区间  $(a, b)$  上一致连续, 要证  $f(x) + g(x)$  与  $f(x)g(x)$  也在  $(a, b)$  上一致连续. 任给  $\epsilon > 0$ . 由于  $f(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续, 故有  $\delta_1 > 0$  存在, 使对于  $(a, b)$  中任何两点  $x'$  与  $x''$ , 只要  $|x' - x''| < \delta_1$ , 就有  $|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2}$ . 又由于  $g(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续, 故又有  $\delta_2 > 0$  存在, 使对于  $(a, b)$  中任何两点  $x'$  与  $x''$ , 只要  $|x' - x''| < \delta_2$ , 就有  $|g(x') - g(x'')| < \frac{\epsilon}{2}$ . 令  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则当  $|x' - x''| < \delta$  ( $x', x''$  为  $(a, b)$  中任何两点) 时, 恒有

$$|[f(x') + g(x')] - [f(x'') + g(x'')]| \leq |f(x') - f(x'')| + |g(x') - g(x'')| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

故  $f(x) + g(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续. 下证  $f(x)g(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续. 为此先证一个结论: 若函数  $F(x)$  在有限区间  $(a, b)$  上一致连续, 则  $F(x)$  在  $(a, b)$  上必有界. 事实上, 对于任意给定的  $\epsilon > 0$ , 都有  $\delta > 0$  存在, 使对于  $(a, b)$  中任何两点  $x', x''$ , 只要  $|x' - x''| < \delta$ , 就有  $|F(x') - F(x'')| < \epsilon$ . 特别, 当  $a < x' < a + \delta$ ,  $a < x'' < a + \delta$  时, 必有  $|F(x') - F(x'')| < \epsilon$ ; 当  $b - \delta < x' < b$ ,  $b - \delta < x'' < b$  时, 也必有  $|F(x') - F(x'')| < \epsilon$ . 因此, 根据柯西收敛准则, 知  $F(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} F(x)$  与  $F(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$  都存在 (有限). 现在  $[a, b]$  上定义函数  $F^*(x)$ :

$$F^*(x) = \begin{cases} F(x), & a < x < b, \\ F(a+0), & x = a, \\ F(b-0), & x = b. \end{cases}$$

显然,  $F^*(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 从而有界, 由此可知  $F(x)$  在  $(a, b)$  上有界.

根据刚才已证的结论, 存在常数  $L > 0$  与  $M > 0$ , 使

$$|f(x)| \leq L, \quad |g(x)| \leq M \quad (a < x < b).$$

任给  $\epsilon > 0$ , 根据  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $(a, b)$  上的一致连续性, 可取  $\delta > 0$ , 使对于  $(a, b)$  中任何两点  $x'$  与  $x''$ , 只要  $|x' - x''| < \delta$ , 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2M}, \quad |g(x') - g(x'')| < \frac{\epsilon}{2L}.$$



由此可知

$$|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| = |[f(x') - f(x'')]g(x') + f(x'')[g(x') - g(x'')]| < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L = \varepsilon.$$

故得知  $f(x)g(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续.

注: 当  $(a, b)$  是无穷区间时,  $(a, b)$  上一致连续函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的和  $f(x) + g(x)$  必也一致连续, 但乘积  $f(x)g(x)$  不一定一致连续. 例如, 设  $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ , 函数  $f(x) = x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致连续, 而函数  $[f(x)]^2 = x^2$  在  $(-\infty, +\infty)$  上非一致连续(参看 793 题(2)).

**【805】** 证明: 若单调有界的函数  $f(x)$  在有限或无穷的区间  $(a, b)$  上是连续的, 则此函数在区间  $(a, b)$  上是一致连续的.

证 分三种情形予以证明.

(1) 设  $(a, b)$  是有限区间. 由于  $f(x)$  在  $(a, b)$  上单调有界, 故极限  $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  与  $f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$  都存在(有限). 按下式定义  $[a, b]$  上的函数  $f^*(x)$ :

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & a < x < b, \\ f(a+0), & x = a, \\ f(b-0), & x = b. \end{cases}$$

显然  $f^*(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 从而一致连续, 当然在  $(a, b)$  上也一致连续, 故  $f(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续.

(2)  $a$  为有限数,  $b = +\infty$ , 此时, 令

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & a < x < +\infty, \\ f(a+0), & x = a. \end{cases}$$

则  $f^*(x)$  在  $a \leq x < +\infty$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^*(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在(有限), 故根据 791 题的结果知  $f^*(x)$  在  $a \leq x < +\infty$  一致连续, 从而,  $f(x)$  在  $a < x < +\infty$  一致连续.

若  $a = -\infty$ ,  $b$  为有限数. 考虑函数  $g(x) = f(-x)$  ( $-b < x < +\infty$ ), 即化成刚才证明了的左端点是有限数右端点是  $+\infty$  的情形.

(3)  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$ . 任给  $\varepsilon > 0$ . 利用(2)已证的结果,  $f(x)$  在  $0 < x < +\infty$  上一致连续, 故存在  $\delta_1 > 0$ , 使当  $x'$  与  $x''$  都属于  $(0, +\infty)$  且  $|x' - x''| < \delta_1$  时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

同样利用(2)已证的结果,  $f(x)$  在  $-\infty < x < 1$  上一致连续, 故对于同一个  $\varepsilon$ , 存在  $\delta_2 > 0$ , 使当  $x'$  与  $x''$  都属于  $(-\infty, 1)$  且  $|x' - x''| < \delta_2$  时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

现令  $\delta = \min\{1, \delta_1, \delta_2\}$ , 则当  $-\infty < x' < +\infty$ ,  $-\infty < x'' < +\infty$ ,  $|x' - x''| < \delta$  时,  $x'$  与  $x''$  必或是同属于区间  $(0, +\infty)$ , 或是同属于区间  $(-\infty, 1)$ . 因此, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

由此可知,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致连续. 证毕.

**【806】** 证明: 在有限区间  $(a, b)$  上有定义而且是连续的函数  $f(x)$ , 可用连续的方法延拓到闭区间  $[a, b]$  上, 其充分必要条件是函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  上是一致连续的.

证 必要性: 若  $f(x)$  可用连续的方法延拓到闭区间  $[a, b]$  上, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 从而  $f(x)$  在  $[a, b]$  上一致连续, 当然  $f(x)$  在  $(a, b)$  上也一致连续.

充分性: 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续. 根据 804 题的证明过程, 知  $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  与  $f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$  都存在(有限). 按下式定义  $[a, b]$  上的函数:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & a < x < b, \\ f(a+0), & x = a, \\ f(b-0), & x = b. \end{cases}$$

显然,  $f^*(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上  $f^*(x) \equiv f(x)$ .



故  $f^*(x)$  是在  $[a, b]$  上的连续延拓. 证毕.

**【807】 函数**

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|$$

(式中  $x_1$  和  $x_2$  为  $(a, b)$  中受条件  $|x_1 - x_2| \leq \delta$  限制的任意两点) 称为函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  上的连续模.

证明: 函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  上是一致连续的充分必要条件是  $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_f(\delta) = 0$ .

证 必要性: 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续. 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta' > 0$ , 使  $(a, b)$  中任何两点  $x_1, x_2$ , 只要  $|x_1 - x_2| < \delta'$  就有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 现设  $0 < \delta < \delta'$ , 则当  $|x_1 - x_2| \leq \delta$  时, 必有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , 从而,

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

由此可知,  $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_f(\delta) = 0$ .

充分性: 设  $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_f(\delta) = 0$ . 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta' > 0$ , 使当  $0 < \delta < \delta'$  时, 恒有  $\omega_f(\delta) < \varepsilon$ .

现设  $x_1$  与  $x_2$  是  $(a, b)$  中满足  $|x_1 - x_2| < \delta'$  的任何两点.

若  $x_1 = x_2$ , 则显然  $|f(x_1) - f(x_2)| = 0 < \varepsilon$ ;

若  $x_1 \neq x_2$ , 令  $|x_1 - x_2| = \delta^*$ , 则  $0 < \delta^* < \delta'$ , 于是,  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega_f(\delta^*) < \varepsilon$ .

由此可知,  $f(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续. 证毕.

**【808】 设**

(1)  $f(x) = x^3 \quad (0 \leq x \leq 1)$ ;

(2)  $f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x \leq a) \text{ 及 } (a < x < +\infty)$ ;

(3)  $f(x) = \sin x + \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$ .

对函数  $f(x)$  的连续模  $\omega_f(\delta)$  (参阅前题) 作如下形式的估计:  $\omega_f(\delta) \leq C\delta^\alpha$ , 式中  $C$  和  $\alpha$  为常数.

解 (1)  $|x_1^3 - x_2^3| = |x_1 - x_2| |x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2| \leq 3\delta$ , 于是,  $\omega_f(\delta) \leq 3\delta$ .

(2) 当  $0 \leq x \leq a$  时 [参看 802 题(4)的证明过程]

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|} \leq \sqrt{\delta},$$

于是,  $\omega_f(\delta) \leq \sqrt{\delta}$ ; 当  $a < x < +\infty$  时

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{\delta}{2\sqrt{a}},$$

于是,  $\omega_f(\delta) \leq \frac{\delta}{2\sqrt{a}}$ .

(3)  $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ , 故

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{2} \sin\left(x_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \sin\left(x_2 + \frac{\pi}{4}\right) \right| &= \sqrt{2} \cdot 2 \left| \cos \frac{x_1 + x_2 + \frac{\pi}{2}}{2} \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \\ &\leq \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{2} \leq \sqrt{2} \delta. \end{aligned}$$

于是,  $\omega_f(\delta) \leq \sqrt{2} \delta$ .

## § 10. 函数方程

**【809】** 证明: 对于所有实数  $x$  和  $y$  都满足方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

的唯一的连续函数  $f(x) (-\infty < x < +\infty)$  是线性齐次函数:



$$f(x)=ax,$$

式中  $a=f(1)$  是任意的常数.

证 先证:若  $f(x)$  满足(1),则对任何有理数  $c$ ,必有

$$f(cx)=cf(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

事实上,当  $m$  与  $n$  为正整数时,有

$$\begin{aligned} f(mx) &= f(x+(m-1)x) = f(x) + f((m-1)x) = f(x) + f(x) + f((m-2)x) = \cdots \\ &= f(x) + f(x) + \cdots + f(x) = mf(x); \end{aligned}$$

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right), \quad \text{故 } f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x).$$

于是,

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{m}{n}f(x).$$

又在(1)中令  $y=0$ ,得  $f(x)=f(x)+f(0)$ ,故  $f(0)=0$ ;又在(1)中令  $y=-x$ ,并注意到已证的结果  $f(0)=0$ ,得  $f(-x)=-f(x)$ .于是,

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right) = -f\left(\frac{m}{n}x\right) = -\frac{m}{n}f(x).$$

故对任何有理数  $c$ ,有  $f(cx)=cf(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ).下面,我们利用  $f(x)$  的连续性证明对任何无理数  $c$ ,此式也成立.事实上,设  $c$  为无理数.取一串有理数  $c_n$ ,使  $c_n \rightarrow c$  ( $n \rightarrow \infty$ ).于是,

$$f(c_n x) = c_n f(x) \quad (n=1,2,\cdots),$$

在此式两端令  $n \rightarrow \infty$  取极限,并注意到函数  $f$  在点  $cx$  连续,即得  $f(cx)=cf(x)$ .于是,对任何实数  $x$  和  $c$ ,有  $f(cx)=cf(x)$ .由此可知,对任何实数  $x$ ,有

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = ax,$$

其中  $a=f(1)$ .证毕.

**【810】** 证明:满足方程(1)的单调函数  $f(x)$  是线性齐次的.

证 由 809 题的证明过程,知:对任何有理数  $c$ ,有

$$f(cx)=cf(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

下面,我们利用  $f(x)$  的单调性证明此式对任何无理数  $c$  也成立.为确定起见,设  $f(x)$  是单调递增的,设  $c$  是无理数,要证  $f(cx)=cf(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ).只就  $x>0$  讨论之( $x \leq 0$  时可类似讨论).取两串有理数  $\{c_n\}$  与  $\{c'_n\}$  使:

$$c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < c < \cdots < c'_3 < c'_2 < c'_1,$$

并且  $c_n \rightarrow c$ ,  $c'_n \rightarrow c$  ( $n \rightarrow \infty$ ).由于  $x>0$ ,故

$$c_1 x < c_2 x < c_3 x < \cdots < cx < \cdots < c'_3 x < c'_2 x < c'_1 x,$$

并且  $c_n x \rightarrow cx$ ,  $c'_n x \rightarrow cx$  ( $n \rightarrow \infty$ ).另外,我们有

$$f(c_n x) = c_n x, \quad f(c'_n x) = c'_n x \quad (n=1,2,\cdots).$$

由于  $f(x)$  是单调递增的,故在点  $cx$  的左、右极限均存在有限,并且满足

$$f(cx-0) \leq f(cx) \leq f(cx+0).$$

在前面两个等式中令  $n \rightarrow \infty$  取极限,得

$$f(cx-0) = cx, \quad f(cx+0) = cx.$$

由此可知  $f(cx)=cx$ .

以下证明同 809 题,不再重复.

**【811】** 证明:满足方程(1)且在任意小区间  $(-\epsilon, \epsilon)$  上为有界的函数  $f(x)$ ,是线性齐次函数.

证 由 809 题的证明过程,知:对任何有理数  $c$ ,有

$$f(cx)=cf(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

下面,我们利用  $f(x)$  在  $(-\epsilon, \epsilon)$  中的有界性来证明对于任何无理数  $c$ ,此式也成立.用反证法,假定对于某无



理数  $c_0$  以及某实数  $x_0$ , 有  $f(c_0 x_0) \neq c_0 f(x_0)$ . 令  $f(c_0 x_0) - c_0 f(x_0) = \alpha$ , 则  $\alpha \neq 0$ . 今取一串有理数  $\{c_n\}$ , 使  $c_n \rightarrow c_0 (n \rightarrow \infty)$ . 于是, 对于任何正整数  $m$ , 有

$$f[m(c_0 - c_n)x_0] = mf[(c_0 - c_n)x_0] = m[f(c_0 x_0) - f(c_n x_0)] = m(c_0 - c_n)f(x_0) + m\alpha, \\ (n=1, 2, 3, \dots; m=1, 2, 3, \dots).$$

任给  $G > 0$ . 先取定一个正整数  $m$ , 使  $m > \frac{2G}{|\alpha|}$ . 对此  $m$ , 再取定一个正整数  $n$ , 使

$$|m(c_0 - c_n)x_0| < \varepsilon, \quad |m(c_0 - c_n)f(x_0)| < G.$$

令  $\bar{x} = m(c_0 - c_n)x_0$ . 于是  $\bar{x} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , 并且

$$|f(\bar{x})| \geq |m\alpha| - |m(c_0 - c_n)f(x_0)| > 2G - G = G.$$

由所给  $G > 0$  的任意性, 即知  $f(x)$  在  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  无界, 此与假定矛盾. 于是, 对任何无理数  $c$ , 也有

$$f(cx) = cf(x).$$

以下证明同 809 题, 不再重复.

**【812】** 证明: 对所有  $x$  和  $y$  都满足方程

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (2)$$

的唯一不恒等于零的连续函数  $f(x) (-\infty < x < +\infty)$  是指数函数:  $f(x) = a^x$ , 式中  $a = f(1)$  为正的常数.

**证** 先证必有  $f(x) > 0 (-\infty < x < +\infty)$ . 事实上, 由  $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$ , 知  $f(x) \geq 0$ .

由于  $f(x) \not\equiv 0$ , 故存在  $x_0$  使  $f(x_0) > 0$ . 在 (2) 中令  $x = x_0, y = 0$ , 得  $f(x_0) = f(x_0)f(0)$ , 故  $f(0) = 1$ ; 又在 (2) 中令  $y = -x$ , 得  $1 = f(0) = f(x)f(-x)$ , 故  $f(x) \neq 0$ , 由此可知  $f(x) > 0 (-\infty < x < +\infty)$ . 当  $m$  与  $n$  为正整数时,

$$f(mx) = f((m-1)x + x) = f((m-1)x)f(x) = f((m-2)x)f(x)f(x) = \dots = [f(x)]^m;$$

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n, \quad \text{即 } f\left(\frac{x}{n}\right) = [f(x)]^{\frac{1}{n}}.$$

于是,

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = \left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^m = [f(x)]^{\frac{m}{n}}.$$

又有

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right) = [f(-x)]^{\frac{m}{n}} = [f(x)]^{-\frac{m}{n}}.$$

由此可知, 对任何有理数  $c$ , 有

$$f(cx) = [f(x)]^c \quad (-\infty < x < +\infty).$$

根据  $f(x)$  的连续性, 仿 809 题的证明易知此式对任何无理数也成立. 因此, 对于任何实数  $c$  与  $x$ , 有

$$f(cx) = [f(x)]^c,$$

从而,  $f(x) = f(x \cdot 1) = [f(1)]^x = a^x, a = f(1) > 0$ .

**注:** 也可利用 809 题的结果来证. 前面已证  $f(x) > 0 (-\infty < x < +\infty)$ . 令  $F(x) = \log_a f(x)$ , 这里  $a = f(1) > 0$ . 于是,  $F(x)$  是  $-\infty < x < +\infty$  上的连续函数, 满足 (1) 式:

$$F(x+y) = \log_a f(x+y) = \log_a [f(x)f(y)] = \log_a f(x) + \log_a f(y) = F(x) + F(y).$$

故由 809 题的结果, 知  $F(x) = a^* x$ , 这里

$$a^* = F(1) = \log_a f(1) = \log_a a = 1,$$

从而,  $F(x) = x$ . 由此可知  $f(x) = a^x$ .

**【813】** 证明: 在区间  $(0, \varepsilon)$  中有界并满足方程 (2) 的不恒等于零的函数  $f(x)$  是指数函数.

**证** 由 812 的证明知:  $f(x) > 0 (-\infty < x < +\infty)$ , 并且对任何有理数  $c$ , 有  $f(cx) = [f(x)]^c$ .

下证对任何无理数  $c$ , 也有

$$f(cx) = [f(x)]^c \quad (-\infty < x < +\infty).$$



用反证法. 假定对某无理数  $c_0$ , 及某实数  $x_0$ , 有  $f(c_0 x_0) \neq [f(x_0)]^{c_0}$ . 显然  $x_0 \neq 0$  (因为  $f(0)=1$ ). 不妨设  $x_0 > 0$ . 我们有  $f(c_0 x_0) = \beta [f(x_0)]^{c_0}$ ,  $\beta > 0, \beta \neq 1$ . 不妨设  $\beta > 1$ . 取一串有理数  $c_n$ , 使  $c_1 < c_2 < c_3 < \dots < c_0$ , 且  $c_n \rightarrow c_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). 于是, 对任何正整数  $m$ , 有

$$f[m(c_0 - c_n)x_0] = \{f[(c_0 - c_n)x_0]\}^m = f(c_0 x_0)^m f(-c_n x_0)^m = \beta^m [f(x_0)]^{m(c_0 - c_n)}.$$

现任给  $G > 0$ . 先取定一个正整数  $m$ , 使  $\beta^m > 2G$ . 然后, 再取一个  $n$ , 使

$$0 < m(c_0 - c_n)x_0 < \varepsilon, \quad [f(x_0)]^{m(c_0 - c_n)} > \frac{1}{2}.$$

于是, 令  $\bar{x} = m(c_0 - c_n)x_0$ , 则  $\bar{x} \in (0, \varepsilon)$ , 且  $f(\bar{x}) > 2G \cdot \frac{1}{2} = G$ , 故  $f(x)$  在  $(0, \varepsilon)$  无界, 此与假定矛盾. 注意, 若  $\beta < 1$ , 则需取  $c_1 > c_2 > c_3 > \dots > c_0, c_n \rightarrow c_0$  并考虑

$$f[-m(c_0 - c_n)x_0] = \beta^{-m} [f(x_0)]^{-m(c_0 - c_n)}.$$

由此可知, 对任何无理数  $c, f(cx) = [f(x)]^c$  也成立.

以下证明同 812 题, 不再重复.

**【814】** 证明: 对于所有正数  $x$  和  $y$  都满足方程  $f(xy) = f(x) + f(y)$  的唯一不恒等于零的连续函数  $f(x) (0 < x < +\infty)$  是对数函数:  $f(x) = \log_a x$ , 式中  $a$  为正的常数.

**证** 在  $f(xy) = f(x) + f(y)$  中令  $y=1$ , 得  $f(1)=0$ . 由于  $f(x) \not\equiv 0$ , 故存在  $x_0 > 0$  使  $f(x_0) \neq 0$ . 先设  $f(x_0) > 0$ .

由于  $f(x_0^2) = f(x_0) + f(x_0) = 2f(x_0), f(x_0^4) = 2f(x_0^2) = 4f(x_0), \dots$ , 利用数学归纳法, 易知  $f(x_0^{2n}) = 2nf(x_0) \rightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ). 故可取某正整数  $n$ , 使  $f(x_0^{2n}) > 1$ . 于是, 根据连续函数性质知, 在 1 与  $x_0^{2n}$  之间必存在某  $a$  (显然  $a > 0$ ) 使  $f(a) = 1$ . 现考虑函数  $F(x) = f(a^x) (-\infty < x < +\infty)$ . 显然  $F(x)$  连续且满足 (1) 式:

$$F(x+y) = f(a^{x+y}) = f(a^x \cdot a^y) = f(a^x) + f(a^y) = F(x) + F(y).$$

于是, 根据 809 题的结果知,  $F(x) = a^* x (-\infty < x < +\infty)$ , 其中  $a^* = F(1) = f(a) = 1$ . 于是,  $F(x) = x$ , 即

$$f(a^x) = x;$$

令  $a^x = y$ , 则  $x = \log_a y$ , 于是,

$$f(y) = \log_a y \quad (0 < y < +\infty).$$

若  $f(x_0) < 0$ , 则可考虑函数  $g(x) = -f(x)$ . 于是,  $g(x_0) > 0$  且  $g(x)$  也满足  $g(xy) = g(x) + g(y)$ , 故根据刚才已证的结果, 可知  $g(y) = \log_a y (0 < y < +\infty)$ , 其中  $a > 0$ . 即  $-f(y) = \log_a y$ , 或  $f(y) = -\log_a y$ .

令  $a^* = \frac{1}{a}$ , 则  $a^* > 0$  且  $-\log_a y = \log_{a^*} y$ , 故

$$f(y) = \log_{a^*} y \quad (0 < y < +\infty),$$

其中  $a^* > 0$ . 证毕.

**【815】** 证明: 对于所有正数  $x$  和  $y$  都满足方程

$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{3}$$

的唯一不恒等于零的连续函数  $f(x) (0 < x < +\infty)$  是幂函数  $f(x) = x^a$ , 式中  $a$  为常数.

**证** 考虑函数  $F(x) = f(e^x) (-\infty < x < +\infty)$ , 则  $F(x)$  在  $-\infty < x < +\infty$  连续不恒为零, 且满足 (2) 式:

$$F(x+y) = f(e^{x+y}) = f(e^x \cdot e^y) = f(e^x)f(e^y) = F(x)F(y).$$

于是, 根据 812 题的结果知

$$F(x) = b^x \quad (-\infty < x < +\infty),$$

其中  $b > 0$ , 即  $f(e^x) = b^x (-\infty < x < +\infty)$ .

令  $e^x = y$ , 则  $y > 0$ ; 显然, 存在唯一的  $a (-\infty < a < +\infty)$ , 使  $e^a = b$ . 于是,

$$f(y) = b^x = e^{ax} = y^a \quad (0 < y < +\infty).$$

证毕.



【816】 求对于所有实数  $x$  和  $y$  都满足方程(3)的所有的连续函数  $f(x) (-\infty < x < +\infty)$ .

证 因为  $f(xy) = f(x)f(y)$ , 所以  $f(1) = f(1)f(1)$ , 于是,  $f(1) = 0$  或  $f(1) = 1$ .

当  $f(1) = 0$  时, 对于任意实数  $x$ , 均有  $f(x) = f(1)f(x) \equiv 0$ .

当  $f(1) = 1$  时, 由于  $f(1) = f((-1) \cdot (-1)) = f(-1)f(-1) = 1$ , 所以,  $f(-1) = \pm 1$ . 下面分两种情况讨论:

(i) 当  $f(-1) = 1$  时, 由于  $f(-x) = f(-1)f(x) = f(x)$ , 所以, 在这种情形下就可把问题归结为对  $0 < x < +\infty$  中的  $x$  进行讨论. 而对于  $x > 0$ , 我们已证得  $f(x) = x^a$ , 式中  $a$  为常数<sup>\*</sup>). 然后再利用  $f(-x) = f(x)$ , 即得  $f(x) = |x|^a$ , 为保证  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  中连续, 需  $a \geq 0$ .

(ii) 当  $f(-1) = -1$  时, 同(i)可得

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot |x|^a \quad (a \geq 0).$$

综上所述, 所求的函数为(1)  $f(x) \equiv 0$ ; 或(2)  $f(x) = |x|^a (a \geq 0)$ ; 或(3)  $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot |x|^a (a \geq 0)$ .

\* ) 利用 815 题的结果.

【817】 证明: 不连续函数  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  满足方程(3).

证 由  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  知,  $f(xy) = \operatorname{sgn}(xy)$ .

分三种情况讨论:

(1) 当  $xy > 0$  时,  $x$  与  $y$  同号, 此时  $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = 1$ ;

(2) 当  $xy < 0$  时,  $x$  与  $y$  异号, 此时  $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = -1$ .

(3) 当  $xy = 0$  时, 在实数域内,  $x$  与  $y$  中至少有一个为 0, 于是,  $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = 0$ .

总之, 不论哪一种情形, 均有

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y,$$

也即函数  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  满足方程  $f(xy) = f(x)f(y)$ .

【818】 求对于所有实数  $x$  和  $y$  都满足方程  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$  的所有的连续函数  $f(x) (-\infty < x < +\infty)$ .

解 显见函数

$$f(x) = \cos ax \quad \text{或} \quad f(x) = \cosh ax$$

满足所给方程. 下面我们将指出满足所给方程的函数具有上述形式. 为此, 在方程中令  $y = 0$ , 得

$$2f(x) = 2f(x)f(0),$$

则当  $f(x) \neq 0$  时  $f(0) = 1$ . 又令  $x = 0$  得

$$f(y) + f(-y) = 2f(y),$$

所以,  $f(-y) = f(y)$ .

由  $f(x)$  的连续性, 故知存在  $c > 0$ , 使当  $x \in [0, c]$  时,  $f(x) > 0$ . 设  $f(c) = a$ . 下面分两种情况讨论:

(1) 当  $0 < a \leq 1$  时, 于是, 存在  $\theta: 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ , 使得

$$f(c) = \cos \theta. \quad (1')$$

从而

$$f(2c) = 2[f(c)]^2 - f(0) = 2\cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta,$$

$$f(3c) = 2f(2c)f(c) - f(c) = 2\cos 2\theta \cos \theta - \cos \theta = \cos 3\theta.$$

利用数学归纳法易证, 对于所有的正整数  $n$ , 均有

$$f(nc) = \cos n\theta. \quad (2')$$

又

$$\left[ f\left(\frac{1}{2}c\right) \right]^2 = \frac{1}{2}[f(0) + f(c)] = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) = \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

由于  $f(x) > 0$ , 故取正根, 则得

$$f\left(\frac{1}{2}c\right) = \cos \frac{\theta}{2}. \quad (3')$$



同样,利用数学归纳法,对于所有的正整数  $n$ ,均有

$$f\left(\frac{1}{2^n}c\right)=\cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right). \quad (4')$$

重复应用(1')到(2')的推理过程于(4'),可知对于所有的正整数  $m$ ,均有

$$f\left(\frac{m}{2^n}c\right)=\cos\left(\frac{m}{2^n}\theta\right). \quad (5')$$

因此,对于  $\frac{m}{2^n}$  型的正实数  $x_n$ ,有

$$f(cx_n)=\cos(\theta x_n).$$

又因任一正实数  $x$  皆可表成  $\frac{m}{2^n}$  型数列的极限,所以,利用极限过程易得

$$f(cx)=\cos(\theta x). \quad (6')$$

由于  $f(-y)=f(y)$ ,故(6')式对  $x<0$  也成立.至于当  $x=0$  时,  $f(cx)=\cos(\theta x)$  显然成立.因此,对于  $-\infty<x<+\infty$  的一切实数,均有  $f(cx)=\cos(\theta x)$ .把  $cx$  换成  $x$ ,并令  $\frac{\theta}{c}=a$ ,则得

$$f(x)=\cos ax.$$

(2) 当  $a>1$  时,于是存在这样的  $\theta$ ,使得  $f(c)=a=\operatorname{ch}\theta$ .

根据双曲余弦的关系式,再重复上面的推理过程,可得  $f(x)=\operatorname{ch} ax$ .当  $a=0$  时,  $f(x)\equiv 1$ .

综上所述,所求的函数为  $f(x)=\cos ax$  或  $f(x)=\operatorname{ch} ax$ .

**【819】** 求对于所有实数  $x$  和  $y$  都满足方程组:

$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y),$$

$$g(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x),$$

以及规范条件

$$f(0)=1 \quad \text{和} \quad g(0)=0$$

的所有的有界连续函数  $f(x)$  和  $g(x)$  ( $-\infty<x<+\infty$ ).

**提示** 考虑函数  $F(x)=f^2(x)+g^2(x)$ .

**解** 考虑函数  $F(x)=f^2(x)+g^2(x)$ ,则

$$\begin{aligned} F(x+y) &= f^2(x+y)+g^2(x+y) \\ &= [f(x)f(y)-g(x)g(y)]^2 + [f(x)g(y)+f(y)g(x)]^2 = F(x)F(y), \end{aligned}$$

由于  $F(0)=1$  及  $F(x)\neq 0$ ,故

$$F(x)=a^x \quad (-\infty<x<+\infty),$$

式中  $a=F(1)$  为正的常数<sup>\*)</sup>.

由于  $f(x)$  及  $g(x)$  有界,故只能有  $a=1$ .因此,对于所有的实数  $x$ ,有  $f^2(x)+g^2(x)=1$ .因为

$$0=g(0)=g(x-x)=f(x)g(-x)+f(-x)g(x)$$

及

$$1=f(0)=f(x-x)=f(x)f(-x)-g(-x)g(x).$$

上面二式分别乘以  $g(-x)$  及  $f(-x)$ ,然后相加,得

$$f(-x)=f(x)[f^2(-x)+g^2(-x)]=f(x);$$

如果上面二式分别乘以  $f(-x)$  及  $g(-x)$ ,然后相减,得

$$g(-x)=-g(x)[g^2(-x)+f^2(-x)]=-g(x).$$

从而可得

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)+f(x)f(-y)-g(x)g(-y)=2f(x)f(y).$$

于是,考虑到  $f(x)$  的有界性,可得

$$f(x)=\cos ax^{**}),$$

再由  $f^2(x)+g^2(x)=1$  可得



$$g(x) = \pm \sin ax.$$

\* ) 利用 812 题的结果.

\* \* ) 利用 818 题的结果.

**【820】** 设  $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$  及  $\Delta^2 f(x) = \Delta\{\Delta f(x)\}$  分别为函数  $f(x)$  的一阶、二阶有限差分.

证明:若函数  $f(x) (-\infty < x < +\infty)$  是连续的且  $\Delta^2 f(x) \equiv 0$ , 则此函数是线性函数, 即  $f(x) = ax + b$ , 式中  $a$  和  $b$  为常数.

证 由  $\Delta^2 f(x) \equiv 0$  得

$$f(x+\Delta_1 x+\Delta_2 x) - f(x+\Delta_2 x) \equiv f(x+\Delta_1 x) - f(x).$$

令  $x=0$ , 得

$$f(\Delta_1 + \Delta_2) - f(\Delta_2) \equiv f(\Delta_1) - f(0).$$

令  $\Delta_2 = n\Delta_1$ , 得

$$f[(n+1)\Delta_1] - f(n\Delta_1) \equiv f(\Delta_1) - f(0).$$

利用数学归纳法, 可得

$$f[(n+1)\Delta_1] - f(0) \equiv (n+1)[f(\Delta_1) - f(0)]. \quad (1')$$

关系式(1')可写成

$$f(\Delta_1) - f(0) = \frac{1}{n}[f(n\Delta_1) - f(0)].$$

在上式中令  $n\Delta_1 = m$ , 再利用(1')即得

$$f\left(\frac{m}{n}\right) - f(0) = \frac{m}{n}[f(1) - f(0)].$$

所以,  $f\left(\frac{m}{n}\right) = a \cdot \frac{m}{n} + b$ , 式中  $a = f(1) - f(0)$  及  $b = f(0)$  均为常数.

于是, 对于有理数  $x$ , 均有

$$f(x) = ax + b.$$

对于无理数  $x$ , 利用  $f(x)$  的连续性, 即可证得上式仍成立. 事实上, 取有理数列  $x_n \rightarrow x$ , 则

$$\lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n) = f(x).$$

另一方面

$$\lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow x} (ax_n + b) = ax + b.$$

因此, 对于所有的实数  $x$ , 均有  $f(x) = ax + b$ .